
3 1761 08090963 3

SKANDINAVISK AKTUARIETIDSKRIFT

UTGIVEN AV

FORENINGEN AF DANSKE AKTUARER,
DEN NORSKE AKTUARFORENING OCH
SVENSKA AKTUARIEFÖRENINGEN

REDAKTÖR OCH ANSVARIG UTGIVARE:

FIL. D:R N. V. E. NORDENMARK

MEDREDAKTÖRER:

FÖR DANMARK: D:R PHIL. J. F. STFFENSEN
FÖR NORGE: AKTUAR IVAR HESSELBERG
FÖR SVERIGE: 1:STE AKTUARIEN G. STOLTZ

ÅRGÅNG I—1918

UPPSALA 1918
ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.



INNEHÅLL 1918.

Avhandlingar:

Litteratur:

Homogeneität und Stabilität in der Statistik.

Von L. v. Bortkiewicz.

(Vortrag, gehalten in der »Svenska Aktuarieföreningen« in Stockholm am 20. September 1917.)

Es sei bei einer aus s Elementen bestehenden statistischen Masse irgend eine Erscheinung (Merkmal, Ereignis) A an x Elementen aus s beobachtet und dementsprechend

(1) $$y = \frac{x}{s}$$

als *Häufigkeit* des Vorkommens von A in der gegebenen Masse festgestellt worden. Zerlegt man diese Masse nach irgend einem Gesichtspunkt in so und so viele Teilmassen und findet man $s', s'' \ldots$ als Zahlen der Elemente in den einzelnen Teilmassen und $x', x'' \ldots$ als Zahlen derjenigen unter diesen Elementen, an welchen A beobachtet worden ist, so lassen sich nach Analogie von (1) die Häufigkeiten

(2) $$y' = \frac{x'}{s'}, \; y'' = \frac{x''}{s''} \cdots$$

berechnen, wobei wegen

(3) $$s' + s'' + \cdots = s$$

und

(4) $$x' + x'' + \cdots = x$$

die Beziehung

(5) $$y = \frac{s'}{s} y' + \frac{s''}{s} y'' + \cdots$$

besteht. Im folgenden sollen $s, s', s'' \ldots$ *Grundzahlen* und $x, x', x'' \ldots$ *Ereigniszahlen* genannt werden.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung gibt Mittel an die Hand, um mit einer von der Grösse der betreffenden Grundzahlen abhängigen Sicherheit zu entscheiden, ob die numerischen Unterschiede zwischen den Häufigkeiten y', y'' ... bezw. die Abweichungen der Grössen y', y'' ... von der Grösse y einen zufälligen Charakter tragen oder nicht. Je nachdem ersteres oder letzteres zutrifft, kann man sagen, dass die Masse sich zu der vorgenommenen Zerlegung *indifferent verhält*, oder aber dass sie auf diese Zerlegung *reagiert*. Solche Aussagen gelten jeweils nur in Bezug auf eine bestimmte Erscheinung, denn es ist nicht ausgeschlossen, dass ein und dieselbe Zerlegung für verschiedene Erscheinungen zu entgegengesetzten Ergebnissen führt. Es darf daher auch bei den folgenden Darlegungen nicht übersehen werden, dass wenn eine Masse so oder anders charakterisiert wird, dies stets die Bezugnahme auf ein bestimmtes A zur Voraussetzung hat.

Eine Masse, die sich zu allen denkbaren Zerlegungen indifferent verhält, soll als eine *homogene* Masse bezeichnet werden. Die so verstandene Homogeneität einer Masse ist, streng genommen, niemals nachweisbar. Dadurch erleidet jedoch die theoretische Bedeutung des Begriffs einer homogenen Masse keinen Abbruch. Der Unterscheidung zwischen homogenen und nicht-homogenen Massen wird seit jeher bei wahrscheinlichkeitstheoretisch orientierten Erörterungen über die Stabilität von statistischen Zahlenwerten, insbesondere von Häufigkeiten, Rechnung getragen. Je nachdem sich die Häufigkeit y auf eine homogene oder eine nicht-homogene Masse bezieht, heisst die ihr entsprechende »Grundwahrscheinlichkeit», d. h. die Wahrscheinlichkeit von A, *Elementarwahrscheinlichkeit* oder *Durchschnittswahrscheinlichkeit*. Man wolle diese Wahrscheinlichkeit mit p bezeichnen und setze $1 - p = q$.

Liegen für z aufeinander folgende Zeitabschnitte, z. B. Kalenderjahre, die Einzelwerte $y_1, y_2 \ldots y_z$ der Häufigkeit vor, so pflegt man als summarischen Ausdruck für das Mass der Schwankungen, die diese Werte aufweisen, ihre mit σ zu bezeichnende *mittlere Abweichung* zu betrachten, die sich aus

$$(6) \qquad \sigma^2 = \frac{1}{z} \sum_{1}^{z} {}_k (y_k - y)^2.$$

wo

$$(7) \qquad y = \frac{1}{z} \sum_{1}^{z} {}_k\, y_k,$$

bestimmt. Unabhängig davon, ob die Wahrscheinlichkeit p, die den Häufigkeiten y_k zu Grunde liegt, eine Elementarwahrscheinlichkeit oder eine Durchschnittswahrscheinlichkeit ist, ist die mathematische Erwartung von y_k durch p gegeben. Dies soll in der Form

$$(8) \qquad \mathfrak{E}(y_k) = p$$

dargestellt werden, und demgemäss ist auch im folgenden unter $\mathfrak{E}(a)$ die mathematische Erwartung einer Grösse a zu verstehen. Was alsdann die mathematische Erwartung von σ^2 betrifft, so erhält man unter der vereinfachenden, auch im nachstehenden festzuhaltenden, Annahme, dass jedem der Werte y_k die gleiche Grundzahl (s) entspricht, in dem Fall, wo p eine Elementarwahrscheinlichkeit ist:

$$(9) \qquad \mathfrak{E}(\sigma^2) = \frac{z-1}{z} \cdot \frac{pq}{s}.$$

Der Fall aber, wo p eine Durchschnittswahrscheinlichkeit ist, gibt zu folgenden Betrachtungen Anlass. Gesetzt, jeder der Werte y_k sei nach Massgabe von (5) auf die Form

$$(10) \qquad y_k = \frac{s'_k}{s} y'_k + \frac{s''_k}{s} y''_k + \cdots$$

gebracht worden, wobei die Teilmassen, für welche sich die Grundzahlen s'_k, $s''_k \ldots$ und die Häufigkeiten y'_k, $y''_k \ldots$ ergeben haben, homogene Massen sind, so lässt sich in analoger Weise p als

$$(11) \qquad p = g'p' + g''p'' + \cdots$$

darstellen, wo p', $p'' \ldots$ die Grundwahrscheinlichkeiten und g', $g'' \ldots$ die der Bedingung

$$(12) \qquad g' + g'' + \cdots = 1$$

genügenden *Gewichte* sind, welche den einzelnen Teilmassen

zukommen. Die Beziehung der Gewichte $g', g'' \ldots$ zu den in (10) auftretenden Faktoren $\frac{s'_k}{s}, \frac{s''_k}{s} \cdots$ fasst man entweder nach Massgabe der Gleichungen

$$(13) \qquad \frac{s'_k}{s} = g', \quad \frac{s''_k}{s} = g'' \ldots .$$

oder aber im Sinne von

$$(14) \qquad \mathfrak{E}\left(\frac{s'_k}{s}\right) = g', \quad \mathfrak{E}\left(\frac{s''_k}{s}\right) = g'' \ldots$$

auf, wobei (13) und (14) für jedes k gelten. Es handelt sich somit bei $g', g'' \ldots$ im ersten Fall um konstante Grössen, die mit den Quotienten $\frac{s'_k}{s}, \frac{s''_k}{s} \ldots$ zusammenfallen, im zweiten Fall hingegen um Wahrscheinlichkeiten, als deren empirische Näherungswerte sich die Quotienten $\frac{s'_k}{s}, \frac{s''_k}{s} \ldots$ darstellen, und man spricht in Bezug auf p dort von einer *konstant-zusammengesetzten Durchschnittswahrscheinlichkeit*, hier von einer *Durchschnittswahrscheinlichkeit im eigentlichen Sinn*. Im Fall einer konstant-zusammengesetzten Durchschnittswahrscheinlichkeit ist Formel (9) durch

$$(15) \qquad \mathfrak{E}(\sigma^2) = \frac{z-1}{zs}(pq - \delta^2)$$

zu ersetzen, wo

$$(16) \qquad \delta^2 = g'(p'-p)^2 + g''(p''-p)^2 + \cdots,$$

während in Fall einer Durchschnittswahrscheinlichkeit im eigentlichen Sinn Formel (9) bestehen bleibt.

Demnach ist in dem Fall einer konstant-zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit das Schwankungsmass σ davon abhängig, ob die betreffende statistische Masse homogen oder nicht-homogen ist: σ wird hier um so kleiner, je grösser das durch δ ausgedrückte *Mass der Differenziertheit* der Masse wird; das Höchstmass der Differenziertheit ergibt sich dann, wenn die Masse in zwei Teilmassen mit den Grundwahrscheinlichkeiten 1 und 0 zerfällt, so dass man in (11) $p' = 1$, $p'' = 0$

und dementsprechend $g' = p$, $g'' = q$ zu setzen hat und nach Formel (16) $\delta^2 = pq$, mithin nach Formel (15) $\mathfrak{E}(\sigma^2) = 0$ erhält. Demgegenüber übt in dem Fall einer Durchschnittswahrscheinlichkeit im eigentlichen Sinn der Umstand, ob die Masse homogen oder nicht-homogen bezw. wie stark das Mass ihrer Differenziertheit ist, auf das Schwankungsmass σ keinen Einfluss aus. Weil aber bei einem gegebenen y die *Stabilität* der Reihe $y_1, y_2 \ldots y_z$ um so grösser ist, je kleiner σ ausfällt, und umgekehrt um so kleiner, je grösser σ ausfällt, so kann man den dargelegten Sachverhalt auch so ausdrücken: im Fall einer konstant-zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit ist die Stabilität der Reihe am kleinsten, wenn die betreffende Masse homogen ist, und nimmt die Stabilität mit wachsender Differenziertheit zu; im Fall einer Durchschnittswahrscheinlichkeit im eigentlichen Sinn wird der Grad der Stabilität einer Reihe von dem Umstand, ob die betreffende Masse homogen ist oder nicht, bezw. welches das Mass ihrer Differenziertheit ist, nicht berührt. Der Zusammenhang zwischen Homogeneität und Stabilität erscheint sonach in ganz verschiedenem Licht, je nachdem man den einen oder den anderen der beiden in Frage kommenden Fälle ins Auge fasst. Insbesondere würde Formel (15) nur unter der Bedingung zu der Aussage berechtigen, dass die Ungleichartigkeit einer Masse die Stabilität erhöht, wenn man Grund hätte, anzunehmen, dass für die Massenerscheinung, auf welche sich die Aussage bezieht, der Fall einer konstant-zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit massgebend ist. Wird aber die Behauptung, dass die Ungleichartigkeit der Masse die Stabilität erhöht bezw. das Schwankungsmass reduziert, bedingungslos aufgestellt, so ist das theoretisch unrichtig und praktisch um so weniger zutreffend, als der Fall einer konstant-zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit am wenigsten darauf Anspruch hat, als Normalfall zu gelten.

Diesen Dingen habe ich seiner Zeit, an Poisson, Cournot und v. Kries anknüpfend, eingehende Erörterungen gewidmet[1], und auch in der neueren und neuesten mathematisch-statistischen Literatur, in Abhandlungen wie in Lehr-

[1] Kritische Betrachtungen zur theoretischen Statistik, I. Artikel, Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, 3. Folge, Bd. VIII, 1894, S. 641—680.

büchern, wird die Frage mehr oder weniger ausführlich behandelt; jedoch nicht immer in befriedigender Weise. So spricht sich z. B. G. UDNY YULE in seiner »Introduction to the theory of statistics» (London 1911, S. 256—257 und 280 - 282) ohne jeden Vorbehalt in dem Sinne aus, dass die Ungleichartigkeit einer statistischen Masse die Wirkung hat, das Schwankungsmass (»the standard deviation») herunterzudrücken; und diese Behauptung wird eben durch den Hinweis auf den Ausdruck von $\mathfrak{E}(\sigma^2)$ im Fall einer konstantzusammengesetzten Wahrscheinlichkeit begründet. Yule setzt also stillschweigend diesen Fall als stets vorliegend voraus — eine Voraussetzung, die gänzlich in der Luft schwebt. Wenn Yule hier versagt, so dürfte sich das durch den Umstand erklären, auf den kürzlich in einem anderen Zusammenhang SVEN WICKSELL aufmerksam gemacht hat, dass nämlich Yule, wie die Pearsonsche Schule überhaupt, der mathematisch-statistischen Literatur des Kontinents etwas zu wenig Beachtung schenkt.[1] Aber auch z. B. HUGO FORCHER's Buch »Die statistische Methode als selbständige Wissenschaft» (Leipzig 1913, S. 239—241, 326) — übrigens ein unmöglicher Titel! — enthält über den in Frage stehenden Punkt Ausführungen, die nichts weniger als einwandfrei sind. Forcher bedient sich sowohl im Laufe dieser Ausführungen wie auch sonst des von mir vorgeschlagenen Ausdrucks »konstantzusammengesetzte Durchschnittswahrscheinlichkeit», ohne ihn zu verstehen.

Ich will mich jedoch an diesem Ort weder in Polemiken, noch in Reminiszenzen ergehen, sondern versuchen, der Frage von den Beziehungen zwischen Homogeneität und Stabilität in der Statistik von einer neuen, bisher weder von mir selbst, noch von anderen berücksichtigten Seite näher zu treten. Ich bitte Sie denn auch dasjenige, was ich soeben vorgebracht habe, nur als Einleitung zu den Darlegungen hinzunehmen, die den eigentlichen Gegenstand meines heutigen Vortrags

[1] S. D. WICKSELL, Some theorems in the theory of probabilities etc. in dieser Zeitschrift, 1916, Heft 4—5, S. 196. Aehnlich wie Yule, legt H. E. TIMERDING (Die Analyse des Zufalls, Braunschweig 1915, S. 137—139) seinen Betrachtungen über den Einfluss der Ungleichartigkeit der Masse auf das Schwankungsmass oder, wie er es ausdruckt, des »Wechsels der Wahrscheinlichkeit innerhalb einer Gruppe auf die Dispersion» ohne jede Motivierung den Fall einer konstant zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit zu Grunde.

bilden sollen. Mit dieser Einleitung habe ich nichts anderes bezweckt, als in aller Kürze den derzeitigen Stand der Frage, und zwar mit Rücksicht auf die ausschliesslich mathematisch orientierten Statistiker, zu charakterisieren.

Das Neue, welches über diesen status quo hinausführen soll, betrifft zwei Punkte: erstens soll die Frage, *ob* und gegebenen Falles *wie* Homogeneität und Stabilität zusammenhängen, einer nicht blos theoretischen, sondern zugleich *empirischen* Betrachtung unterzogen werden, was seither von der mathematischen Statistik unterlassen worden ist; zweitens soll diese ganze — sowohl theoretische wie empirische Betrachtung — aufgebaut werden nicht mehr auf dem Schema einer unveränderlichen Grundwahrscheinlichkeit, von dem aus die Frage seither erörtert wurde, sondern auf dem von Lexis herrührenden *Schema einer serienweise variierenden Grundwahrscheinlichkeit*[1], mit dem sich in letzter Zeit namentlich Charlier näher befasst hat.[2]

Was den ersten dieser beiden Punkte anlangt, so bringt es die Rücksicht auf die Empirie mit sich, dass man dem Begriff der Homogeneität einen *relativen* Sinn beilegt, d. h., mathematisch gesprochen, dass man, statt die beiden Fälle $\delta = 0$ und $\delta > 0$ einander gegenüberzustellen — der erstere dieser beiden Fälle ist ein Idealfall, der für eine empirische Betrachtung kein unmittelbares Interesse bietet —, vielmehr darauf sieht, ob δ einen grösseren oder kleineren Wert annimmt. Homogeneität im relativen Sinne ist also das Korrelat der Differenziertheit: die Homogeneität ist grösser oder kleiner, je nachdem die Differenziertheit kleiner oder grösser ist, und dementsprechend ist von zwei Massen diejenige homogener, welche einen kleineren Wert von δ aufweist. Um die Grösse δ numerisch bestimmen zu können, müsste es möglich sein, mit der Zerlegung einer Masse in Teilmassen so weit fortzufahren. bis man auf Teilmassen kommt, die auf keine weitere Zerlegung mehr reagieren, die also homogen im absoluten Sinne oder, wie wir fortan dafür sagen wollen, *vollständig homogen* sind. Diese Möglichkeit ist kaum jemals gegeben.

[1] W. Lexis, Abhandlungen zur Theorie der Bevölkerungs- und Moralstatistik, Jena 1903, S. 170—212.

[2] C. V. L. Charlier, Contributions to the mathematical theory of statistics, Arkiv för matematik, astronomi och fysik, Bd 7, N:o 17, Bd 8, N:o 4 & Bd 9, N:o 25.

Aber selbst wenn es einmal ausnahmsweise glücken sollte, zu vollständig homogenen Massen zu gelangen, würde man, wie ich bereits anfangs bemerkt habe, nicht in der Lage sein, sich davon zu überzeugen: es bliebe stets der Zweifel zurück, ob die für vollständig homogen gehaltenen Massen auf eine weitere Zerlegung nach irgend einem neuen Gesichtspunkt doch nicht reagieren würden. So kann man denn sagen, dass δ einer numerischen Auswertung unzugänglich ist. Hieraus folgt, dass man auch niemals imstande ist, zu entscheiden, welche von zwei gegebenen Massen die homogenere ist. Wohl aber lässt sich der Satz aufstellen, und zwar a priori, *dass keine statistische Masse homogener sein kann als es im Durchschnitt die Partialmassen sind, aus denen sie sich zusammensetzt.* Es sei n die Zahl dieser Partialmassen, und es seien $\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_n$ die Werte, welche δ für diese Partialmassen und δ_0 der Wert, welchen δ für die Totalmasse annimmt. Bezeichnet man ferner die der i:ten Partialmasse zukommende Grundwahrscheinlichkeit mit p_i und die entsprechenden Elementarwahrscheinlichkeiten und Gewichte mit $p'_i, p''_i \ldots$ und $g'_i, g''_i \ldots$, so erhält man nach Analogie von (11) und (16)

$$(17) \qquad p_i = g'_i p'_i + g''_i p''_i \cdots$$

und

$$(18) \qquad \delta^2_i = g'_i(p'_i - p_i)^2 + g''_i(p''_i - p_i)^2 + \cdots$$

Alsdann findet man, wenn man mit p_0 die der Totalmasse zukommende Grundwahrscheinlichkeit und mit c_i den Anteil der i:ten Partialmasse an der Totalmasse, d. h. das Verhältnis der Grundzahl der Partialmasse zu der Grundzahl der Totalmasse bezeichnet,

$$(19) \qquad p_0 = \sum_1^n c_i p_i$$

und

$$(20) \qquad \delta^2_0 = \sum_1^n \{c_i g'_i (p'_i - p_0)^2 + c_i g''_i (p''_i - p_0)^2 + \cdots\}.$$

Letztere Formel geht aber wegen

$$(21) \qquad g'_i(p'_i - p_0)^2 + g''_i(p''_i - p_0)^2 + \cdots = \delta^2_i + (p_i - p_0)^2$$

in

(22) $$\delta_0^2 = \sum_1^n {}_i c_i \delta_i^2 + \sum_1^n {}_i c_i (p_i - p_0)^2$$

über, woraus

(23) $$\delta_0^2 > \sum_1^n {}_i c_i \delta_i^2$$

und a fortiori

(24) $$\delta_0 > \sum_1^n {}_i c_i \delta_i$$

folgt. Formel (24) bringt den vorhin formulierten Satz auf seinen mathematischen Ausdruck. Erst dieser Satz gestattet überhaupt, streng genommen, eine empirische Prüfung der Frage, ob und wie die Stabilität von der Homogeneität beeinflusst wird: vergleicht man nämlich ein Ganzes mit allen seinen Teilen, z. B. ein Land mit dessen sämtlichen Provinzen, in Bezug auf die Stabilität, die irgend eine Häufigkeitszahl aufweist, und findet man, dass die Stabilität des Ganzen diejenige der Teile übertrifft, so wäre man zu der Behauptung berechtigt, dass im gegebenen Fall die geringere Homogeneität von einer grösseren Stabilität und umgekehrt die grössere Homogeneität von einer geringeren Stabilität begleitet wird; würde es sich aber im Gegensatz dazu zeigen, dass die Stabilität des Ganzen hinter der Stabilität der Teile zurückbleibt, so wäre damit erwiesen, dass im gegebenen Fall die Homogeneität mit der Stabilität Hand in Hand geht. So werde ich denn auch die in Aussicht genommene empirische Prüfung des Sachverhalts auf derartige Vergleiche zwischen einem Ganzen und seinen Teilen anlegen.

Aber ehe ich dazu übergehe, soll noch über den zweiten jener beiden Punkte, die ich als massgebend für die ganze Betrachtung hingestellt habe, das nötige gebracht werden. Das Schema einer serienweise variierenden Grundwahrscheinlichkeit beruht auf der Annahme, dass den z Häufigkeiten y_k verschiedene Grundwahrscheinlichkeiten p_k entsprechen, die den Charakter von Elementarwahrscheinlichkeiten oder von Durchschnittswahrscheinlichkeiten im eigentlichen Sinne haben. Man bilde — unter Festhaltung der Voraussetzung, dass die

Grundzahl (s) konstant ist — das einfache arithmetische Mittel der z Werte p_k und nenne es p. Das Mass der Schwankungen von p_k sei durch das quadratische Mittel der Abweichungen $p_k - p = e_k$ gegeben, das mit w bezeichnet werden möge. Somit hat man

$$(25) \qquad \frac{1}{z} \sum_{1}^{z} {}_k \, p_k = p$$

und

$$(26) \qquad \frac{1}{z} \sum_{1}^{z} {}_k \, e_k^2 = w^2.$$

Es fragt sich, wie gross hier die mathematische Erwartung von σ^2 ist. Führt man die abkürzende Bezeichnung $y_k - y = a_k$ ein, so ist zunächst

$$(27) \qquad \sigma^2 = \frac{1}{z} \sum_{1}^{z} {}_k \, a_k^2,$$

und unter Anwendung der weiteren Bezeichnungen $y_k - p_k = d_k$ und $y - p = f$, erhält man

$$a_k = y_k - y,$$
$$y_k = p_k + d_k,$$
$$p_k = p + e_k,$$
$$p = y - f,$$

woraus durch Summierung

$$a_k = d_k + e_k - f$$

und dementsprechend

$$(28) \qquad a_k^2 = d_k^2 + e_k^2 + f^2 + 2 d_k e_k - 2 d_k f - 2 e_k f$$

hervorgeht. Nun hat man aber

$$(29) \qquad \mathfrak{E}(y_k) = p_k,$$

$$(30) \qquad \mathfrak{E}(d_k) = 0,$$

$$(31) \qquad \mathfrak{E}(d_k^2) = \frac{p_k q_k}{s},$$

sodann

(32) $$f = \frac{1}{z} \sum_1^z {}_k\, d_k,$$

daher

(33) $$\mathfrak{E}(f) = 0,$$

(34) $$\mathfrak{E}(f^2) = \frac{\sum_1^z {}_k\, p_k q_k}{z^2 s}.$$

und noch

$$d_k f = \frac{1}{z} d_k \sum_1^z {}_k\, d_k,$$

somit

(35) $$\mathfrak{E}(d_k f) = \frac{p_k q_k}{z s}.$$

Wegen (31), (33), (34) und (35) erhält man aus (28):

$$\mathfrak{E}(a_k^2) = \frac{p_k q_k}{s} + e_k^2 + \frac{\sum_1^z {}_k\, p_k q_k}{z^2 s} - \frac{2 p_k q_k}{z s},$$

und

(36) $$\mathfrak{E}\left(\sum_1^z {}_k\, a_k^2\right) = \frac{z-1}{z s} \sum_1^z {}_k\, p_k q_k + \sum_1^z {}_k\, e_k^2.$$

Es ist aber

$$p_k q_k = (p + e_k)(q - e_k),$$

daher

$$\sum_1^z {}_k\, p_k q_k = z p q - (p - q) \sum_1^z {}_k\, e_k - \sum_1^z {}_k\, e_k^2$$

und mit Rücksicht auf (25) und (26)

(37) $$\sum_1^z {}_k\, p_k q_k = z(pq - w^2),$$

so dass (36) in

$$(38)\qquad \mathfrak{E}\left(\sum_{1}^{z}{}_k\, a_k^2\right) = \frac{(z-1)\,pq}{s} + \frac{zs - z + 1}{s}\, w^2$$

übergeht. Also findet man, auf (27) zurückgreifend,

$$(39)\qquad \mathfrak{E}(\sigma^2) = \frac{z-1}{z}\cdot\frac{pq}{s} + \frac{zs - z + 1}{zs}\, w^2$$

und näherungeweise, bei hinreichend grossen s,

$$(40)\qquad \mathfrak{E}(\sigma^2) = \frac{z-1}{z}\cdot\frac{pq}{s} + w^2.$$

Nebenbei bemerkt, benützt Lexis eine mit (40) nicht ganz übereinstimmende Formel, die sich in meiner Bezeichnungsweise als

$$(41)\qquad \mathfrak{E}\left(\frac{1}{z-1}\sum_{1}^{z}{}_k\, a_k^2\right) = \frac{pq}{s} + w^2$$

darstellen lässt, während sich aus (40)

$$(42)\qquad \mathfrak{E}\left(\frac{1}{z-1}\sum_{1}^{z}{}_k\, a_k^2\right) = \frac{pq}{s} + \frac{z\, w^2}{z-1}$$

ergibt. Dieser Unterschied erklärt sich wie folgt. Wenn man, statt direkt von den Abweichungen a_k auszugehen, zunächst die Abweichungen $y_k - p$ ins Auge fasst, so findet man, unter Anwendung der Bezeichnung $y_k - p = b_k$,

$$(43)\qquad b_k = d_k + e_k,$$

$$(44)\qquad \mathfrak{E}(b_k^2) = \frac{p_k q_k}{s} + e_k^2,$$

$$(45)\qquad \mathfrak{E}\left(\frac{1}{z}\sum_{1}^{z}{}_k\, b_k^2\right) = \frac{pq}{s} + \frac{s-1}{s}\, w^2$$

bezw. bei grossem s näherungsweise

$$(46)\qquad \mathfrak{E}\left(\frac{1}{z}\sum_{1}^{z}{}_k\, b_k^2\right) = \frac{pq}{s} + w^2.$$

Nun sind aber die Grössen b_k vom Standpunkte der mathematischen Fehlertheorie aus als die *wahren* und die Grössen a_k als die *scheinbaren* Fehler aufzufassen, und die Theorie schreibt vor, wo es sich um das arithmetische Mittel der Fehlerquadrate handelt, dem Umstand, dass man es mit den scheinbaren, statt mit den wahren, Fehlern zu tun hat, durch Verringerung des Divisors um 1 (in der Formel des betreffenden arithmetischen Mittels) Rechnung zu tragen, Tut man das hier, so gelangt man in der Tat auf der Grundlage von (46) zu (41). Aber die in Frage stehende Regel setzt voraus, dass die betreffenden Fehler rein zufällige sind, wogegen die Abweichungen a_k und b_k einen »systematischen» Fehler (e_k) mitenthalten. Daher versagt die Regel im vorliegenden Fall. Durch diesen Missgriff wird indessen das Wesen der Sache nicht tangiert.

Worauf es ankommt, ist, dass, wie ein Vergleich sowohl der Formel (40) wie der Formel (41) mit der Formel (9) zeigt, das neue Schema grössere Schwankungen der Häufigkeiten als das alte erwarten lässt und dass der betreffende Überschuss von s nicht abhängt. Lexis hatte nämlich durch Untersuchung vieler statistischer Reihen die Tatsache zu Tage gefördert, das die Grösse σ fast ausnahmslos das übliche, d. h. eben das nach dem alten Schema ermittelte theoretische Mass überschreitet. Dabei musste dieses theoretische Mass, das mit u bezeichnet werden möge, statt aus

$$u = \sqrt{\frac{z-1}{z} \cdot \frac{pq}{s}}, \tag{47}$$

wie es direkt der Formel (9) entsprechen würde, vielmehr aus

$$u = \sqrt{\frac{z-1}{z} \cdot \frac{y(1-y)}{s}} \tag{48}$$

bestimmt werden, weil p unbekannt ist und daher durch seinen Näherungswert y zu ersetzen ist. Lexis bildete demgemäss den Quotienten

$$Q = \frac{\sigma}{u} \tag{49}$$

der bei ihm in der Form

$$Q = \sqrt{\frac{1}{z-1}\sum_{1}^{z}{}_k(y_k - y)^2} : \sqrt{\frac{y(1-y)}{s}}.$$

auftritt — den sogenannten *Divergenzkoeffizienten* — und baute seine heute allgemein akzeptierte Unterscheidung zwischen den drei Fällen der *normalen*, *übernormalen* und *unternormalen Dispersion* darauf auf, ob Q einen numerischen Wert annimmt, der nahezu gleich 1, merklich grösser oder merklich kleiner als 1 ist. Das vorhin erwähnte Hauptergebnis seiner Untersuchungen über die statistischen Reihen bestand also darin, dass Q fast immer über 1 hinausgeht, dass somit die übernormale Dispersion die Regel bildet.

Hierzu möchte ich zwei Beispiele anführen, in denen Q eine beträchtliche Höhe erreicht, obschon die betreffenden Häufigkeiten, solange man sie nicht unter die Lupe der Wahrscheinlichkeitsrechnung nimmt, als überraschend stabil erscheinen. In den 8 Kalenderjahren 1879—1886 stellte sich die *Sterbeziffer im Deutschen Reich* (unter Mitberücksichtigung der Totgeborenen) auf 27,2, 27,5, 26,9, 27,2, 27,3, 27,4, 27,2, 27,6, im Durchschnitt auf 27,3 ‰, so dass die äusserste Abweichung vom Durchschnitt in minus 0,4 und in plus 0,3 ‰ betragen hat. (1878 betrug die Sterbeziffer 27,8 ‰ und 1887 25,6 ‰.) Der Eindruck ist der einer grossen Stabilität. Man findet aber in diesem Fall $Q = 7,5$. Das andere Beispiel betrifft die *Kriminalitätsziffer*, d. h. die Zahl der wegen Verbrechen und Vergehen Verurteilten auf 1 000 der strafmündigen Zivilbevölkerung. In dem 20-jährigen Zeitraum 1892—1911 hat diese Ziffer für das Deutsche Reich im Durchschnitt 12,3 betragen, wobei man als Minimum 11,9 und als Maximum 12,7 erhält. Der Divergenzkoeffizient ist 13,5.

Also selbst solchen Fällen gegenüber, die den Eindruck grösster Stabilität erwecken, versagt das alte, klassische, Schema einer konstanten Grundwahrscheinlichkeit. Was leistet hier das neue, von Lexis im Jahr 1878 aufgestellte Schema einer serienweise variierenden Grundwahrscheinlichkeit? Es führt die Tatsache, dass σ grösser als u bezw. dass Q grösser als 1 ausfällt, auf die Änderungen der Grundwahrscheinlichkeit zurück. Formel (40) in Verbindung mit Formel (47) bezw. (48) ergibt:

(50) $$\mathfrak{E}(\sigma^2) = u^2 + w^2,$$

und so erscheint die erwartungsmässige mittlere Schwankung als erzeugt durch die kombinierte Wirkung der zufälligen Ursachen auf der einen Seite und des Wechsels der für die betreffende Massenerscheinung massgebenden allgemeinen Bedingungen des Geschehens auf der anderen Seite. Lexis nennt dementsprechend u die *unwesentliche* und w die *wesentliche Schwankungskomponente.* (Ich sehe jetzt davon ab, dass bei ihm in der betreffenden Formel $\frac{z\sigma^2}{z-1}$ an Stelle von σ^2 und $\frac{zu^2}{z-1}$ an Stelle von u^2 steht.)

Im Gegensatz zu der unwesentlichen Schwankungskomponente kann die wesentliche Schwankungskomponente nur aus der Kenntnis von σ heraus bestimmt werden, indem man nämlich von dem Wert σ^2 den Wert u^2 in Abzug bringt und aus der so erhaltenen Differenz die Quadratwurzel zieht. Dieser Umstand bringt es mit sich, dass Vergleiche zwischen Theorie und Erfahrung, wie sie das Schema einer konstanten Grundwahrscheinlichkeit gestattete, eine einschneidende Modifikation erfahren, wenn man sich auf den Boden des Schemas einer serienweise variierenden Grundwahrscheinlichkeit stellt. Während nämlich dort Übereinstimmung oder Widerspruch zwischen einem statistischen Ergebnis und der Wahrscheinlichkeitsrechnung angenommen wurde, je nachdem zwei nach ganz verschiedenen Methoden berechnete Werte merklich zusammenfielen oder von einander abwichen, würde hier, möchte man meinen, die blosse Tatsache, dass der Wert σ den Wert u übertrifft, einerlei in welchem Masse, schon als Bestätigung der Theorie gelten. Wenn dem so wäre, so wäre die Frage angebracht, ob das neue Schema nicht hart an jene Grenze stosse, wo eine theoretische Konstruktion Wert und Interesse dadurch einbüsst, dass ihr eine Fassung gegeben wird, die ihres allzu allgemeinen und unbestimmten Charakters wegen auf jede oder so gut wie jede Gestaltung der Wirklichkeit passt. Denn in der Tat: widerlegt werden könnte das Schema einer serienweise variierenden Grundwahrscheinlichkeit nur durch Feststellung unternormaler Dispersion, während sich jede statistische Reihe mit der Charakteristik $\sigma > u$ bezw.

$Q > 1$ unter dieses Schema subsumieren liesse. Solche Zweifel, die man etwa in die Worte fassen könnte »Eine Hypothese, die alles erklärt, erklärt nichts«, tauchen in Bezug auf das von Lexis vorgeschlagene Schema naturgemäss auf, aber, wie sich auf dem folgenden ergeben wird, nur um durch eine gründliche Prüfung des Sachverhalts zerstreut zu werden. Lexis selbst hat den hier einzuschlagenden Weg gewiesen.

Dieser Weg nimmt seinen Ausgang von der von mir bereits hervorgehobenen Tatsache, dass die wesentliche Schwankungskomponente von der Grundzahl (s) nicht abhängt, während die unwesentliche Schwankungskomponente der Quadratwurzel aus der Grundzahl umgekehrt proportional ist. Demnach haben die beiden Komponenten an der Gesamtschwankung, die sie erzeugen, bei irgendwelchen gegebenen Werten von p_k einen verschiedenen Anteil, je nachdem die Grundzahl grösser oder kleiner ist. Nimmt die Grundzahl zu, so tritt w immer mehr hervor, nimmt die Grundzahl ab, so fällt w immer weniger ins Gewicht. Der Quotient Q als Verhältnis von σ zu u muss sich aus diesem Grunde erwartungsgemäss um so höher stellen je grösser und um so niedriger je kleiner die Grundzahl ist. Würde sich u nach Formel (47) bestimmen lassen, so ergäbe sich in aller Strenge aus (50) auf der Grundlage von (47) und (49)

$$(51) \qquad \mathfrak{E}(Q^2) = 1 + \frac{z s w^2}{(z-1) p q}.$$

Diese Formel kann man aber auch auf den Fall unbedenklich anwenden, wo (48) an Stelle von (47) tritt, weil unter der Bedingung, dass s und spq grosse Zahlen sind, was hier vorausgesetzt wird, die Differenz zwischen pq und $y(1-y)$ erwartungsgemäss verschwindend klein ist. Gestützt auf diesen Zusammenhang zwischen Q und s, muss man erwarten, dass sich Q durch Einschränkung des Beobachtungsfeldes entsprechend reduzieren, ja der Einheit beliebig nahe bringen lässt. Lexis hat gezeigt, dass dies in der Tat zutrifft, dass wenn man z. B. statt eines ganzen Landes die einzelnen Provinzen oder Verwaltungsbezirke dieses Landes ins Auge fasst, Werte von Q herauskommen, die sich unter Umständen kaum noch von 1 unterscheiden, und gerade darin erblickte er eine

empirische Bestätigung, seines Schemas. Später hat namentlich J. H. Peek in seinem viel beachteten Artikel über »Das Problem vom Risiko in der Lebensversicherung»[1] speziell für den zeitlichen Verlauf der Sterblichkeit ähnliche Ergebnisse zutage gefördert. Aber sowohl Lexis selbst wie die anderen begnügten sich dabei mit der Feststellung, dass Q bei kleinen Grundzahlen wesentlich niedriger ausfällt als bei grossen bezw. der 1 nahe kommt, ohne genauer zu prüfen, ob die in Frage stehende Reduktion des Wertes von Q in dem nach der Theorie zu erwartenden Masse erfolgt.

Man betrachte z. B. die allgemeine Sterbeziffer im Deutschen Reich im Jahrzehnt 1901—1910. Die Sterbeziffer stellt sich hier auf 19,7 ‰, die mittlere Bevölkerung auf 60,737 Millionen, der Divergenzkoeffizient Q auf 82,5. Demgegenüber betrug in der preussischen Provinz Sachsen bei einer gleich hohen Sterbeziffer (19,7 ‰) die mittlere Bevölkerung 2,975 Millionen. Der zu erwartende Wert von Q für die Provinz Sachsen wäre also der Formel (51) zufolge aus

$$\sqrt{1 + \frac{2{,}975}{60{,}737}\{(82{,}5)^2 - 1\}}$$

zu bestimmen. Man findet 18,3. In Wirklichkeit stellt sich Q für Sachsen auf 17,3. Im Fürstentum Reuss j. L. war die mittlere Bevölkerung 0,146 Millionen, die Sterbeziffer 20,2 ‰. Eine analoge Berechnung ergiebt hier für Q einen erwartungsmässigen Wert 4,0 gegenüber einen wirklichen Wert 5,4. In dem einen Fall hat also die Verringerung von Q beim Übergang vom Reichsgebiet zu einem Bestandteil desselben die Erwartung etwas übertroffen, in dem anderen Fall ist die Verringerung, wenn auch unbetrachtlich, hinter der Erwartung zurückgeblieben.

Wäre man berechtigt, dieses Beispiel für typisch zu halten, so wäre damit nicht nur die Lexissche Auffassung bestätigt, wonach beim Übergang von der Totalmasse zu den Partialmassen Q die Tendenz hat, nach Massgabe der Formel (51), in welcher w als konstant angesehen wird, abzunehmen, sondern man hätte damit zugleich eine ganz bestimmte Antwort auf die Frage von den Beziehungen zwischen Homogeneität

[1] Zeitschrift für Versicherungs-Recht u. -Wissenschaft. Bd. V. Strassburg i. E. 1899.

und Stabilität gefunden. Die Partialmassen würden, wenn man von den Unterschieden absieht, die zwischen ihnen in Bezug auf den Wert von p bestehen können, niedrigere Werte von Q und höhere Werte von σ als die Totalmasse aufweisen, und zwar in dem Masse als sich der Umstand geltend macht, dass den Partialmassen kleinere Grundzahlen als der Totalmasse entsprechen. Hingegen bliebe der andere Umstand, dass die ersteren im Vergleich zur letzteren homogener sind[1], wirkungslos. Es kommt also, sofern man sich auf den Boden des Schemas einer serienweise variierenden Grundwahrscheinlichkeit stellt, bei dem Problem des Zusammenhanges zwischen Homogeneität und Stabilität vor allem darauf an, ob die statistische Wirklichkeit den Lexisschen Erwartungen hinsichtlich der Q-Werte Recht gibt. Mit dieser Vorfrage muss daher die von mir eingangs angekündigte empirische Untersuchung beginnen.

Hierbei ist es mit willkürlich herausgegriffenen Partialmassen nicht getan, sondern man muss eine grössere Zahl oder die Gesamtzahl der in Frage kommenden Partialmassen berücksichtigen, weil der Umstand nicht ignoriert werden darf, dass die Q-Werte mit zufälligen Fehlern behaftet sind. Um diesem Moment einigermassen Rechnung tragen zu können, empfiehlt es sich, den mittleren Fehler von Q zu bestimmen. Dies kann in folgender Weise geschehen.

Man hat wegen (7):

$$\frac{1}{z}\sum_{1}^{z}{}_k (y_k - y)^2 = \frac{1}{z}\sum_{1}^{z}{}_k (y_k - p)^2 - (y - p)^2$$

oder

$$\frac{1}{z}\sum_{1}^{z}{}_k a_k^2 = \frac{1}{z}\sum_{1}^{z}{}_k b_k^2 - f^2$$

oder noch, unter Benützung der alten Bezeichnungen σ und f und der neu einzuführenden Bezeichnung

$$\frac{1}{z}\sum_{1}^{z}{}_k b_k^2 = \iota^2, \tag{52}$$

$$\sigma^2 = \iota^2 - f^2$$

[1] Dies kann als gegeben angenommen werden, sofern, wie auch bei Lexis, die Ausscheidung der Partialmassen aus der Totalmasse nach einem nicht-zufälligen Gesichtspunkt erfolgt. Näheres darüber weiter unten.

und demgemäss

(53) $\mathfrak{M}^2(\sigma^2) = \mathfrak{M}^2(r^2) - 2\mathfrak{E}(r^2 f^2) + 2\mathfrak{E}(r^2)\mathfrak{E}(f^2) + \mathfrak{M}^2(f^2).$

Laut Formel (43) ist

$$b_k^4 = d_k^4 + 4d_k^3 e_k + 6d_k^2 e_k^2 + 4d_k e_k^3 + e_k^4.$$

Hieraus folgt, wenn man die Formeln (30) und (31) heranzieht und zugleich entsprechend der Annahme, dass s und spq grosse Zahlen sind,

(54) $$\mathfrak{E}(d_k^3) = 0$$

sowie

(55) $$\mathfrak{E}(d_k^4) = \frac{3\,p_k^2 q_k^2}{s^2}$$

setzt:

$$\mathfrak{E}(b_k^4) = \frac{3\,p_k^2 q_k^2}{s^2} + \frac{6\,p_k q_k e_k^2}{s} + e_k^4$$

und wegen (44)

$$\mathfrak{M}^2(b_k^2) = \frac{2\,p_k^2 q_k^2}{s^2} + \frac{4\,p_k q_k e_k^2}{s},$$

was alsdann, mit Rücksicht auf (52), zu

(56) $$\mathfrak{M}^2(r^2) = \frac{2}{z^2 s^2} \sum_1^z{}^k p_k^2 q_k^2 + \frac{4}{z^2 s} \sum_1^z{}^k p_k q_k e_k^2$$

führt.

Man findet ferner, auf (32) und zugleich wiederum auf (43) zurückgreifend,

$$b_k^2 f^2 = \frac{1}{z^2} (d_k^2 + 2d_k e_k + e_k^2) \left(\sum_1^z{}^k d_k\right)^2,$$

somit

$$\mathfrak{E}(b_k^2 f^2) = \frac{1}{z^2} \left\{ \frac{3\,p_k^2 q_k^2}{s^2} + \frac{p_k q_k}{s} \left[\frac{\sum_1^z{}^k p_k q_k}{s} - \frac{p_k q_k}{s} \right] + \frac{e_k^2 \sum_1^z{}^k p_k q_k}{s} \right\}$$

oder auch

$$\mathfrak{E}(b_k^2 f^2) = \frac{2\, p_k^2 q_k^2}{z^2 s^2} + \frac{p_k q_k \sum\limits_1^z{}_k\, p_k q_k}{z^2 s^2} + \frac{e_k^2 \sum\limits_1^z{}_k\, p_k q_k}{z^2 s}$$

und folglich, mit Rücksicht auf (52):

$$(57)\quad \mathfrak{E}(t^2 f^2) = \frac{2 \sum\limits_1^z{}_k\, p_k^2 q_k^2}{z^3 s^2} + \frac{\left(\sum\limits_1^z{}_k\, p_k q_k\right)^2}{z^3 s^2} + \frac{\sum\limits_1^z{}_k\, p_k q_k \cdot \sum\limits_1^z{}_k\, e_k^2}{z^3 s}.$$

Weiterhin ist wegen (26), (45) und (52)

$$(58)\quad \mathfrak{E}(t^2) = \frac{pq}{s} + \frac{s-1}{s} \sum_1^z{}_k\, e_k,$$

und nach Analogie von (55) ist, mit Rücksicht auf (34),

$$\mathfrak{E}(f^4) = \frac{3\left(\sum\limits_1^z{}_k\, p_k q_k\right)^2}{z^4 s^2},$$

mithin

$$(59)\quad \mathfrak{M}^2(f^2) = \frac{2\left(\sum\limits_1^z{}_k\, p_k q_k\right)^2}{z^4 s^2}$$

zu setzen.

Vermöge der soeben abgeleiteten Formeln (56), (57), (58) und (59) und der alten Formel (34) geht nunmehr (53) in

$$(60)\quad \mathfrak{M}^2(\sigma^2) = \frac{2}{z^4 s^2}\left\{ z(z-2) \sum_1^z{}_k\, p_k^2 q_k^2 + \left(\sum_1^z{}_k\, p_k q_k\right)^2 + 2 z^2 s \sum_1^z{}_k\, p_k q_k e_k^2 \right\}$$

über.

Dieser Ausdruck lässt sich noch wie folgt umformen. Aus

$$p_k^2 q_k^2 = (p + e_k)^2 (q - e_k)^2$$

ergibt sich

$$p_k^2 q_k^2 = p^2 q^2 - 2pq(p-q)e_k + (1 - 6pq)e_k^2 + 2(p-q)e_k^3 + e_k^4,$$

woraus unter Anwendung der abkürzenden Bezeichnung

(61) $$\frac{1}{z}\sum_1^z {}^k e_k^m = \varepsilon_m,$$

die Formel

(62) $$\frac{1}{z}\sum_1^z {}^k p_k^2 q_k^2 = p^2q^2 + (1-6pq)\,\varepsilon_2 + 2(p-q)\,\varepsilon_3 + \varepsilon_4$$

hervorgeht. Man hat zugleich wegen (26) und (61)

(63) $$\varepsilon_2 = w^2,$$

somit wegen (37)

(64) $$\frac{1}{z}\sum_1^z {}^k p_k q_k = pq - \varepsilon_2,$$

und aus

$$p_k q_k e_k^2 = (p + e_k)(q - e_k)\, e_k^2$$

erhält man:

$$p_k q_k e_k^2 = pq e_k^2 - (p-q)\, e_k^3 - e_k^4,$$

somit

(65) $$\frac{1}{z}\sum_1^z {}^k p_k q_k e_k^2 = pq\varepsilon_2 - (p-q)\,\varepsilon_3 - \varepsilon_4.$$

Nimmt man in (60) die Substitutionen vor, auf welche die Formeln (62), (64) und (65) hinweisen, so kommt man zunächst auf:

$$\mathfrak{M}^2(\sigma^2) = \frac{2}{z^2s^2}\{(z-1)\,p^2q^2 + [2(zs-3z+5)\,pq + z - 2]\,\varepsilon_2$$
$$- 2(zs-z+2)(p-q)\,\varepsilon_3 - (2zs-z+2)\,\varepsilon_4 + \varepsilon_2^2\},$$

sodann mit Rücksicht darauf, dass s und spq als grosse Zahlen gedacht sind, auf

(66) $$\mathfrak{M}^2(\sigma^2) = \frac{2(z-1)\,p^2q^2}{z^2s^2} + \frac{4}{zs}\{pq\varepsilon_2 - (p-q)\,\varepsilon_3 - \varepsilon_4\}$$

und schliesslich, unter Vernachlässigung von ε_3 und ε_4 und unter Mitberücksichtigung von (63), auf:

(67) $$\mathfrak{M}^2(\sigma^2) = \frac{2pq}{z^2s^2}\{(z-1)\,pq + 2zsw^2\}.$$

Sofern man von dem Unterschied zwischen (47) und (48) auch hier absieht[1], was zugleich bedeutet, dass man u in (49) als eine vom Zufall unabhängige Grösse betrachtet, so erhält man aus (67)

$$(68) \qquad \mathfrak{M}^2(Q^2) = \frac{2}{(z-1)^2\,pq}\left\{(z-1)\,pq + 2zsw^2\right\},$$

somit wegen (51)

$$(69) \qquad \mathfrak{M}^2(Q^2) = \frac{2}{z-1}\left\{2\,\mathfrak{E}(Q^2) - 1\right\}$$

bezw.

$$(70) \qquad \mathfrak{M}(Q^2) = \sqrt{\frac{2}{z-1}\left\{2\,\mathfrak{E}(Q^2) - 1\right\}},$$

woraus nach einer bekannten Näherungsmethode

$$(71) \qquad \mathfrak{M}(Q) = \sqrt{\frac{2\,\mathfrak{E}(Q^2) - 1}{2(z-1)\,\mathfrak{E}(Q^2)}}$$

folgt.[2] Schreibt man (71) in der Form

$$\mathfrak{M}(Q) = \sqrt{\frac{1}{2(z-1)}\left\{2 - \frac{1}{\mathfrak{E}(Q^2)}\right\}},$$

so ergeben sich für $\mathfrak{M}(Q)$ als untere Grenze $\frac{1}{\sqrt{2(z-1)}}$ und als obere Grenze $\frac{1}{\sqrt{z-1}}$. Dementsprechend kann man sich, in dem Fall, wo $\mathfrak{E}(Q^2)$ nur wenig von 1 verschieden ist, der Formel

$$(72) \qquad \mathfrak{M}(Q) = \frac{1}{\sqrt{2(z-1)}}$$

[1] Man vergleiche hierzu meine Aufsätze: 1) »Über den Präzisionsgrad des Divergenzkoeffizienten« in den Mitteilungen des Verbandes der österr. und ungar. Versicherungstechniker, Heft V, 1901, und 2) »Über den mittleren Fehler des zum Quadrat erhobenen Divergenzkoeffizienten«, in dem Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Jahrgang 1918 (soll demnächst erscheinen). Es lässt sich auch für den Fall einer serienweise variierenden Grundwahrscheinlichkeit leicht zeigen, dass der mittlere Fehler von u^2 demjenigen von σ^2 gegenüber bei grossem s nicht ins Gewicht fällt.

[2] Mit Formel (71) lässt sich die entsprechende Formel CHARLIER's a. a. O., Band 8, Nr. 4, S. 23 Fussn. nicht in Einklang bringen. Charlier teilt nicht mit, wie er auf seine Formel gekommen ist.

und bei hinreichend grossen Werten von $\mathfrak{S}(Q^2)$ der Formel

(73) $$\mathfrak{M}(Q) = \frac{1}{\sqrt{z-1}}$$

bedienen.

Mit Hilfe von (71) lässt sich — um es hier einzuschalten — $\mathfrak{S}(Q)$ näherungsweise bestimmen, und zwar auf der Grundlage der Beziehung

$$\mathfrak{S}(Q) = \sqrt{\mathfrak{S}(Q^2) - \mathfrak{M}^2(Q)},$$

die zu

(74) $$\mathfrak{S}(Q) = \sqrt{\mathfrak{S}(Q^2)\left\{1 - \frac{1}{(z-1)\,\mathfrak{S}(Q^2)} + \frac{1}{2(z-1)\,\mathfrak{S}^2(Q^2)}\right\}}$$

und unter Vernachlässigung der Glieder, die die zweiten und höheren Potenzen von $z-1$ im Nenner enthalten, zu

(75) $$\mathfrak{S}(Q) = \sqrt{\mathfrak{S}(Q^2)}\left\{1 - \frac{1}{2(z-1)\,\mathfrak{S}(Q^2)} + \frac{1}{4(z-1)\,\mathfrak{S}^2(Q^2)}\right\}$$

führt, so dass man berechtigt ist, in dem Fall, wo $\mathfrak{S}(Q^2)$ nur wenig über 1 hinausgeht,

(76) $$\mathfrak{S}(Q) = \left\{1 - \frac{1}{4(z-1)}\right\}\sqrt{\mathfrak{S}(Q^2)}$$

und bei hinreichend grossen Werten von $\mathfrak{S}(Q^2)$

(77) $$\mathfrak{S}(Q) = \sqrt{\mathfrak{S}(Q^2)}$$

zu setzen.

Stellt man sich zur Aufgabe, zu prüfen, ob in einem gegebenen Fall die Q-Werte, welche die betreffenden Partialmassen aufweisen, sich zu dem für die Totalmasse festgestellten Werte von Q so verhalten, wie es das Schema der serienweise variierenden Grundwahrscheinlichkeit nach Lexis erwarten lässt, so ist noch mit der Tatsache zu rechnen, dass die Unterschiede zwischen den auf die Partialmassen sich beziehenden Werten von y in der Regel keinen zufälligen Charakter tragen. Man hat vielmehr anzunehmen, dass jedem dieser Werte eine andere mittlere Grundwahrscheinlichkeit entspricht.

Es sei mit i die Ordnungsnummer der betreffenden Partialmasse und mit k, nach wie vor, die Ordnungsnummer des betreffenden Zeitabschnitts bezeichnet. Dementsprechend sollen die Grössen s, p, q, y, w, σ, u, Q, y_k, a_k und e_k, die sich auf die i:te Partialmasse beziehen, durch s_i, p_i, q_i, y_i, w_i, σ_i, u_i, Q_i, $y_{i,k}$, $a_{i,k}$ und $e_{i,k}$ dargestellt werden. Zerfällt die Totalmasse in n Partialmassen, so nimmt i, sofern es sich um die Kennzeichnung der letzteren handelt, alle ganzzahligen Werte von 1 bis n an. Man verabrede sich ausserdem $i = 0$ zur Charakteristik der Totalmasse zu machen. Demnach bestehen die Beziehungen:

(78) $$s_0 = \sum_1^n {}_i\, s_i ,$$

(79) $$p_0 = \frac{1}{s_0} \sum_1^n {}_i\, s_i p_i ,$$

(80) $$y_0 = \frac{1}{s_0} \sum_1^n {}_i\, s_i y_i ,$$

(81) $$p_{0,k} = \frac{1}{s_0} \sum_1^n {}_i\, s_i p_{i,k} ,$$

(82) $$y_{0,k} = \frac{1}{s_0} \sum_1^n {}_i\, s_i y_{i,k} ,$$

(83) $$a_{0,k} = \frac{1}{s_0} \sum_1^n {}_i\, s_i a_{i,k}$$

und

(84) $$e_{0,k} = \frac{1}{s_0} \sum_1^n {}_i\, s_i e_{i,k} .$$

Bezeichnet man noch mit $x_{i,k}$ die auf die einzelnen Zeitabschnitte sich beziehenden, mit x_i die mittleren und mit m_i die erwartungsmässigen Ereigniszahlen, so ist

(85) $$x_{i,k} = s_i y_{i,k} ,$$

(86) $$x_i = s_i y_i .$$

(87) $$m_i = s_i p_i$$

und

(88) $$\mathfrak{E}(x_i) = m_i.$$

Der Umstand nun, dass sich p_i mit i ändert, legt es nahe, das gleiche in Bezug auf w_i anzunehmen und die Frage, ob das Mass des Zurückbleibens der Werte Q_i hinter Q_0 dem von Lexis eingenommenen Standpunkt entspricht, in der Voraussetzung zu behandeln, dass nicht $w_i = w_0$, sondern dass $w_i : p_i = w_0 : p_0$.[1] Bildet man den Quotienten

(89) $$\beta_i = \frac{w_i}{p_i},$$

und nennt ihn die *relative wesentliche Schwankungskomponente* im Unterschied von der *absoluten* wesentlichen Schwankungskomponente w_i, so wird man sagen können, dass bei der vorzunehmenden Gegenüberstellung von Theorie und Erfahrung die relative wesentliche Schwankungskomponente als gleich hoch in jeder der n Partialmassen und in der Totalmasse gedacht werden soll. Formel (51), die, auf ein bestimmtes i bezogen, die Gestalt

(90) $$\mathfrak{E}(Q_i^2) = 1 + \frac{z s_i w_i^2}{(z-1) p_i q_i}$$

annimmt, geht somit vermöge der aus (87) und (89) sich ergebenden Substitutionen $s_i = m_i : p_i$ und $w_i = \beta_i p_i$ in

(91) $$\mathfrak{E}(Q_i^2) = 1 + \frac{z m_i \beta_i^2}{(z-1) q_i}$$

über. Hieraus folgt:

(92) $$\frac{\mathfrak{E}(Q_i^2) - 1}{\mathfrak{E}(Q_0^2) - 1} = \frac{m_i}{m_0} \cdot \frac{\beta_i^2}{\beta_0^2} \cdot \frac{q_0}{q_i},$$

und wenn man den Wert von Q_i, den man dem Lexisschen Standpunkt gemäss auf der Grundlage eines gegebenen Wertes Q_0 zu erwarten hat, mit $Q_{i,L}$ bezeichnet, so ergäbe sich aus (92) mit Rücksicht auf die Annahme $\beta_i = \beta_0$ und unter

[1] Von Lexis nur angedeutet. A. a. O., S. 173.

Substituierung der empirischen Werte x_i und $1-y_i$ für m_i und q_i:

$$\frac{Q_{i,L}^2 - 1}{Q_0^2 - 1} = \frac{x_i}{x_0} \cdot \frac{1-y_0}{1-y_i}, \tag{93}$$

oder auch in dem (häufig vorkommenden) Fall, wo die Grössen $1-y_i$ nicht merklich von 1 verschieden sind, hinreichend genau

$$\frac{Q_{i,L}^2 - 1}{Q_0^2 - 1} = \frac{x_i}{x_0}, \tag{94}$$

mithin

$$Q_{i,L}^2 = 1 + \frac{x_i}{x_0}(Q_0^2 - 1).$$

Durch Summierung letzterer Gleichung kommt man aber auf

$$\sum_1^n {}_i\, Q_{i,L}^2 = n + Q_0^2 - 1 \tag{95}$$

oder

$$\frac{1}{n}\sum_1^n {}_i\, Q_{i,L}^2 = 1 + \frac{Q_0^2 - 1}{n}. \tag{96}$$

Im bisherigen sind σ_i und u_i nur in der Weise in Beziehung zu einander gesetzt worden, dass der Quotient $\sigma_i : u_i$ gebildet worden ist. Es empfiehlt sich aber, mit Rücksicht auf die nachfolgenden Darlegungen, auch noch die Differenz $\sigma_i^2 - u_i^2$ ins Auge zu fassen. Führt man die Bezeichnung

$$\sigma_i^2 - u_i^2 = v_i^2 \tag{97}$$

ein, so ergeben sich die Beziehungen

$$v_i^2 = u_i^2(Q_i^2 - 1), \tag{98}$$

$$v_i = u_i\sqrt{Q_i^2 - 1}, \tag{99}$$

$$v_i^2 = \frac{(z-1)\, y_i(1-y_i)}{z\, s_i}(Q_i^2 - 1), \tag{100}$$

$$s_i v_i^2 = \frac{z-1}{z} \cdot x_i(1-y_i)(Q_i^2 - 1). \tag{101}$$

Man hat zugleich wegen (50)

$$\mathfrak{E}(v_i^2) = w_i^2, \tag{102}$$

und mit derselben Begründung, wie Formel (68), lässt sich die Formel

$$\mathfrak{M}^2(v_i^2) = \frac{2\,p_i q_i}{z^2 s_i^2}\{(z-1)\,p_i q_i + 2 z s_i w_i^2\} \tag{103}$$

oder die wegen (87) und (89) mit ihr identische Formel

$$\mathfrak{M}^2(v_i^2) = \frac{2\,p_i^2\,q_i}{z^2\,s_i^2}\{(z-1)\,q_i + 2 z m_i \beta_i^2\} \tag{104}$$

aufstellen. Bildet man noch den Quotienten

$$\alpha_i^2 = \frac{v_i^2}{y_i^2}, \tag{105}$$

so findet man:

$$s_i^2\,v_i^2 = x_i^2\,\alpha_i^2, \tag{106}$$

mithin wegen (101)

$$x_i \alpha_i^2 = \frac{z-1}{z}(1-y_i)(Q_i^2-1), \tag{107}$$

sowie

$$x_0 \alpha_0^2 = \frac{z-1}{z}(1-y_0)(Q_0^2-1) \tag{108}$$

und folglich

$$\frac{Q_i^2-1}{Q_0^2-1} = \frac{x_i}{x_0} \cdot \frac{1-y_0}{1-y_i} \cdot \frac{\alpha_i^2}{\alpha_0^2}. \tag{109}$$

Letztere Formel in Verbindung mit Formel (93) ergibt

$$\frac{Q_i^2-1}{Q_{i,L}^2-1} = \frac{\alpha_i^2}{\alpha_0^2}, \tag{110}$$

woraus zu ersehen ist, dass wenn $Q_0 > 1$ und daher auch $Q_{i,L} > 1$ und $\alpha_0 > 0$, Q_i bei $\alpha_i^2 > \alpha_0^2$ grösser und bei $\alpha_i^2 < \alpha_0^2$ kleiner als $Q_{i,L}$ ausfallen muss.

Sofern man bei hinreichend grossem s_i und nicht allzu kleinem z berechtigt ist, von dem Unterschied zwischen y_i

und p_i abzusehen, lässt sich wegen (89) und (105) aus (102) die Formel

$$(111)\qquad \mathfrak{E}(\alpha_i) = \beta_i$$

und aus (104) die Formel

$$(112)\qquad \mathfrak{M}^2(\alpha_i^2) = \frac{2q_i}{z^2 m_i}\{(z-1)q_i + 2zm_i\beta_i\}$$

herleiten.

Weicht aber q_i bezw. y_i nicht merklich von 1 ab, so kann die der Formel (48) entsprechende Formel

$$(113)\qquad u_i = \sqrt{\frac{z-1}{z}\cdot\frac{y_i(1-y_i)}{s_i}}$$

durch

$$(114)\qquad u_i = \sqrt{\frac{(z-1)y_i}{z s_i}}$$

und können die Formeln (101), (107), (109) und (112) durch

$$(115)\qquad s_i^2 v_i^2 = \frac{z-1}{z}\cdot x_i(Q_i^2-1),$$

$$(116)\qquad x_i\alpha_i^2 = \frac{z-1}{z}(Q_i^2-1),$$

$$(117)\qquad \frac{Q_i^2-1}{Q_0^2-1} = \frac{x_i}{x_0}\cdot\frac{\alpha_i^2}{\alpha_0^2}$$

und

$$(118)\qquad \mathfrak{M}^2(\alpha_i^2) = \frac{2}{z^2 m_i}(z-1+2zm_i\beta_i)$$

ersetzt werden.

Es soll nunmehr auf der Grundlage der vorstehenden Darlegungen allgemeinen Charakters an einem konkreten Fall, nämlich an den Schwankungen der *Selbstmordziffer im Deutschen Reich in den Jahren 1902—1911*, untersucht werden, ob und bis zu welchem Grade sich hier die Erwartungen bezüglich der Werte Q_i realisieren. Tabelle 1 enthält in den Spalten 3 bis 12 unter $10^6 y_{i,k}$ die Werte der Selbstmordziffer, wor-

unter die Zahl der Selbstmorde auf 1 000 000 Einwohner verstanden wird, für die Kalenderjahre 1902—1911.[1] Die in Spalte 13 derselben Tabelle auftretenden Werte $10^6 y_i$ stellen einfache arithmetische Durchschnitte von je 10 Werten $10^6 y_{i,k}$ dar, wie es der Formel (7) bezw. der — auch bei der weiteren rechnerischen Verarbeitung der Werte $y_{i,k}$ festzuhaltenden — Fiktion einer konstanten Grundzahl entspricht. Spalte 14 gibt die Einwohnerzahlen in Millionen an. Diese Zahlen sind nach der Formel $s_i = s'_i + 0{,}22\,(s''_i - s'_i)$ bestimmt worden, worin s'_i und s''_i die durch die Volkszählungen vom 2. Dezember 1905 bezw. vom 2. Dezember 1910 festgestellten Einwohnerzahlen bedeuten und der Faktor 0,22 darin begründet ist, dass zwischen dem Zeitpunkt, auf den sich s'_i bezieht, und der Mitte des in Frage stehenden 10-jährigen Zeitraums 13 Monate liegen, während der Zeitabstand zwischen den beiden Volkszählungen 60 Monate beträgt (13 : 60 = 0,22). Weder durch diese Interpolation, noch durch den Umstand, dass die Selbstmordziffern des ganzen zehnjährigen Zeitraums durch Berechnung einfacher (statt gewogener) Durchschnitte gewonnen worden sind, können irgendwelche systematische Fehler von merklicher Höhe entstanden sein. Dies wird erhärtet durch die Tatsache, dass der nach der Formel $x_0 = s_0 y_0$ errechnete Wert 13 173 von x_0 (Spalte 15, $i = 0$) mit dem wirklichen Jahresdurchschnitt der Zahl der Selbstmorde in dem in Frage stehenden Zeitraum genau übereinstimmt: die absolute Zahl der Selbstmorde im Deutschen Reich 1902—1911 betrug 131 725. Es möge noch hinzugefügt werden, dass die Summe der nach Formel (86) ermittelten 40 Zahlen x_i für $i = 1$ bis 40 sich auf 13 166 stellt, also fast vollständig mit x_0 zusammenfällt. Die 40 in Spalte 2 für $i = 1$ bis 40 aufgeführten Teilgebiete sind: 1) die 12 preussischen Provinzen, darunter Brandenburg ohne Berlin, ferner Berlin und das Land Hohenzollern, somit im ganzen 14 preussische Gebiete, 2) Bayern rechts des Rheins und Bayern links des Rheins, somit 2 bayerische Gebiete, 3) 23 weitere ungeteilte Bundesstaaten und 4) das Reichsland Elsass-Lothringen. Diese 40 Teilgebiete sind in der

[1] Diese Werte sowie die Einwohnerzahlen, von denen weiter im Text die Rede ist, sind dem Statistischen Jahrbuch für das Deutsche Reich entnommen.

Tabelle 1.

Selbstmordziffer im Deutschen Reich 1902–1911.

i	Gebiet	$10^6 y_{i,1}$	$10^6 y_{i,2}$	$10^6 y_{i,3}$	$10^6 y_{i,4}$	$10^6 y_{i,5}$	$10^6 y_{i,6}$	$10^6 y_{i,7}$	$10^6 y_{i,8}$	$10^6 y_{i,9}$	$10^6 y_{i,10}$	$10^6 y_i$	$10^{-6} s_i$	x_i
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	Deutsches Reich .	214	217	210	213	204	206	219	223	216	217	213,9	61,584	13173
1	Kgr. Sachsen	330	321	310	331	320	295	313	320	329	315	318,4	4,574	1453
2	Brandenburg	316	313	300	298	303	325	320	350	315	330	317,0	3,655	1153
3	Schlesien	234	247	231	236	228	214	221	233	226	216	228,6	5,005	1145
4	Prov. Sachsen	323	342	320	296	297	300	317	322	300	325	314,2	3,003	942
5	Rheinland	116	123	127	133	116	121	144	131	129	136	127,6	6,587	844
6	Bayern r. d. Rh.	141	146	135	132	131	143	146	149	148	159	143,0	5,707	817
7	Berlin	312	315	310	349	321	323	345	327	327	350	327,4	2,047	672
8	Hannover	220	222	211	217	200	215	231	216	243	221	219,6	2,799	616
9	Schl.-Holstein	316	305	299	295	290	303	341	299	334	318	310,0	1,530	474
10	Westfalen	123	125	110	135	103	120	130	143	120	122	123,1	3,730	459
11	Hessen-Nassau	213	219	201	221	209	210	217	217	215	231	215,3	2,103	452
12	Baden	214	222	203	222	215	193	231	221	225	203	214,9	2,040	439
13	Württemberg	163	181	171	190	166	162	179	202	176	180	177,0	2,332	412
14	Hamburg	374	393	378	336	324	360	399	360	371	351	364,6	0,906	331
15	Pommern	187	185	172	182	190	172	192	180	178	163	180,1	1,691	304
16	Hessen	267	256	249	240	266	241	238	236	252	235	248,0	1,225	303
17	Ostpreussen	147	144	151	143	138	138	151	156	143	153	146,4	2,037	298
18	Elsass-Lothringen	139	134	148	119	146	130	133	152	147	143	139,1	1,828	254
19	Westpreussen	137	118	142	136	114	137	125	137	111	123	128,0	1,655	212
20	Posen	94	102	99	88	78	102	102	123	97	90	97,5	2,012	197
21	Bayern l. d. Rh.	170	173	164	153	184	201	199	204	185	183	181,6	0,897	163
22	Braunschweig	263	326	302	324	346	312	304	325	346	362	321,0	0,488	157
23	Meckl.-Schwerin	251	219	221	184	191	170	200	207	191	243	207,7	0,628	131
24	Oldenburg	296	260	350	304	246	282	249	303	267	279	283,6	0,449	128
25	Sachsen-Weimar	340	283	362	306	245	280	316	325	314	291	306,2	0,394	121
26	Anhalt	352	326	344	317	367	318	315	386	359	353	343,7	0,329	113
27	Sachsen-Cob.-Gotha	461	473	418	381	340	381	406	525	348	457	419,0	0,245	103
28	Bremen	266	373	344	346	378	324	419	405	415	326	359,6	0,271	98
29	Sachsen-Meiningen	297	281	278	288	229	276	294	294	338	307	288,2	0,271	78
30	Sachsen-Altenburg	391	396	415	370	312	322	388	406	325	267	359,2	0,209	75

i	Gebiet	$10^6 y_{i,1}$	$10^6 y_{i,2}$	$10^6 y_{i,3}$	$10^6 y_{i,4}$	$10^6 y_{i,5}$	$10^6 y_{i,6}$	$10^6 y_{i,7}$	$10^6 y_{i,8}$	$10^6 y_{i,9}$	$10^6 y_{i,10}$	$10^6 y_i$	$10^4 s_i$	x_i
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
31	Reuss j. L.	253	408	328	319	365	233	313	365	368	365	331,7	0,147	49
32	Lübeck	249	428	305	333	271	283	304	289	311	307	308,0	0,108	33
33	Meckl.-Strelitz	338	173	346	252	202	279	183	278	273	197	252,1	0,104	26
34	Schwarzb.-Sondersh.	426	398	311	283	315	254	297	147	301	232	296,4	0,086	25
35	Schwarzb.-Rudolst.	201	294	208	259	185	234	222	321	199	287	241,0	0,098	24
36	Lippe	142	105	125	158	178	115	121	180	146	178	144,8	0,147	21
37	Reuss ä. L.	304	230	287	156	212	282	310	268	179	357	258,5	0,071	18
38	Waldeck	86	190	207	220	219	202	168	151	146	97	168,6	0,060	10
39	Hohenzollern	119	178	103	118	88	87	101	201	169	126	129,0	0,069	9
40	Schaumburg-Lippe	91	226	134	178	133	220	152	130	86	214	156,4	0,045	7

Tabelle nach x_i, vom höchsten Wert von x_i bis zum niedrigsten fortschreitend, geordnet.

Tabelle 1 hat das Material für Tabelle 2 geliefert. Die hier auftretenden Werte von σ_i^2, u_i^2, v_i^2, α_i^2 und Q_i^2 bezw. Q_i sind nach den Formeln (6), (114), (97), (105) und (49) berechnet worden; was aber die Werte von α_i anlangt, so sind sie für diejenigen Werte von i, bei denen sie (wegen $\alpha_i^2 < 0$) imaginär werden, nicht mit angeführt worden.

Betrachtet man die Q_i-Werte bei $i = 1$ bis 40, so nimmt man wahr, dass sie zwischen den Grenzen 0,73 als Minimum und 2,03 als Maximum schwanken. Sie bleiben sonach sämtlich hinter Q_0 zurück, wie es den Voraussagungen der Theorie entspricht. Um darüber ins klare zu kommen, ob die Q_i-Werte auch darin der Theorie Genüge leisten, dass sie mit abnehmendem x_i selbst abnehmen, fasse man sie zu 5 gleich zahlreichen Gruppen zusammen und berechne für jede dieser 5 Gruppen gesondert den arithmetischen Durchschnitt sowohl der Werte Q_i wie auch der Werte Q_i^2. Zu den letzteren möge man noch nach Formel

$$(119) \qquad \mathfrak{M}\left(\frac{1}{\nu}\sum_{h\nu-\nu+1}^{h\nu}{}_i\, Q_i^2\right) = \frac{1}{\nu}\sqrt{\frac{2}{z-1}\left(2\sum_{h\nu-\nu+1}^{h\nu}{}_i\, Q_i^2 - \nu\right)}\,.$$

Tabelle 2.

Selbstmordziffer im Deutschen Reich 1902—1911.

i	Gebiet	$10^{12}\sigma_i^2$	$10^{12}u_i^2$	$10^{12}v_i^2$	$10^4 a_i^2$	$100\,a_i$	Q_i	Q_i
1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	Deutsches Reich	30,9	3,1	27,8	6,08	2,46	9,88	3,14
1	Kgr. Sachsen	107,6	62,6	45,0	4,44	2,11	1,72	1,31
2	Brandenburg	219,8	78,1	141,7	14,10	3,76	2,81	1,68
3	Schlesien	88,4	41,1	47,3	9,05	3,01	2,15	1,47
4	Prov. Sachsen	210,0	94,2	115,8	11,73	3,42	2,23	1,49
5	Rheinland	71,6	17,4	54,2	33,29	5,77	4,11	2,03
6	Bayern r. d. Rh.	66,8	22,6	44,2	21,61	4,65	2,96	1,72
7	Berlin	203,9	144,2	59,7	5,55	2,36	1,41	1,19
8	Hannover	118,4	70,6	47,8	9,91	3,15	1,68	1,30
9	Schl.-Holstein	257,8	182,4	75,4	7,85	2,80	1,41	1,19
10	Westfalen	118,5	29,7	88,8	58,46	7,65	3,99	2,00
11	Hessen-Nassau	57,6	92,1	−34,5	−7,44	—	0,63	0,79
12	Baden	126,3	94,8	31,5	6,82	2,61	1,33	1,15
13	Württemberg	140,2	68,3	71,9	22,95	4,79	2,05	1,43
14	Hamburg	499,2	362,2	137,0	10,31	3,21	1,38	1,17
15	Pommern	74,3	95,9	−21,6	−6,66	—	0,77	0,88
16	Hessen	131,2	182,2	−51,0	−8,29	—	0,72	0,85
17	Ostpreussen	34,8	64,8	−30,0	−14,00	—	0,54	0,73
18	Elsass-Lothringen	92,1	68,5	23,6	12,20	3,49	1,34	1,16
19	Westpreussen	112,2	69,6	42,6	26,00	5,10	1,61	1,27
20	Posen	125,2	43,6	81,6	85,84	9,26	2,87	1,69
21	Bayern l. d. Rh.	253,6	182,2	71,4	21,65	4,65	1,39	1,18
22	Braunschweig	707,6	592,0	115,6	11,22	3,35	1,20	1,10
23	Meckl.-Schwerin	602,6	297,7	304,9	70,68	8,41	2,02	1,42
24	Oldenburg	882,2	568,5	313,7	39,00	6,25	1,55	1,25
25	Sachsen-Weimar	985,7	699,4	286,3	30,54	5,53	1,41	1,19
26	Anhalt	523,2	940,2	−417,0	−35,30	—	0,56	0,75
27	Sachsen-Cob.-Gotha	3170,0	1539,1	1630,9	92,90	9,64	2,06	1,44
28	Bremen	2076,2	1194,2	882,0	68,21	8,26	1,74	1,32
29	Sachsen-Meiningen	678,8	957,1	−278,3	−33,51	—	0,71	0,84
30	Sachsen-Altenburg	2189,8	1550,4	639,4	49,56	7,04	1,41	1,19

i	Gebiet	$10^{12}\sigma_i^2$	$10^{12}u_i^2$	$10^{12}v_i^2$	$10^4 a_i^2$	$100 a_i$	Q_i^2	Q_i
1	2	3	4	5	6	7	8	9
31	Reuss j. L.	2692,6	2030,8	661,8	60,15	7,76	1,32	1,15
32	Lübeck	2089,6	2566,6	−477,0	−50,28	—	0,81	0,89
33	Meckl.-Strelitz	3460,5	2181,6	1278,9	201,23	14,19	1,59	1,26
34	Schwarzb.-Sondersh.	5614,4	3101,9	2512,5	285,98	16,91	1,81	1,35
35	Schwarzb.-Rudolst.	1964,8	2213,2	−248,4	−42,77	—	0,89	0,94
36	Lippe	705,8	886,5	−180,7	−86,18	—	0,80	0,89
37	Reuss ä. L.	3568,1	3276,7	291,4	43,61	6,60	1,09	1,04
38	Waldeck	2100,0	2529,0	−429,0	−150,92	—	0,83	0,91
39	Hohenzollern	1432,0	1682,6	−250,6	−150,59	—	0,85	0,92
40	Schaumburg-Lippe	2367,2	3128,0	−760,8	−311,02	—	0,76	0,87

die sich auf der Grundlage von (70) aufstellen lässt und in welcher h die Ordnungsnummer der Gruppe und ν die Zahl der Elemente Q_i in der Gruppe bedeutet, die zugehörigen mittleren Fehler bestimmen. Ausserdem führe man eine analoge Berechnung für die 40 Werte Q_i ohne Trennung nach Gruppen aus. Man findet:

Tabelle 3.

Selbstmordziffer im Deutschen Reich 1902—1911.

h	i	$\frac{1}{\nu}\sum_{h\nu-\nu+1}^{h\nu} {}^i Q_i$	$\frac{1}{\nu}\sum_{h\nu-\nu+1}^{h\nu} {}^i Q_i^2$	$\mathfrak{M}\left(\frac{1}{\nu}\sum_{h\nu-\nu+1}^{h\nu} {}^i Q_i^2\right)$
1	2	3	4	5
1	1—8	1,52	2,38	0,32
2	9—16	1,18	1,54	0,24
3	17—24	1,22	1,56	0,24
4	25—32	1,10	1,25	0,20
5	33—40	1,02	1,08	0,18
—	1—40	1,21	1,56	0,11

Eine Tendenz der Q_i-Werte, mit wachsendem i bezw. mit sinkendem x_i abzunehmen, lässt sich nicht verkennen, und wenn dementgegen Q_i bezw. Q_i in der dritten Gruppe durchschnittlich etwas höher als in der zweiten ausfällt, so kann dies wohl, wie die Werte der betreffenden mittleren Fehler zeigen, auf die Rechnung des Zufalls gesetzt werden.

Es bietet einiges Interesse, in diesem Zusammenhange zu zeigen, dass die Schwankungen der Werte Q_i innerhalb jeder Gruppe sich ziemlich gut der theoretischen Norm anpassen, selbst wenn diese Norm in der als ungenau anzusehenden Voraussetzung, dass $\mathfrak{E}(Q_i)$ innerhalb jeder Gruppe konstant ist, aufgestellt wird. Bildet man nämlich unter Anwendung der Bezeichnung

$$(120) \qquad \frac{1}{r} \sum_{hr-r+1}^{hr} {}_i Q_i = Q'_h$$

für jede Gruppe den Ausdruck

$$(121) \qquad F_h = \sqrt{\frac{1}{r} \sum_{hr-r+1}^{hr} {}_i (Q_i - Q'_h)^2},$$

so wäre, der gemachten Voraussetzung entsprechend, die in Frage stehende Norm, mit Rücksicht auf (70), durch

$$(122) \qquad G_h = \sqrt{\frac{r-1}{r} \cdot \frac{2}{z-1} (2 Q'_h - 1)}$$

gegeben, und man erhält:

Tabelle 4.

Selbstmordziffer im Deutschen Reich 1902—1911.

h	i	F_h	G_h
1	2	3	4
1	1—8	0,83	0,86
2	9—16	1,03	0,63
3	17—24	0,63	0,64
4	25—32	0,49	0,54
5	33—40	0,38	0,47
Durchschnitt		0,67	0,63

Ein Vergleich zwischen den Werten F_h und G_h bekräftigt jedenfalls indirekt die Annahme, dass es sich bei dem scheinbar unsicheren Gang der Q_i-Werte doch um eine bestimmte Regelmässigkeit handelt, die nur deshalb nicht noch deutlicher zutage tritt, weil die Werte Q_i^2 bezw. Q_i mit beträchtlichen zufälligen Fehlern behaftet sind. Letzteres darf man speziell auch denjenigen Werten von Q_i gegenüber, die kleiner als 1 sind, nicht ausseracht lassen. Der niedrigste Wert von Q_i ist 0,73 ($i = 17$). Setzt man hier $\mathfrak{E}(Q_i^2) = Q_{i,L}^2$, so findet man nach Formel (95) $\mathfrak{E}(Q_i^2) = 1{,}20$, woraus sich nach Formel (76) $\mathfrak{E}(Q_i) = 1{,}06$ und nach Formel (71) $\mathfrak{M}(Q_i) = 0{,}25$ ergibt. Demnach übertrifft der absolute Betrag der in Frage stehenden Abweichung ($1{,}06 - 0{,}73 = 0{,}33$) den massgebenden mittleren Fehler, relativ genommen, bloss um etwa $\frac{1}{3}$; das Ergebnis $Q_i = 0{,}73$ bietet also nichts überraschendes. Was aber insbesondere die — bei Lexis, Peek u. a. im Vordergrund stehende — Prognose anlangt, dass Q_i durch entsprechendes Einengen des Beobachtungsfeldes auf ein Niveau herabgedrückt werden kann, das sich über 1 kaum erhebt, so findet diese Prognose, wie die Ergebnisse für $i = 33$ bis 40 zeigen (Tabelle 2, Spalte 9 und Tabelle 3, Spalte 3), auch in dem gegenwärtigen Fall eine Bestätigung, die nichts zu wünschen übrig lässt.

Viel weniger günstig für den Lexis'schen Standpunkt erweisen sich demgegenüber die Ergebnisse, zu denen man gelangt, wenn man genauer zusieht, *in welchem Masse* die Q_i-Werte, die man für $i = 1$ bis 40 erhält, hinter Q_0 zurückbleiben. Da fällt es zunächst auf, dass von diesen 40 Werten nur 14, nämlich die 12 Werte, die kleiner als 1 sind, und ausserdem Q_1 und Q_7, sich niedriger stellen als die ihnen entsprechenden erwartungsmässigen, d. h. nach Formel (95) berechneten Werte $Q_{i,L}$, während die übrigen 26 höher sind als zu erwarten war. Sodann findet man, dass dem arithmetischen Durchschnitt der 40 Werte $Q_{i,L}^2$, der sich nach (96) zu 1,22 berechnet, als arithmetischer Durchschnitt der 40 Werte Q_i^2 die Grösse 1,56 (Tabelle 3, Spalte 4) gegenübersteht. Stellt man endlich im Anschluss hieran die Frage, ob die Differenz zwischen 1,56 und 1,22 nicht etwa dem Zufall zugeschrieben werden könne, so wird man geneigt sein,

diese Frage zu verneinen, wenn man in Betracht zieht, dass der mittlere Fehler von 1,56 sich auf 0,11 stellt (Tabelle 3, Spalte 5) und dass demnach die betreffende Differenz (0,34) das dreifache des massgebenden mittleren Fehlers ausmacht.

Man ist also zu der Aussage berechtigt, dass sich im gegebenen Fall die Q-Werte beim Übergang von der Totalmasse zu den sie bildenden Partialmassen verringern — und zwar im allgemeinen um so beträchtlicher, je kleiner die betreffende Partialmasse ist — jedoch in schwächerem Masse als es dem Lexisschen Standpunkte entsprechen würde.

Wie bereits im Anschluss an Formel (110) bemerkt worden ist, fällt Q_i grösser oder kleiner als $Q_{i,L}$ aus, je nachdem sich α_i^2 höher oder niedriger als α_0^2 stellt. So ist denn auch nach Tabelle 2, Spalte 6 — aus rein arithmetischen Gründen — α_i^2 in den 14 Fällen, wo $Q_i < Q_{i,L}$, kleiner und in den 26 Fällen, wo umgekehrt $Q_i > Q_{i,L}$, grösser als α_0^2. Laut Formel (111) können die Grössen α_i^2 als empirische Werte von β_i^2 aufgefasst werden, und so läuft die soeben festgestellte Unstimmigkeit zwischen Theorie und Erfahrung, falls sie nicht zufällig ist, darauf hinaus, dass die Grössen β_i^2 bezw. β_i bei $i > 0$ im allgemeinen den Wert β_0^2 bezw. β_0 übertreffen. Dies kann auch direkt, d. h. an der Hand der Werte α_i^2 nachgewiesen werden. Es bedarf aber hierzu einer Befreiung dieser Werte von den ihnen anhaftenden zufälligen Fehlern. Das einfachste Verfahren, welches diesem Zweck dient, besteht darin, dass man aus den Werten α_i^2 gruppenweise einfache arithmetische Mittel bildet. Ein nach diese Methode für die h:te Gruppe berechneter Mittelwert sei mit $\alpha_{[h]}^2$ bezeichnet. Will man genauer vorgehen, so sind aus den Werten α_i^2 gewogene arithmetische Mittel zu bilden, wobei als Gewichte die mit einem beliebigen konstanten Faktor multiplizierten reziproken Werte der zum Quadrat erhobenen mittleren Fehler von α_i^2 verwendet werden müssen. Wenn, wie im gegebenen Fall, die Werte $1 - y_i$ sich kaum von 1 unterscheiden, ist hierbei Formel (118) zu benutzen, worin die Werte m_i ohne weiteres durch x_i ersetzt werden können. Sind nun die Zahlen x_i so gross, dass der Ausdruck $2zx_i\beta_i^2$ den Ausdruck $z-1$ erheblich übertrifft und letzterer daher vernachlässigt werden kann, so sind die Gewichte der Werte

α_i^2 mit x_i, im entgegengesetzten Fall aber, d. h. wenn umgekehrt der Ausdruck $2zx_i\beta_i^2$ wegen der Kleinheit von x_i selbst klein im Vergleich zu $z-1$ ist und folglich in der Formel des mittleren Fehlers gestrichen werden kann, sind sie mit x_i^2 anzusetzen. Die auf diese Weise zustande kommenden beiden Mittelwerte sollen mit $\alpha_{\text{II}h}^2$ und $\alpha_{\text{III}h}^2$ bezeichnet werden. Wenn schliesslich keine jener beiden Voraussetzungen zutrifft, kann man, um eine grössere Genauigkeit zu erzielen, so verfahren, dass man die — mit $\varphi_i(\alpha_{Ah})$ zu bezeichnenden — Gewichte aus der Formel

$$(123) \qquad \varphi_i(\alpha_{Ah}) = \frac{x_i^2}{z-1+2zx_i\alpha_{Ah}^2}$$

bestimmt, worin unter α_{Ah}^2 ein »Ausgangswert» des gesuchten arithmetischen Mittels zu verstehen ist. Es ist das nächstliegende, α_{Ah} einem der Werte $\alpha_{\text{I}h}$, $\alpha_{\text{II}h}$ oder $\alpha_{\text{III}h}$ gleichzusetzen. Man bezeichne das nach dieser letzten Methode berechnete arithmetische Mittel der Werte α_i^2 mit $\alpha_{\text{IV}h}^2$ und führe noch mit Rücksicht auf das folgende die abkürzende Bezeichnung $\frac{z-1}{x_i}\varphi_i(\alpha_{Ah}) = \chi_i(\alpha_{Ah})$ ein, wodurch wegen (123) die (numerisch leicht auswertbare) Formel

$$(124) \qquad \chi_i(\alpha_{Ah}) = \frac{1}{\frac{1}{x_i}+\frac{2z}{z-1}\alpha_{Ah}^2}$$

zustande kommt. Nach dem Vorstehenden erhält man:

$$(125) \qquad \alpha_{\text{I}h} = \sqrt{\frac{1}{\nu}\sum_{h\nu-\nu+1}^{h\nu} {}_i\,\alpha_i^2}\,,$$

$$(126) \qquad \alpha_{\text{II}h} = \sqrt{\frac{\sum_{h\nu-\nu+1}^{h\nu} {}_i\, x_i\alpha_i^2}{\sum_{h\nu-\nu+1}^{h\nu} {}_i\, x_i}}\,,$$

$$(127)\qquad \alpha_{\mathrm{III}\,h} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{hv-v+1}^{hv} i\, x_i\, \alpha_i}{\sum\limits_{hv-v+1}^{hv} i\, x_i}}$$

und

$$(128)\qquad \alpha_{\mathrm{IV}\,h} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{hv-v+1}^{hv} i\, \varphi_i(\alpha_{Ah})\, \alpha_i}{\sum\limits_{hv-v+1}^{hv} i\, \varphi_i(\alpha_{Ah})}}\,.$$

Die letzten vier Formeln lassen sich wegen (116) und (124) auch wie folgt darstellen:

$$(129)\qquad \alpha_{\mathrm{I}\,h} = \sqrt{\frac{z-1}{vz}\left(\sum_{hv-v+1}^{hv} i\,\frac{Q_i^2}{x_i} - \sum_{hv-v+1}^{hv} i\,\frac{1}{x_i}\right)},$$

$$(130)\qquad \alpha_{\mathrm{II}\,h} = \sqrt{\frac{z-1}{z}\cdot\frac{\sum\limits_{hv-v+1}^{hv} i\, Q_i^2 - v}{\sum\limits_{hv-v+1}^{hv} i\, x_i}}\,.$$

$$(131)\qquad \alpha_{\mathrm{III}\,h} = \sqrt{\frac{z-1}{z}\cdot\frac{\sum\limits_{hv-v+1}^{hv} i\, x_i\, Q_i^2 - \sum\limits_{hv-v+1}^{hv} i\, x_i}{\sum\limits_{hv-v+1}^{hv} i\, x_i^2}}$$

und

$$(132)\qquad \alpha_{\mathrm{IV}\,h} = \sqrt{\frac{z-1}{z}\cdot\frac{\sum\limits_{hv-v+1}^{hv} i\, \chi_i(\alpha_{Ah})\, Q_i^2 - \sum\limits_{hv-v+1}^{hv} i\, \chi_i(\alpha_{Ah})}{\sum\limits_{hv-v+1}^{hv} i\, \chi_i(\alpha_{Ah})\, x_i}}\,.$$

Tabelle 5 gibt die Werte von $\alpha_{\mathrm{I}\,h}$, $\alpha_{\mathrm{II}\,h}$ und $\alpha_{\mathrm{III}\,h}$ an, die man erhält bei Zusammenfassung der 40 Elemente α_i bezw.

Q_i^2: 1) zu 5 Gruppen zu 8, 2) zu 2 Gruppen zu 20 und 3) zu einer einzigen Gruppe.

Tabelle 5.

Selbstmordziffer im Deutschen Reich 1902—1911.

ν	h	i	$100\,\alpha_{\mathrm{I}h}$	$100\,\alpha_{\mathrm{II}h}$	$100\,\alpha_{\mathrm{III}h}$
1	2	3	4	5	6
8	1	1—8	3,70	3,61	3,47
8	2	9—16	3,24	3,48	3,68
8	3	17—24	5,62	5,14	4,56
8	4	25—32	4,77	5,22	5,35
8	5	33—40	imaginär	6,31	9,03
20	1	1—20	3,90	3,68	3,52
20	2	21—40	2,39	5,58	5,60
40	1	1—40	3,23	3,92	3,56

Für $h = 5$ (bei $\nu = 8$) sind ausserdem die Werte $\alpha_{\mathrm{IV}h}$ bestimmt worden, und es ergab sich $\alpha_{\mathrm{IV}h} = 8{,}78$ bei $\alpha_{Ah} = \alpha_{\mathrm{II}h}$ und $\alpha_{\mathrm{IV}h} = 8{,}54$ bei $\alpha_{Ah} = \alpha_{\mathrm{III}h}$. Sieht man von Spalte 4, deren Zahlenangaben auf einer ganz rohen Methode beruhen, ab, so wird man aus der Tabelle schliessen können, *dass die relative wesentliche Schwankungskomponente* (β_i), als deren empirische Werte eben die Grössen $\alpha_{\mathrm{II}h}$, $\alpha_{\mathrm{III}h}$ und $\alpha_{\mathrm{IV}h}$ erscheinen, *erstens durchweg höher ist in den Partialmassen als in der Totalmasse* (nach Tabelle 2, Spalte 7 ist $100\,\alpha_0 = 2{,}46$) *und zweitens dass sie mit abnehmendem x_i im allgemeinen zunimmt.* Das erste dieser beiden Ergebnisse bringt nur in anderer Form die früher festgestellte Tatsache zum Ausdruck, dass die Q_i-Werte beim Übergang von der Totalmasse zu den Partialmassen langsamer abnehmen als es nach Lexis sein müsste, während das zweite Ergebnis eine nicht unwesentliche Ergänzung hierzu bietet, von der jedoch einstweilen abgesehen werden soll. Die Unterschiede zwischen der Totalmasse und den Partialmassen in Bezug auf Stabilität wären sonach nicht allein durch die Ungleichheit der unwesentlichen Schwankungs-

komponente, die bei der Totalmasse sich niedriger stellt als bei den Partialmassen, sondern daneben durch eine Ungleichheit der wesentlichen Schwankungskomponente bedingt, und zwar wäre — wenigstens in dem betrachteten Fall der Selbstmordziffer — auch diese Komponente bei der Totalmasse kleiner als bei den Partialmassen — und dies ungeachtet (oder vielleicht in Folge) des Umstandes, dass die Totalmasse weniger homogen ist, als es im Durchschnitt die Partialmassen sind. Da fragt man sich aber naturgemäss, ob der betrachtete Fall zu irgend welchen allgemeinen Schlussfolgerungen berechtigt. Möglicherweise gestalten sich die Verhältnisse in anderen Fällen gerade umgekehrt. So will ich mich denn auch auf diesen einen Fall nicht beschränken; aber ehe ich zu anderen Beispielen übergehe, möchte ich über das Verhältnis zwischen den Grössen w_i bezw. β_i bei $i = 1$ bis n auf der einen Seite und der Grösse w_0 bezw. β_0 auf der anderen Seite eine theoretische Betrachtung anstellen, die für die Wahl der zu betrachtenden weiteren Beispiele richtunggebend sein soll.

Aus (79) und (81) erhält man:

$$p_{0.k} - p_0 = \frac{1}{s_0} \sum_1^n {}_i \, s_i (p_{i.k} - p_i) \tag{133}$$

oder auch

$$e_{0.k} = \frac{1}{s_0} \sum_1^n {}_i \, s_i e_{i.k}, \tag{134}$$

somit

$$s_0^2 e_{0.k}^2 = \sum_1^n {}_i \, s_i^2 e_{i.k}^2 + 2 \sum_1^n {}_i \sum_{i+1}^n {}_j \, s_i s_j e_{i.k} e_{j.k}, \tag{135}$$

woraus sich durch Summierung nach k

$$z s_0^2 w_0^2 = z \sum_1^n {}_i \, s_i^2 w_i^2 + 2 \sum_1^n {}_i \sum_{i+1}^n {}_j \sum_1^z {}_k \, s_i s_j e_{i.k} e_{j.k} \tag{136}$$

ergibt. Setzt man alsdann

$$\frac{1}{z} \sum_1^z {}_k \frac{e_{i.k} e_{j.k}}{w_i w_j} = \gamma_{i.j} \tag{137}$$

und

(138)
$$\frac{\sum_1^n {}_i \sum_{i+1}^n {}_j s_i s_j w_i w_j \gamma_{i,j}}{\sum_1^n {}_i \sum_{i+1}^n {}_j s_i s_j w_i w_j} = \gamma,$$

so folgt aus (136)

(139)
$$s_0^2 w_0^2 = \sum_1^n {}_i s_i^2 w_i^2 + 2\gamma \sum_1^n {}_i \sum_{i+1}^n {}_j s_i s_j w_i w_j$$

oder auch

(140)
$$s_0^2 w_0^2 = \sum_1^n {}_i s_i^2 w_i^2 + \gamma \left\{ \left(\sum_1^n {}_i s_i w_i \right)^2 - \sum_1^n {}_i s_i^2 w_i^2 \right\}.$$

Der Ausdruck $\gamma_{i,j}$ entspricht der Form nach durchaus dem Begriff des *Korrelationskoeffizienten*, und unter denselben Begriff fällt formell der Ausdruck γ, insofern er nichts anderes als ein aus $\frac{n(n-1)}{2}$ Grössen $\gamma_{i,j}$ gebildetes gewogenes arithmetisches Mittel ist. Aber es handelt sich bei γ um einen Korrelationskoeffizienten sui generis. Die folgenden drei Punkte sind hier zu beachten.

1. Der ursprüngliche Begriff der Korrelation bezieht sich jeweils auf irgendwelche zwei messbare *Eigenschaften* von *Individuen* einer bestimmten Art. Im gegebenen Fall wären als Individuen die aufeinanderfolgenden Zeitabschnitte zu betrachten, und den verschiedenen Eigenschaften würde das Verhalten der betreffenden Häufigkeiten in den verschiedenen zum Vergleich herangezogenen Massen bezw. Gebieten entsprechen.

2. Sonst wird der Korrelationskoeffizient auf der unmittelbaren Grundlage bestimmter *empirischer* Werte berechnet. Demgegenüber haben die in dem Ausdruck von $\gamma_{i,j}$ auftretenden, somit auch in den Ausdruck von γ eingehenden Grössen $e_{i,k}$ und w_i rein *theoretischen* Charakter.

3. Die Verwendung der Produkte $s_i s_j w_i w_j$ als Gewichte bei der Bildung von γ stellt etwas für γ spezifisches dar.

Aus diesen Gründen dürfte γ einen besonderen Namen verdienen.[1] Er soll es zum Ausdruck bringen, dass es sich hierbei um eine Charakterisierung des gegenseitigen Verhaltens analoger statistischen Reihen handelt, die zeitlich zusammenfallen. Bezeichnet man den in Frage stehenden gleichzeitigen Verlauf statistischer Häufigkeiten (wie auch anders gearteter statistischer Zahlenwerte) als »*Syndromie*«, so kann γ »*Syndromiekoeffizient*« genannt werden.

Die obere Grenze des Wertes von γ ist offenbar 1, weil jeder der Werte $\gamma_{i,j}$ gleich 1 sein kann, ohne dass es ausgeschlossen sei, dass alle Werte $\gamma_{i,j}$ gleichzeitig gleich 1 sind. Damit $\gamma_{i,j} = 1$, muss nach einem Fundamentalsatz der Korrelationstheorie[2] für jedes k die Bedingung

$$\frac{e_{i,k}}{e_{j,k}} = \lambda_{i,j}, \tag{141}$$

wo $\lambda_{i,j}$ eine von k unabhängige Konstante ist, erfüllt sein. Diese Bedingung ist insbesondere in dem Fall erfüllt, wo die Abweichungen $e_{i,k}$, absolut genommen, bei jedem gegebenen k den Wahrscheinlichkeiten p_i proportional sind, denn aus

$$\frac{e_{i,k}}{p_i} = \frac{e_{j,k}}{p_j} \tag{142}$$

folgt

$$\frac{e_{i,k}}{e_{j,k}} = \frac{p_i}{p_j}.$$

Indessen ist (141) an (142) nicht gebunden.

Die untere Grenze des Wertes von γ ist aber, sofern $n > 2$, nicht -1, sondern grösser als -1 bezw. ihrem absoluten Betrag nach kleiner als 1. Aus (140) findet man nämlich

$$\gamma = \frac{s_0^2 w_0^2 - \sum_{i=1}^{n} s_i^2 w_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} s_i w_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} s_i^2 w_i^2}. \tag{143}$$

[1] Der Ausdruck »Korrelationskoeffizient« ist übrigens nicht allgemein akzeptiert. J. P. NORTON und L. MARCH sagen dafür: »Kovariationskoeffizient«. Siehe LUCIEN MARCH, Essai sur un mode d'exposer les principaux éléments de la théorie statistique. Nancy 1911, S. 41.

[2] ARTHUR L. BOWLEY, Elements of statistics. London 1901, S. 319.

mithin

(144) $$\gamma > -\frac{1}{t-1},$$

wo

(145) $$t = \frac{\left(\sum_1^n i\, s_i w_i\right)^2}{\sum_1^n i\, s_i^2 w_i^2},$$

und folglich bei $s_i w_i = \text{const.}$ $t = n$,

(146) $$\gamma > -\frac{1}{n-1}.$$

Ist hingegen die Bedingung $s_i w_i = \text{const.}$ nicht erfüllt, so ist $t < n$, weil

$$\frac{1}{n}\sum_1^n i\, s_i w_i < \sqrt{\frac{1}{n}\sum_1^n i\, s_i^2 w_i^2},$$

und sinkt die untere Grenze des Wertes von γ entsprechend herab. Im allgemeinen liegt sie aber auch hier der Null um so näher, je grösser n ist.

Bei $\gamma = 1$ soll von *Isodromie*, bei $1 > \gamma > 0$ von *Homodromie*, bei $\gamma = 0$ von *Paradromie* und bei $\gamma < 0$ von *Antidromie* gesprochen werden. Ausserdem möge auf die drei letzten Fälle die Bezeichnung *Anisodromie* angewandt werden; als Kriterium der Anisodromie erscheint demnach die Ungleichung $\gamma < 1$. Der Fall der Antidromie kommt, der vorstehenden Erörterung über die untere Grenze von γ zufolge, um so weniger in Frage, je grösser n ist.

Bezeichnet man alsdann mit w_{01} und w_{00} die Werte, die w_0 im Fall der Isodromie, d. h. bei $\gamma = 1$ bezw. im Fall der Paradromie, d. h. bei $\gamma = 0$ annimmt, so findet man aus (140):

(147) $$w_{01} = \frac{1}{s_0}\sum_1^n i\, s_i w_i$$

und

(148) $$w_{00} = \frac{1}{s_0}\sqrt{\sum_1^n i\, s_i^2 w_i^2}.$$

Formel (147) kann mit Rücksicht auf (87) in

$$w_{01} = \frac{p_0}{m_0} \sum_1^n {}_i \frac{m_i w_i}{p_i}$$

oder auch wegen (89) in

(149) $$\frac{w_{01}}{p_0} = \frac{1}{m_0} \sum_1^n {}_i\, m_i\, {}_{,}\beta_i$$

umgestaltet werden. Man gelangt zu demselben Resultat, wenn man von vornherein, statt der absoluten, die relativen wesentlichen Schwankungskomponenten ins Auge fasst und dementsprechend die Grösse ${}_{,}\beta_{01}$ einführt als denjenigen Wert, den ${}_{,}\beta_0$ im Fall der Isodromie annimmt. Vermöge den Substitution $s_i w_i = m_i\, {}_{,}\beta_i$ verwandelt sich (140) in

(150) $$m_0^2\, {}_{,}\beta_0^2 = \sum_1^n {}_i\, m_i^2\, {}_{,}\beta_i^2 + \gamma \left\{ \left(\sum_1^n {}_i\, m_i\, {}_{,}\beta_i \right)^2 - \sum_1^n {}_i\, m_i^2\, {}_{,}\beta_i^2 \right\},$$

und an Stelle der Formel (147) tritt die Formel

(151) $$ {}_{,}\beta_{01} = \frac{1}{m_0} \sum_1^n {}_i\, m_i\, {}_{,}\beta_i \,.$$

Was nunmehr die Grösse w_{00} betrifft, so lässt sie sich auf der Grundlage von (148) in der Form

(152) $$w_{00} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{s_q}{s_a} \cdot \sqrt{\frac{\sum_1^n {}_i\, s_i^2 w_i^2}{\sum_1^n {}_i\, s_i^2}}$$

darstellen, wo s_a das arithmetische und s_q das quadratische Mittel der n Werte ist, die s_i bei $i = 1$ bis n annimmt, so dass

(153) $$s_a = \frac{1}{n} \sum_1^n {}_i\, s_i = \frac{s_{\cdot}}{n}$$

und

(154) $$s_q = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_1^n {}^i s_i^2}.$$

Bei $s_i = \text{const.}$ für $i = 1$ bis n geht (152) in

(155) $$w_{00} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_1^n {}^i w_i^2}$$

und bei $s_i = \text{const.}$ und $w_i = \text{const.}$ für $i = 1$ bis n in

(156) $$w_{00} = \frac{w_i}{\sqrt{n}}$$

über. Man erhält zugleich in analoger Weise, wenn man mit β_{00} den Wert von β_0 im Fall der Paradromie bezeichnet, auf der Grundlage von (148)

(157) $$\beta_{00} = \frac{1}{m_0}\sqrt{\sum_1^n {}^i m_i^2 \beta_i^2},$$

(158) $$\beta_{00} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{m_q}{m_a}\sqrt{\frac{\sum_1^n {}^i m_i^2 \beta_i^2}{\sum_1^n {}^i m_i^2}},$$

wo

(159) $$m_a = \frac{1}{n}\sum_1^n {}^i m_i = \frac{m_0}{n}$$

und

(160) $$m_q = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_1^n {}^i m_i^2},$$

ferner bei $m_i = \text{const.}$ für $i = 1$ bis n

(161) $$\beta_{00} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_1^n {}^i \beta_i^2}$$

und schliesslich bei $m_i = \text{const.}$ und $\beta_i = \text{const.}$ für $i = 1$ bis n

(162) $$\beta_{00} = \frac{\beta_i}{\sqrt{n}}.$$

Aus (150) ergibt sich die mit (143) identische Formel

$$(163) \qquad \gamma = \frac{m_0^2 \beta_0^2 - \sum_{i=1}^{n} m_i^2 \beta_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \beta_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} m_i^2 \beta_i^2}.$$

Die Formeln (143) und (163) können, den Formeln (147) und (148) bezw. (151) und (157) zufolge, auch als

$$(164) \qquad \gamma = \frac{w_0^2 - w_{00}^2}{w_{01}^2 - w_{00}^2}$$

und

$$(165) \qquad \gamma = \frac{\beta_0^2 - \beta_{00}^2}{\beta_{01}^2 - \beta_{00}^2}$$

dargestellt werden.[1] Man hat zugleich:

$$(166) \qquad w_0^2 = w_{00}^2 + \gamma (w_{01}^2 - w_{00}^2)$$

und

$$(167) \qquad \beta_0^2 = \beta_{00}^2 + \gamma (\beta_{01}^2 - \beta_{00}^2).$$

Diese Darlegungen über die Abhängigkeit zwischen w_0 bezw. β_0 auf der einen Seite und $w_1, w_2 \ldots w_n$ bezw. $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n$ auf der anderen Seite zeigen deutlich, worauf das Operieren mit der Vorstellung, dass die wesentliche Schwankungskomponente, absolut oder — bei veränderlichem p_i — relativ genommen, gleich hoch sei, ob man es mit der Totalmasse oder den Partialmassen zu tun hat, hinausläuft. Diese Vorstellung, wie sie sich bei Lexis implicite findet, ist auf den Fall der Isodromie eingestellt. In jedem anderen Fall als dem der Isodromie bleibt w_0 bezw. β_0 hinter dem betreffenden aus den Werten $w_1, w_2 \ldots w_n$ bezw. $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n$ gebildeten arithmetischen Mittel (wobei als Gewichte, den For-

[1] Es liegt nahe, an Stelle von γ den Ausdruck $\frac{w_0 - w_{00}}{w_{01} - w_{00}}$ bezw. $\frac{\beta_0 - \beta_{00}}{\beta_{01} - \beta_{00}}$ zur Charakterisierung der Syndromieverhältnisse zu verwenden. Dieser Ausdruck, den man im Unterschied von γ als »Syndromieindex« bezeichnen könnte, ist dem absoluten Betrag nach stets grösser als γ.

meln (147) und (151) zufolge, die Zahlen $s_1, s_2 \dots s_n$ bezw. $m_1, m_2 \dots m_n$ erscheinen) zurück. Was insbesondere den Fall der Paradromie anbelangt, so verringert sich hier die wesentliche Schwankungskomponente beim Übergang von der Totalmasse zu den Partialmassen unter gewissen vereinfachenden Voraussetzungen genau und sonst, sofern nur die Werte, die s_i und w_i bezw. m_i und β_i für $i = 1$ bis n annehmen, nicht sehr verschieden voneinander sind, nahezu im Verhältnis von 1 zu $\sqrt{n}$. Auf die Q_i-Werte angewandt, besagt dies, dass man auf eine Realisierung der Lexis'schen Erwartungen in vollem Masse nur eben in dem Fall der Isodromie rechnen könnte, im übrigen aber sich darauf gefasst machen müsse, dass diese Erwartungen entweder nur in beschränktem Masse — dies im Fall der Homodromie — oder gar nicht — letzteres im Fall der Paradromie — in Erfüllung gehen.

Nun besteht aber zwischen den verschiedenen Formen der Syndromie einerseits und der Art, wie sich die Totalmasse zu den Partialmassen in Bezug auf Homogeneität verhält, ein bestimmter Zusammenhang. Es ist, um hierüber ins Klare zu kommen, davon auszugehen, dass es keine Form der Syndromie gibt, bei welcher die Stabilität der Totalmasse, an der relativen wesentlichen Schwankungskomponente gemessen, hinter der durchschnittlichen Stabilität der Partialmassen zurückbleiben würde. Denn es geht aus (163) hervor, dass β_0 das arithmetische Mittel der n Werte β_i nicht übertreffen kann (sonst erhielte man $\gamma > 1$). Stellt man dieses Ergebnis der Tatsache gegenüber, dass die Homogeneität der Totalmasse niemals grösser sein kann als die durchschnittliche Homogeneität der Partialmassen, so wird man sagen können, dass, sofern es sich um einen Vergleich zwischen der Totalmasse und den Partialmassen handelt, die gleiche oder kleinere Homogeneität sich mit der gleichen oder höheren Stabilität paart. Was weiterhin insbesondere den Fall betrifft, wo die Totalmasse den gleichen Grad der Homogeneität wie die Partialmassen im Durchschnitt aufweist, so hat man hier $p_i =$ const., was soviel bedeutet, dass die Zerlegung der Totalmasse in Partialmassen nach einem indifferenten Gesichtspunkt erfolgt ist. Dann aber muss Isodromie vorliegen, und zwar ist hier nicht nur die relative, sondern auch die *absolute* wesentliche Schwankungskomponente die gleiche

in der Totalmasse wie in den Partialmassen. Dieser Fall dürfte kaum jemals in die Erscheinung treten, wenn die Partialmassen nach einem geographischen Gesichtspunkt gebildet sind. Eher kann hierbei, wie auch bei einem anderen, d. h. nicht-geographischen (und zugleich nicht-indifferenten) Einteilungsprinzip die Gleichheit der *relativen* wesentlichen Schwankungskomponente erwartet werden. Dies würde bedeuten, dass die Partialmassen sämtlich denselben zeitlichen Einflüssen unterliegen und auf diese Einflüsse, relativ genommen, mit derselben Stärke reagieren. Das durch Zusammenfassung solcher Massen zustande kommende Ganze, die Totalmasse, wäre weniger homogen als die Partialmassen im Durchschnitt, würde mit ihnen jedoch in Bezug auf Stabilität Schritt halten, weil eben Isodromie vorliegen würde. Geht man nunmehr zu den Fällen der Anisodromie über, die, streng genommen, die einzigen praktisch in Frage kommenden sind, so findet man, dass die Totalmasse dem Durchschnitt der Partialmassen gegenüber stets einen niedrigeren Grad der Homogeneität und einen höheren Grad der Stabilität aufweist. Dabei gewinnt die Totalmasse an Stabilität bei Homodromie um so mehr, je schwächer letztere ausgesprochen ist, bei Paradromie noch mehr und bei Antidromie am meisten, während sie — die Totalmasse — zu gleicher Zeit mit diesem allmählichen Übergang von einer starken Homodromie zur Antidromie an Homogeneität in Verhältnis zum Durchschnitt der Partialmassen im allgemeinen immer mehr einbüsst, weil, wenigstens in der Regel, die verschiedenen Partialmassen in Bezug auf den zeitlichen Verlauf der ihnen zukommenden Häufigkeiten um so weniger miteinander übereinstimmen, je beträchtlicher die sonstigen Unterschiede zwischen ihnen sind. Insbesondere haben im Fall der Paradromie die Partialmassen sozusagen nichts miteinander gemein; sonst würde es nicht möglich sein, dass die auf dieselben sich beziehenden Häufigkeiten gänzlich unabhängig voneinander verlaufen. Durch Zusammenfassung von Massen, die sich in dieser Weise zu einander verhalten, entsteht offenbar ein Ganzes, dem seine Teile in Bezug auf Homogeneität erheblich überlegen sind. Und dieses Ganze, die Totalmasse, weist hier ein β auf, das bei einer entsprechend grossen Zahl der Partialmassen, aus denen sich die Totalmasse zusammensetzt, tief unter den

Durchschnitt der β-Werte sinkt, die den Partialmassen zukommen (während die Q-Werte, dort wie hier, ungefähr gleich hoch sind — dem Umstand zum Trotz, dass der Totalmasse eine Ereigniszahl entspricht, die gleich der Summe der Ereigniszahlen der Partialmassen ist). Also wiederum, wie im Fall der Homodromie, aber noch deutlicher ausgesprochen: ein Hand in Hand Gehen geringerer Homogeneität mit höherer Stabilität.

In dem Beispiel der Selbstmordziffer liegt Homodromie vor. Dies kann auch direkt aus den Grössen α_i erschlossen werden, die ja als empirische Werte von β_i aufzufassen sind. Die Schwierigkeit, die damit verbunden ist, dass einige dieser Werte imaginär sind, wodurch es unmöglich wird, sie in (163) für β_i einzusetzen, lässt sich in der Weise überwinden, dass man, statt der Werte α_i, die Werte $\alpha_{\mathrm{II}h}$ und $\alpha_{\mathrm{III}h}$ heranzieht. Für m_i ist natürlich x_i einzusetzen. Man findet:

Tabelle 6.

Selbstmordziffer im Deutschen Reich 1902—1911.

Die Werte von γ.

Anzahl der Gruppen	Unter Zugrundelegung von	
	$\alpha_{\mathrm{II}h}$	$\alpha_{\mathrm{III}h}$
1	2	3
8	0,380	0,390
2	0,375	0,408

Ich wende mich jetzt einem Fall stärkerer Homodromie zu, nämlich dem Fall der *Sterbeziffer in acht europäischen Staaten im Jahrzehnt 1901—10.* Die Tabellen 7 und 8 sind den Tabellen 1 und 2 nachgebildet. Unter $y_{i,k}$ bei $i = 1$ bis 8 ist das Verhältnis der Zahl der in einem bestimmten Kalenderjahre in dem betreffenden Staate Gestorbenen zu der für dasselbe Kalenderjahr festgestellten mittleren Bevölkerung dieses Staates zu verstehen. Diese Werte $y_{i,k}$ (Spalten 3—12), sowie die Werte s_i (Spalte 14) sind der »Statistik des Deutschen Reichs», Band 240, 2, Berlin 1914, S. [136]—[151] ent-

nommen; was aber die Werte $y_{0,k}$ anbelangt, die sich auf den Komplex der acht in Frage kommenden Staaten beziehen, so sind sie von mir auf der Grundlage der absoluten Zahlen der Gestorbenen und der Lebenden, die in der genannten Publikation für jedes Kalenderjahr nach Staaten gegeben sind, berechnet worden. Die Werte y_i für $i = 0$ bis 8 sind auch hier, wie in Tabelle 1, *einfache* arithmetische Durchschnitte von je 10 Werten $y_{i,k}$. Zur Bestimmung von α_i ist aber Formel (113) anstatt (114) benützt worden.

Das arithmetische Mittel der 8 Werte $100\,\alpha_i$ bei $i = 1$ bis 8 beträgt 4,99, übertrifft somit nur unbedeutend den Wert $100\,\alpha_0$, der sich auf 4,62 stellt. Es ist zugleich zu beachten, dass von jenen 8 Werten 5 grösser und 3 kleiner als $100\,\alpha_0$ sind. Dementsprechend würde man hier der Formel (110) gemäss in 5 Fällen aus 8 $Q_i > Q_{i,L}$ und in 3 Fällen aus 8 $Q_i < Q_{i,L}$ erhalten, was ein für den Lexisschen Standpunkt recht günstiges Ergebnis darstellt. Das quadratische Mittel der 8 Werte $Q_{i,L}$ berechnet sich nach Formel (96) zu 12,8, während das quadratische Mittel der 8 Werte Q_i 14,1 beträgt, mithin nur um 1,3 grösser ausfällt. Diese Abweichung kann allerdings nicht auf die Rechnung des Zufalls gesetzt werden, weil sie etwa das 11-fache des massgebenden mittleren Fehlers ausmacht. Letzterer lässt sich nämlich mit Rücksicht auf Formel (73) durch $\frac{1}{\sqrt{8 \cdot 9}} = 0{,}12$ ausdrücken. Es liegt also in diesem Fall zwar keine Isodromie, wohl aber eine nicht sehr weit davon entfernte Homodromie vor. Ein beträchtlicher Rückgang der Sterblichkeit in dem Jahrzehnt 1901—10 ist eben allen Staaten, um die es sich handelt, gemeinsam.

Der Syndromiekoeffizient bestimmt sich hier, wie überhaupt in den Fällen, wo sämtliche Werte v_i^2 bezw. α_i^2 positiv sind, einfach in der Weise, dass man in (143) die Grössen w_i durch v_i ersetzt. Das führt zu

$$(168) \qquad \gamma = \frac{s_0^2 v_0^2 - \sum_{i=1}^{n} s_i^2 v_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} s_i v_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} s_i^2 v_i^2}$$

Tabelle 7.

Sterbeziffer in acht europäischen Staaten 1901—10.

i	Staat bezw. Komplex von Staaten	$10^3 y_{i,1}$	$10^3 y_{i,2}$	$10^3 y_{i,3}$	$10^3 y_{i,4}$	$10^3 y_{i,5}$	$10^3 y_{i,6}$	$10^3 y_{i,7}$	$10^3 y_{i,8}$	$10^3 y_{i,9}$	$10^3 y_{i,10}$	$10^3 y_i$	$10^6 s_i$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	Die 8 Staaten	17,2	16,5	16,2	16,3	16,2	15,5	15,5	15,8	14,9	14,6	15,87	34,002
1	Belgien	17,1	17,3	17,0	16,9	16,5	16,4	15,8	16,5	15,8	15,2	16,45	7,173
2	Dänemark	15,8	14,6	14,7	14,1	15,0	13,5	14,1	14,6	13,3	12,9	14,26	2,594
3	Finland	20,6	18,4	17,8	17,7	18,3	17,4	17,9	18,4	16,6	16,5	17,96	2,905
4	Niederlande	17,2	16,3	15,6	15,9	15,3	14,8	14,6	15,0	13,7	13,6	15,20	5,583
5	Norwegen	14,9	13,8	14,7	14,3	14,7	13,6	14,3	14,2	13,6	13,5	14,16	2,292
6	Schottland	17,9	17,3	16,8	17,1	16,2	16,4	16,6	16,6	15,9	15,3	16,61	4,607
7	Schweden	16,1	15,4	15,1	15,3	15,6	14,4	14,6	14,9	13,7	14,0	14,91	5,310
8	Schweiz	18,0	17,0	17,4	17,5	17,6	16,6	16,4	15,8	16,1	15,1	16,75	3,538

Tabelle 8.

Sterbeziffer in acht europäischen Staaten 1901—10.

i	Staat bezw. Komplex von Staaten	$10^6 \sigma_i^2$	$10^6 u_i^2$	$10^6 v_i^2$	$100\, \alpha_i$	Q_i^2	Q_i
1	2	3	4	5	6	7	8
0	Die 8 Staaten	0,5401	0,0004	0,5397	4,62	1306,5	36,1
1	Belgien	0,4065	0,0020	0,4045	3,86	200,3	14,2
2	Dänemark	0,6744	0,0049	0,6695	5,72	138,3	11,8
3	Finland	1,1864	0,0055	1,1809	6,04	217,1	14,7
4	Niederlande	1,1240	0,0024	1,1216	6,90	465,8	21,6
5	Norwegen	0,2364	0,0055	0,2309	3,38	43,1	6,6
6	Schottland	0,4849	0,0031	0,4818	4,18	152,0	12,3
7	Schweden	0,4949	0,0025	0,4924	4,71	199,6	14,1
8	Schweiz	0,7525	0,0042	0,7483	5,15	179,6	13,4

oder auch wegen (106) zu

$$\gamma = \frac{x_0^2\alpha_0^2 - \sum_1^n i\, x_i^2\alpha_i^2}{\left(\sum_1^n i\, x_i\alpha_i\right)^2 - \sum_1^n i\, x_i^2\alpha_i^2}, \tag{169}$$

welch letztere Formel sich übrigens auch aus (163) gewinnen lässt, wenn man darin x_i für m_i und α_i für β_i substituiert.

Ist s_i = const. bei $i > 0$, so geht (168) in

$$\gamma = \frac{n^2 v_0^2 - \sum_1^n i\, v_i^2}{\left(\sum_1^n i\, v_i\right)^2 - \sum_1^n i\, v_i^2} \tag{170}$$

und ist x_i = const. bei $i > 0$, so geht (169) in

$$\gamma = \frac{n^2\alpha_0^2 - \sum_1^n i\, \alpha_i^2}{\left(\sum_1^n i\, \alpha_i\right)^2 - \sum_1^n i\, \alpha_i^2} \tag{171}$$

über. Die Formeln (170) und (171) können als Näherungsformeln auch dann benutzt werden, wenn die betreffenden Zahlen s_i bezw. x_i einander ungleich, jedoch nicht sehr verschieden voneinander sind.

Formel (169) lässt sich ferner bei hinreichend kleinen Werten von y_i, unter Benutzung von (107) und (108), näherungsweise als

$$\gamma = \frac{x_0 Q_0^2 - \sum_1^n i\, x_i Q_i^2}{\left\{\sum_1^n i\, x_i^{\frac{1}{2}}(Q_i^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\right\}^2 + x_0 - \sum_1^n i\, x_i Q_i} \tag{172}$$

oder auch, unter Anwendung der neu einzuführenden Bezeichnungen

(173) $$\sqrt{\frac{1}{x_0}\sum_{1}^{n}{}_i\, x_i Q_i^2} = Q_{00}$$

und

(174) $$\sqrt{1 + \frac{1}{x_0}\left\{\sum_{1}^{n}{}_i\, x_i^{\frac{1}{2}}(Q_i^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\right\}^2} = Q_{01},$$

als

(175) $$\gamma = \frac{Q_0^2 - Q_{00}^2}{Q_{01}^2 - Q_{00}^2}$$

darstellen. Hierbei können Q_{00} und Q_{01} als diejenigen Werte von Q_0 definiert werden, von denen der erste dem Fall der Paradromie ($\gamma = 0$) und der zweite dem Fall der Isodromie ($\gamma = 1$) entspricht. Nun stimmt aber im letzteren Fall Q_i (bei $i > 0$) mit $Q_{i,L}$ überein, so dass man gewissermassen durch Umkehrung der Beziehung (95), die, wohlgemerkt, ebenso wie (172), nur unter der Bedingung, dass die Werte y_i wenig von Null verschieden sind, näherungsweise gilt, zu

(176) $$\sum_{1}^{n}{}_i\, Q_i^2 = n + Q_{01}^2 - 1$$

gelangt, worin Q_{01}, ähnlich wie Q_{01}, als der Wert von Q_0 aufgefasst werden kann, welcher sich bei Isodromie herausstellen würde. So erhält man nach Analogie von (175):

(177) $$\gamma = \frac{Q_0^2 - Q_{00}^2}{Q_{01}^2 - Q_{00}^2},$$

wo γ als eine der Grösse γ nachgebildete Grösse zu betrachten ist, der eine ähnliche statistische Bedeutung wie dieser zukommt, und wo Q_{01}, der Formel (176) zufolge, durch

(178) $$Q_{01}^2 = \sum_{1}^{n}{}_i\, Q_i^2 - n + 1$$

gegeben ist. Auf der Grundlage letzterer Formel sowie der Formel (173) geht (177) in

$$(179) \qquad \gamma = \frac{x_0 Q_0^2 - \sum_1^n i\, x_i Q_i}{x_0\left(\sum_1^n i\, Q_i - n + 1\right) - \sum_1^n i\, x_i Q_i}$$

über. Der (nach dieser Formel berechnete) Wert γ wird dem absoluten Betrag nach grösser oder kleiner als der nach Formel (172) berechnete Wert γ ausfallen, je nachdem Q_{01} kleiner oder grösser als Q_{01} ist. Es bietet daher ein Interesse, zu untersuchen, wie diese beiden Ausdrucke miteinander zusammenhängen.

Man bezeichne: 1) mit ξ_a das einfache arithmetische und mit ξ_q das quadratische Mittel der n Werte $x_i^{\frac{1}{2}}$ bei $i = 1$ bis n und 2) mit v'_a das einfache arithmetische, mit v'_q das quadratische und mit v'_g das gewogene arithmetische Mittel der n Werte $(Q_i - 1)^{\frac{1}{2}}$ bei $i = 1$ bis n, wobei, sofern es sich um v'_g handelt, die in Frage kommenden Gewichte gleich $x_i^{\frac{1}{2}}$ gesetzt werden sollen. Demnach hat man:

$$\frac{1}{n}\sum_1^n i\, x_i^{\frac{1}{2}} = \xi_a, \qquad \left(\frac{1}{n}\sum_1^n i\, x_i\right)^{\frac{1}{2}} = \xi_q, \qquad x_0 = n\,\xi_q^2.$$

$$\frac{1}{n}\sum_1^n i\,(Q_i - 1)^{\frac{1}{2}} = v'_a, \quad \left\{\frac{1}{n}\sum_1^n i\,(Q_i - 1)\right\}^{\frac{1}{2}} = v'_q, \quad \frac{\sum_1^n i\, x_i^{\frac{1}{2}}(Q_i - 1)^{\frac{1}{2}}}{\sum_1^n i\, x_i^{\frac{1}{2}}} = v'_g,$$

somit wegen (174) und (178)

$$Q_{01}^2 - 1 = n\,\xi_a^2\, v'^2_g : \xi_q^2,$$

$$Q_{01}^2 - 1 = n\, v'^2_q$$

und schliesslich

$$(180) \qquad \sqrt{\frac{Q_{01}^2 - 1}{Q_{01}^2 - 1}} = \frac{\xi_q}{\xi_a}\cdot\frac{v'_q}{v'_a}\cdot\frac{v'_a}{v'_g}.$$

Sofern nicht alle Werte x_i bezw. Q_i bei $i \geqq 0$ einander gleich sind, sind die beiden Faktoren $\frac{\xi_q}{\xi_a}$ und $\frac{v'_q}{v'_a}$ stets grösser als 1;

in Bezug auf den Faktor $\frac{\psi_a}{\psi_g}$ ist aber zu erwarten, dass er in der Regel kleiner als 1 ausfällt. weil nämlich die Werte Q_i mit zunehmendem x_i selbst zuzunehmen pflegen, woraus sich $\psi_g > \psi_a$ ergibt.

Wenn die Werte x_i bei $i > 0$ nicht erheblich voneinander verschieden sind, ist es gestattet, an Stelle von (179)

$$(181) \qquad \gamma = \frac{n Q_0^2 - \sum_1^n i\, Q_i^2}{(n-1)\left(\sum_1^n i\, Q_i^2 - n\right)}$$

zu setzen.

Nach Tabelle 8 differieren die Werte v_i^2 unerheblich von den Werten σ_i^2. Es ist daher klar, dass in diesem und ähnlichen Fällen, somit in Fällen, in denen sämtliche Quotienten Q_i^2 beträchtlich über 1 hinausgehen, die Werte v_i in (168) durch σ_i ersetzt werden können, ohne dass dadurch das numerische Ergebnis merklich berührt würde. Ein auf diese Weise, d. h. unter Vernachlässigung der Wirkungen des Zufalls berechneter Syndromiekoeffizient soll mit γ' bezeichnet werden. Aus

$$(182) \qquad \gamma' = \frac{s_0^2 \sigma_0^2 - \sum_1^n i\, s_i^2\, \sigma_i^2}{\left(\sum_1^n i\, s_i \sigma_i\right)^2 - \sum_1^n i\, s_i^2\, \sigma_i^2}$$

erhält man alsdann vermöge der Substitutionen

$$s_i^2 \sigma_i^2 = s_i^2 u_i^2 Q_i^2 = \frac{z-1}{z} s_i y_i (1 - y_i) Q_i^2 = \frac{z-1}{z} x_i (1 - y_i) Q_i^2,$$

sofern man, wie beim Übergang von (169) zu (172), annimmt, dass die Faktoren $(1 - y_i)$ bezw. $\frac{1 - y_i}{1 - y_0}$ nicht ins Gewicht fallen,

$$(183) \qquad \gamma' = \frac{x_0 Q_0^2 - \sum\limits_1^n i\, x_i Q_i}{\left(\sum\limits_1^n i\, x_i Q_i\right)^2 - \sum\limits_1^n i\, x_i Q_i}$$

und, wenn die Zahlen x_i bei $x_i > 0$ wenig voneinander verschieden sind, als weitere Annäherung

$$(184) \qquad \gamma' = \frac{n\, Q_0^2 - \sum\limits_1^n i\, Q_i}{\left(\sum\limits_1^n i\, Q_i\right)^2 - \sum\limits_1^n i\, Q_i}.$$

In dem Fall der Sterbeziffer in acht europäischen Staaten im Jahrzehnt 1901—10 ergeben die Formeln (168), (170), (171) und (172) der Reihe nach: $\gamma = 0{,}849$, $\gamma = 0{,}841$, $\gamma = 0{,}835$, $\gamma = 0{,}842$. Nach Formel (179) erhält man hier: $\gamma = 0{,}793$, was sich nach Massgabe von (180) darauf zurückführen lässt, dass im gegebenen Fall der Wert ξ_q den Wert ξ_a um etwa 2 % und der Wert ϑ_q den Wert ϑ_a um etwa 5 % übertrifft, während ϑ_a nur um etwa 4 % hinter ϑ_g zurückbleibt. Formel (181) ergibt $\gamma = 0{,}797$. Schliesslich findet man nach den Formeln (182), (183) und (184) der Reihe nach $\gamma' = 0{,}838$, $\gamma' = 0{,}836$ und $\gamma' = 0{,}867$. Wenn letzterer Wert von den beiden anderen relativ stark abweicht, so erklärt sich dies durch den Umstand, dass hier die Zahlen x_i (bei $i > 0$) erheblich voneinander divergieren.

Um in diesem Zusammenhang auf das Beispiel der Selbstmordziffer zurückzukommen, so führen da die Formeln (179) und (181) in guter Übereinstimmung mit Tabelle 6 zu: $\gamma = 0{,}366$ und $\gamma = 0{,}379$. Demgegenüber liefert Formel (182), wie auch Formel (183), die in diesem Fall, wo u_i nach Formel (114) berechnet worden ist, mit (182) genau übereinstimmt, den Wert $\gamma' = 0{,}164$ und Formel (184) den Wert $\gamma' = 0{,}146$. Die Ungleichung $\gamma' < \gamma$ erklärt sich wie folgt. Nach Analogie der Formeln (137) bis (140) erhält man

$$(185) \qquad \frac{1}{z} \sum_1^z {}_k \frac{a_{i,k}\, a_{j,k}}{\sigma_i \sigma_j} = \gamma_{i\,j}.$$

$$(186)\qquad \frac{\sum_1^n {}_i \sum_{i+1}^n {}_j\, s_i s_j \sigma_i \sigma_j \gamma'_{i,j}}{\sum_1^n {}_i \sum_{i+1}^n {}_j\, s_i s_j \sigma_i \sigma_j} = \gamma',$$

$$(187)\qquad s_0^2 \sigma_0^2 = \sum_1^n {}_i\, s_i^2 \sigma_i^2 + 2\gamma' \sum_1^n {}_i \sum_{i+1}^n {}_i\, s_i s_j \sigma_i \sigma_j,$$

$$(188)\qquad s_0^2 \sigma_0^2 = \sum_1^n {}_i\, s_i^2 \sigma_i^2 + \gamma' \left\{ \left(\sum_1^n {}_i\, s_i \sigma_i \right)^2 - \sum_1^n {}_i\, s_i^2 \sigma_i^2 \right\},$$

woraus (182) hervorgeht. Man hat nun:

$$a_{i,k} = d_{i,k} + e_{i,k} - f_i,$$

wo $f_i = y_i - p_i$, ferner, mit Rücksicht darauf, dass $\mathfrak{E}(d_{i,k}) = \mathfrak{E}(f_i) = 0$ und dass die Grössen $d_{i,k}$ und $d_{j,k}$, $d_{i,k}$ und f_j, f_i und $d_{j,k}$, f_i und f_j unabhängig von einander sind,

$$(189)\qquad \mathfrak{E}(a_{i,k} a_{j,k}) = e_{i,k} e_{j,k},$$

somit wegen (137) und (185)

$$\mathfrak{E}(\sigma_i \sigma_j \gamma'_{i,j}) = w_i w_j \gamma_{i,j},$$

oder auch

$$(190)\qquad \mathfrak{E}\left(\frac{\sigma_i}{w_i} \frac{\sigma_j}{w_j} \gamma'_{i,j} \right) = \gamma_{i,j}.$$

Zieht man alsdann in Betracht, dass $\mathfrak{E}(\sigma_i^2) = u_i^2 + w_i^2$, so sieht man ein, dass $\gamma'_{i,j}$ dem absoluten Betrag nach erwartungsgemäss hinter $\gamma_{i,j}$ zurückbleiben muss, und zwar um so beträchtlicher, je grösser die Werte u_i und u_j sind, d. h. je mehr sich bei den Relativzahlen $y_{i,k}$, $y_{j,k}$ der Zufall geltend macht oder je kleiner die ihnen entsprechenden Grundzahlen und Ereigniszahlen sind. Also ist zu erwarten, dass, wenn die Werte u_i relativ gross sind, auch das arithmetische Mittel γ' dem absoluten Betrag nach hinter dem arithmetischen Mittel γ bezw. hinter einem so oder anders berechneten empirischen Wert von γ zurückbleibt. Die Werte u_i sind aber in dem Beispiel der Selbstmordziffer im Deutschen Reich verhältnismässig hoch, während sie umgekehrt in dem Beispiel

der Sterbeziffer in acht europäischen Staaten kaum ins Gesicht fallen. Demnach erweist sich die Auseinanderhaltung der wesentlichen und der unwesentlichen Schwankungskomponenten, sofern die letzteren im Verhältnis zu den ersteren nicht verschwindend klein sind, als dringend geboten, wenn es in einem bestimmten Fall gilt, den Grad der Hemodromie oder Antidromie einzuschätzen. Unterlässt man es, die unwesentlichen Schwankungskomponenten zu eliminieren, so bleiben die zu eruierenden Zusammenhänge mehr oder weniger verschleiert, es sei denn, dass es sich um Häufigkeitszahlen handelt, die ihrer breiten Grundlage wegen als unbeeinflusst durch zufällige Ursachen betrachtet werden können.

Es möge bei dieser Gelegenheit auf eine von MORTARA konstruierte Masszahl hingewiesen werden, die mit γ' verwandt ist, aber dem absoluten Betrag nach stets in minus von γ' abweicht, wenn die Produkte $s_i \sigma_i$ (bei $i > 0$) nicht sämtlich einander gleich sind.[1] Bezeichnet man den in Frage stehenden MORTARA'schen Ausdruck mit γ_M und behält man im übrigen die bisherigen Bezeichnungen bei, so schreibt sich der nach MORTARA für die Bestimmung von γ_M massgebende Ansatz in der Form

$$(191) \qquad \gamma_M \cdot \frac{1}{n} \sum_1^n i\, s_i^2 \sigma_i^2 = \frac{1}{\frac{1}{2} n (n-1)} \sum_1^n i \sum_{i+1}^n j\, s_i s_j \sigma_i \sigma_j \gamma_{i,j} .$$

woraus

$$(192) \qquad \gamma_M = \frac{\sum_1^n i \sum_{i+1}^n s_i s_j \sigma_i \sigma_j \gamma_{i,j}}{\frac{1}{2}(n-1) \sum_1^n i\, s_i^2 \sigma_i^2}$$

oder auch

$$(193) \qquad \gamma_M = \frac{s_0^2 \sigma_0^2 - \sum_1^n i\, s_i^2 \sigma_i^2}{(n-1) \sum_1^n i\, s_i^2 \sigma_i^2}$$

[1] GIORGIO MORTARA, Sulle variazioni di frequenza di alcuni fenomeni demografici rari. Separatabdruck aus den Annali di Statistica, Serie V, vol. 4, Roma 1912, S. 6—7.

folgt.[1] Letztere Formel in Verbindung mit Formel (182) ergibt nunmehr:

$$(194) \qquad \frac{\gamma'_M}{\gamma'} = \frac{\left(\sum_1^n{}_i s_i \sigma_i\right)^2 - \sum_1^n{}_i s_i^2 \sigma_i^2}{n \sum_1^n{}_i s_i^2 \sigma_i^2 - \sum_1^n{}_i s_i^2 \sigma_i^2},$$

und da das quadratische Mittel der Produkte $s_i \sigma_i$, vorausgesetzt, dass sie nicht sämtlich einander gleich sind, das arithmetische Mittel derselbe Produkte übertrifft, so geht aus (194) hervor, dass unter dieser Voraussetzung γ'_M dem absoluten Betrag nach stets kleiner als γ' ausfallen muss.[2] Im besonderen erhielte man in dem Fall, wo alle Werte $\gamma'_{i,j}$ gleich 1 wären, $\gamma'_M < 1$, weil eben γ'_M, im Unterschied von γ', wie aus (192) ersichtlich, nicht den Charakter eines arithmetischen Mittels der Werte $\gamma'_{i,j}$ besitzt, es sei denn, dass $s_i \sigma_i = \text{const.}$ für $i = 1$ bis n. Schon aus diesem Grunde ist der von MORTARA in Vorschlag gebrachten Masszahl γ'_M gegenüber Vorsicht geboten, ganz abgesehen davon, dass diese Masszahl, darin mit γ' übereinstimmend, auf die störende Wirkung des Zufalls keine Rücksicht nimmt.[3] In dem Bei-

[1] Ich sehe hierbei davon ab, dass der von MORTARA (a. a. O., S. 7) mit r bezeichnete Ausdruck, der meinem γ'_M entspricht, auf den Fall eingestellt ist, wo sämtliche Werte s_i bei $i > 0$ gleich 1 sind. Das ist für das Wesen der Sache belanglos.

[2] Sofern man mit MORTARA (siehe die letzte Fussnote) für $i = 1$ bis n $s_i = \text{const.}$ setzt, ist die Annahme $s_i \sigma_i = \text{const.}$ mit dem Annahme $\sigma_i = \text{const.}$ identisch. Unter dieser Annahme erhält man auf der Grundlage von (182) und (193), wenn man für $i > 0$ $\sigma_i = \sigma$ setzt:

$$\gamma' = \gamma'_M = \frac{n\sigma_0^2 - \sigma^2}{(n-1)\sigma^2},$$

aber diese Beziehung findet sich schon bei YULE (a. a. O., S. 345), während es Mortara nach seinem eignen Zeugnis (a. a. O., S. 6, Fussnote 2) darauf ankam, über YULE hinauszugehen.

[3] MORTARA's Darlegungen in der zitierten Abhandlung gehören überhaupt nicht in das Gebiet der mathematischen Theorie des Zufalls, d. h. der Wahrscheinlichkeitsrechnung im eigentlichen Sinne des Wortes, und daran wird nichts durch den Umstand geändert, dass Mortara sich gelegentlich der Ausdrücke »Wahrscheinlichkeit» und »mathematische Erwartung», somit wahrscheinlichkeitstheoretischer Termini, bedient, weil bei ihm diese Ausdrücke nichts anderes als »statistische Häufigkeit» bezw. »arithmetisches Mittel» bedeuten. Schon dieser Ausschaltung des wahrscheinlichkeitstheoretischen Standpunkts wegen kann ich MORTARA's Ausführungen als eine Verallgemeinerung des Schemas meines »Gesetzes der kleinen Zahlen», wofür sie G. MONTEMARTINI in einem an FRANCESCO NITTI

spiel der Sterbeziffer in acht europäischen Staaten erhält man $\gamma_M = 0{,}703$ und in dem Beispiel der Selbstmordziffer im Deutschen Reich $\gamma_M = 0{,}100$.

Mein drittes und letztes Beispiel, das speziell zur Beleuchtung der Fälle von Paradromie und Antidromie dienen soll, bezieht sich auf den Verlauf der *Eheschliessungsziffer in verschiedenen Städten im Jahrzehnt 1899–1908*. Die betreffenden Werte der Eheschliessungsziffer sowie die von mir herangezogenen Einwohnerzahlen und absoluten Zahlen der Eheschliessungen sind dem von PH. FALKENBURG herausgegebenen Tabellenwerk »Statistique démographique des grandes villes du monde», Amsterdam 1912, entnommen.

Betrachtet man die Zahl der in einem Kalenderjahr geschlossenen Ehen als Ereigniszahl, so kann die zugehörige Grundzahl gleich der halben Einwohnerzahl, die für dasselbe Kalenderjahr ermittelt worden ist, gesetzt werden.[1] Demnach ergibt sich die betreffende Eheschliessungsziffer ($y_{i,k}$) dadurch, dass man die Zahl der Eheschliessungen durch die halbe Einwohnerzahl oder, was dasselbe ist, die Zahl der Eheschliessenden durch die ganze Einwohnerzahl dividiert. In den Tabellen 9 und 11 sind denn auch in Spalte 14 die betreffenden Einwohnerzahlen in Tausenden unter $2 \cdot 10^{-3} s_i$ aufgeführt. Eine weitere Eigentümlichkeit der Tabelle 9 (nicht aber der Tabelle 11) besteht darin, dass die Werte $y_{0,k}$ hier einfache arithmetische Mittel von je 6 Werten $y_{i,k}$ darstellen. Dies bedeutet in diesem Fall keine erhebliche Ungenauigkeit, weil die betreffenden 6 Werte von s_i wenig von einander abweichen. Im übrigen entsprechen die Tabellen 9 und 11 genau der Tabelle 7 und die Tabellen 10 und 12

(damals Minister für Landwirtschaft, Industrie und Handel) gerichteten Geleitwort zu MORTARA's Artikel ausgibt, unmöglich gelten lassen. Würde es sich bei MORTARA, der hauptsächlich die Bedingungen untersucht, von denen es abhängt, ob der Divergenzkoeffizient Q kleiner als 1, gleich 1 oder grösser als 1 ausfällt, wirklich um ein neues Schema wahrscheinlichkeitstheoretischen Charakters handeln, so hätte er von der richtig verstandenen mathematischen Erwartung von Q bezw. von Q^2 ausgehen müssen. Er fasst aber direkt Q^2 ins Auge und glaubt insbesondere etwas prinzipiell neues mit der Feststellung zu sagen, dass Q^2 unter bestimmten Umständen hinter 1 zurückbleibt, während doch niemand daran gezweifelt hat, dass nicht nur bei $\mathfrak{E}\,Q^2 = 1$, sondern auch bei $\mathfrak{E}\,(Q^2) > 1$ die untere Grenze für Q^2, rein arithmetisch betrachtet, immer Null ist. Übrigens hat MORTARA in keinem einzigen seiner zahlreichen Beispiele eine negative Differenz $Q - 1$ gefunden, die man nicht berechtigt wäre auf die Rechnung des Zufalls zu setzen.

[1] Vgl. LEXIS, a. a. O., S. 209.

genau der Tabelle 8. Sind in den Tabellen 11 und 12 die Berechnungen einmal mit Einschluss und ein anderes Mal unter Ausschluss New Yorks ausgeführt worden, so ist dies mit Rücksicht auf den aussergewöhnlichen Gang der Werte der Eheschliessungsziffer in New York geschehen, wo die gegen Ende des betrachteten Jahrzehnts ausgebrochene Krise einen jähen Sturz der Eheschliessungsziffer mit sich gebracht hat. In Tabelle 13 bezieht sich Spalte 3 auf den Städtekomplex Barcelona, Birmingham, Boston, Leipzig, Melbourne und Rom, Spalte 4 auf den Städtekomplex Berlin, London, Paris, Wien und New York und Spalte 5 auf den Städtekomplex Berlin, London, Paris und Wien.

Betrachtet man zunächst die Werte von Q_i, die sich für die sechs Städte im einzelnen ergeben haben (Tabelle 10, Spalte 8, $i = 1$ bis 6), so findet man, dass sie — im schärfsten Gegensatz zu den auf dem Lexis'schen Standpunkt beruhenden Erwartungen — durchschnittlich sogar etwas höher sind als der Wert Q_0, der sich auf dieselben sechs Städte zusammengenommen bezieht: das arithmetische Mittel jener sechs Q_i-Werte ist 3,42, ihr quadratisches Mittel beträgt 3,49, während sich Q_0 auf 3,17 stellt. Es steht damit im Einklang, dass drei jener Q_i-Werte Q_0 übertreffen und die anderen drei hinter Q_0 zurückbleiben. Entsprechend diesem Verhalten der Quotienten Q_i weisen die Grössen α_i die Eigentümlichkeit auf, dass α_1 bis α_6 sowohl im Durchschnitt (0,0444) wie im einzelnen den Wert α_0 (0,0167) erheblich überragen, während doch, der Lexis'schen Auffassung zufolge, zu erwarten gewesen wäre, dass sich $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_6$ auf demselben Niveau wie α_0 halten. Man hat es eben hier mit einem Beispiel schwach ausgesprochener, d. h. an Paradromie grenzender Antidromie zu tun, wie dies aus Tabelle 13, Spalte 3 direkt zu ersehen ist. Nach der genauesten Formel erhält man $\gamma = -0{,}054$. Was sodann den Fall der 5 Städte anlangt, so sinken hier die Werte Q_1 bis Q_5, deren arithmetisches bezw. quadratisches Mittel sich auf 10,30 bezw. 11,87 stellt, unter den Wert Q_0, der 13,53 beträgt (Tabelle 12, Spalte 8), herab, jedoch lange nicht in dem Masse, wie es nach Lexis zu erwarten wäre, und übertreffen die Grössen α_1 bis α_5 im einzelnen wie im Durchschnitt (0,0551) den Wert α_0 (0,0333), wenn auch verhältnismässig schwächer als im Fall der 6 Städte. Der Syn-

Tabelle 9.

Eheschliessungsziffer in sechs Städten 1899—1908.

i	Stadt bezw. Komplex von Städten	$10^3 y_{i,1}$	$10^3 y_{i,2}$	$10^3 y_{i,3}$	$10^3 y_{i,4}$	$10^3 y_{i,5}$	$10^3 y_{i,6}$	$10^3 y_{i,7}$	$10^3 y_{i,8}$	$10^3 y_{i,9}$	$10^3 y_{i,10}$	$10^3 y_i$	$2 \cdot 10^3 s_i^2$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	Die 6 Städte	18,70	18,42	18,20	18,60	18,02	18,03	18,00	18,55	19,02	18,22	18,38	3117,9
1	Barcelona	19,1	18,9	18,6	19,5	18,9	18,0	17,4	18,1	17,6	17,9	18,40	537,2
2	Birmingham	20,8	18,9	18,8	19,1	18,4	17,2	17,5	18,1	18,7	16,9	18,44	535,5
3	Boston	22,3	21,6	22,2	23,6	22,8	22,9	22,8	24,5	25,5	22,7	23,09	584,8
4	Leipzig	19,6	19,6	18,5	17,6	17,7	18,1	18,1	17,8	17,7	17,6	18,25	495,4
5	Melbourne	17,4	18,3	18,1	18,7	16,7	17,6	18,6	18,5	20,1	19,6	18,36	503,5
6	Rom	13,0	13,2	13,0	13,1	13,6	14,4	13,6	14,3	14,5	14,6	13,73	461,5

Tabelle 10.

Eheschliessungsziffer in sechs Städten 1899—1908.

i	Stadt bezw. Komplex von Städten	$10^6 \sigma_i^2$	$10^6 u_i^2$	$10^6 v_i^2$	$100 q_i$	Q_i^2	Q_i
1	2	3	4	5	6	7	8
0	Die 6 Städte	0,1045	0,0104	0,0941	1,67	10,05	3,17
1	Barcelona	0,4380	0,0605	0,3775	3,34	7,24	2,69
2	Birmingham	1,1324	0,0608	1,0716	5,63	18,62	4,32
3	Boston	1,2049	0,0694	1,1355	4,61	17,36	4,17
4	Leipzig	0,5401	0,0650	0,4751	3,79	8,31	2,88
5	Melbourne	0,9094	0,0644	0,8450	5,00	14,12	3,76
6	Rom	0,3901	0,0528	0,3373	4,24	7,39	2,72

Tabelle 11.

Eheschliessungsziffer in fünf bezw. vier Städten 1899—1908.

i	Stadt bezw. Komplex von Städten	$10^3 y_{i,1}$	$10^3 y_{i,2}$	$10^3 y_{i,3}$	$10^3 y_{i,4}$	$10^3 y_{i,5}$	$10^3 y_{i,6}$	$10^3 y_{i,7}$	$10^3 y_{i,8}$	$16^3 y_{i,9}$	$10^3 y_{i,10}$	$10^3 y_i$	$2 \cdot 10^3 s_i$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	Die Städte 1—5	19,23	19,30	19,03	19,02	19,15	19,16	19,36	20,35	20,65	18,26	19,35	14952,2
0	Die Städte 1—4	19,57	19,49	19,10	18,78	18,79	18,79	18,70	19,29	19,47	18,75	19,07	11093,1
1	Berlin	21,9	22,3	21,0	20,2	21,0	21,6	22,2	22,5	22,2	20,7	21,56	1962,8
2	London	18,6	18,0	17,6	17,8	17,5	17,0	16,9	17,1	17,0	15,9	17,34	4635,2
3	Paris	19,1	19,8	20,1	19,3	19,0	19,4	19,9	20,4	22,3	22,5	20,18	2686,1
4	Wien	20,3	20,0	19,3	19,0	19,2	19,0	17,7	19,0	18,7	17,8	19,00	1809,0
5	New York	18,1	18,7	18,8	19,8	20,2	20,2	21,2	23,3	23,8	17,0	20,11	3859,1

Tabelle 12.

Eheschliessungsziffer in fünf bezw. vier Städten 1899—1908.

i	Stadt bezw. Komplex von Städten	$10^6 \sigma_i$	$10^6 u_i^2$	$10^6 v_i^2$	$100\, a_i$	Q_i^2	Q_i
1	2	3	4	5	6	7	8
0	Die Städte 1—5	0,4182	0,0023	0,4159	3,33	183,07	13,53
0	Die Städte 1—4	0,1116	0,0030	0,1086	1,73	36,76	6,06
1	Berlin	0,5584	0,0193	0,5391	3,40	28,87	5,37
2	London	0,4884	0,0066	0,4818	4,01	73,80	8,59
3	Paris	1,4096	0,0132	1,3964	5,85	106,38	10,31
4	Wien	0,6040	0,0185	0,5855	4,03	32,57	5,71
5	New York	4,2509	0,0092	4,2417	10,24	462,51	21,51

Tabelle 13.

Eheschliessungsziffer in 6, 5 und 4 Städten 1899—1908. Die Werte von γ, γ und γ' nach verschiedenen Formeln.

	Formel Nr.	6 Städte	5 Städte	4 Städte
1	2	3	4	5
γ	168	−0,054	0,026	−0,182
	170	−0,043	0,141	−0,151
	171	−0,061	0,122	−0,103
	172	−0,052	0,024	−0,183
γ	179	−0,050	0,019	−0,173
	181	−0,038	0,076	−0,133
γ'	182	−0,049	0,026	−0,179
	183	−0,047	0,024	−0,179
	184	−0,036	0,108	−0,144

dromiekoeffizient, am genauesten berechnet, beträgt 0,026 (Tabelle 13, Spalte 4). Demnach liegt hier schwache, von Paradromie sich kaum unterscheidende Homodromie vor. Schliesslich bietet der Fall der vier Städte, wo sich das arithmetische bezw. quadratische Mittel der Werte Q_1 bis Q_4 zu 7,50 bezw. 7,78 berechnet, somit über den Wert Q_0, der 6,06 beträgt (Tabelle 12, Spalte 8), nicht unerheblich hinausgeht und wo der arithmetische Durchschnitt der Grössen α_1 bis α_4 (0,0432) die Grösse α_0 (0,0173) weit hinter sich lässt, das Bild *relativ* starker Antidromie. Beläuft sich doch in diesem Fall der Syndromiekoeffizient, nach der genauesten Methode berechnet, auf −0,182, wobei dessen untere Grenze, den Formeln (144) und (145) zufolge, −0,404 beträgt. Es kommt hierbei darauf an, dass laut Tabelle 11 die Eheschliessungsziffer in London und Wien eine sinkende und demgegenüber in Paris eine steigende Tendenz in dem betreffenden zehnjährigen Zeitraum aufweist.

Das Beispiel der Eheschliessungsziffer ist, wie mir scheint, ein schlagender Beweis für *die These, dass Homogeneität und*

Stabilität in einem antagonistischen Verhältnis zueinander stehen. Freilich bezieht sich dieses Beispiel, wie die beiden anderen, wie auch die theoretische Begründung der in Frage stehenden These, auf Vergleiche zwischen einer Totalmasse und den sie bildenden Partialmassen. Aber die These selbst behält bis zu einem gewissen Grade ihre Giltigkeit auch bei Gegenüberstellung von statistischen Massen, die nicht mehr in der Beziehung eines Ganzen zu seinen Teilen stehen. Wie ich das meine, möchte ich an einem Beispiel klarmachen. Es gibt in Preussen 37 Regierungsbezirke und 597 Kreise, so dass im Durchschnitt etwas über 16 Kreise auf einen Bezirk kommen. Gesetzt nun, wir hätten den Verlauf irgend welcher Häufigkeitszahl für sämtliche Bezirke und sämtliche Kreise verfolgt und festgestellt, dass in jedem Bezirk α_0 kleiner ausfällt als der Durchschnitt der Werte $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$, die sich auf die zum Bezirk gehörenden Kreise beziehen.[1] Nur im Fall der Isodromie, mit dem praktisch zu rechnen man keine Veranlassung hat, würde das nicht zutreffen. Demnach würden auch die 597 α-Werte, welche den Kreisen entsprechen, im ganzen genommen, einen höheren Durchschnitt ergeben als die 37 α-Werte, die für die Bezirke gelten, und wenn man aus jener Gruppe von 597 α-Werten und aus dieser Gruppe von 37 α-Werten je einen blindlings herausgriffe, so hätte man allen Grund zu erwarten, dass der erste dieser beiden Werte höher ausfällt als der zweite. Mit demselben Recht ist dann aber auch zu erwarten, dass im allgemeinen die grösseren Bezirke bezw. Kreise kleinere Werte von α liefern werden als die kleineren Bezirke bezw. Kreise. Hierzu verweise ich auf das Beispiel der Selbstmordziffer, wo es sich gezeigt hat, dass $\alpha_{\text{II}h}$ und $\alpha_{\text{III}h}$ mit abnehmenden Ereigniszahlen fast ausnahmslos zunehmen (Tabelle 5).

In dem Beispiel der Eheschliessungsziffer verhält es sich damit insofern anders, als, selbst wenn man von New York absieht, die grössten Städte der Welt im allgemeinen keine merklich kleineren Werte von α_i aufweisen als die Städte mit je einer halben Million Einwohner. Jene grössten Städte stehen eben in Bezug auf Homogeneität, was die Eheschliessungen anlangt, den kleineren nicht nach: die Unterschiede,

[1] Im Interesse der Einfachheit der Darstellung sehe ich davon ab, dass sich für α_i imaginäre Werte ergeben können.

die da zwischen den einzelnen Berufsgruppen oder auch Stadtvierteln bestehen, dürften sich in den beiden Kategorien von Grossstädten mit ungefähr derselben Stärke geltend machen. Wenn es also heisst »Die grössere Masse ist in der Regel stabiler als die kleinere«, so gilt dies eben nur in der Voraussetzung, dass die grössere Masse die weniger homogene ist.

Die These von dem antagonistischen Verhältnis zwischen Homogeneität und Stabilität findet ihre Anwendung auch auf den Fall, wo gleich grosse Massen von verschiedenem Grad der Homogeneität mit einander verglichen werden. Dass sich hier geringere Homogeneität mit grösserer Stabilität paart, erhellt namentlich aus einem Vergleich zwischen »natürlichen« und »künstlichen« Massen. So weist z. B. im Fall der Eheschliessungsziffer von den 11 dabei berücksichtigten Städten keine einzige ein α auf, das kleiner als 3 % wäre. Demgegenüber erhält man für die 6 Städte der Tabellen 9 und 10, wenn man diese Städte zusammenfasst, wodurch eine Gesamtbevölkerung von über 3 Millionen Menschen zustandekommt, $\alpha = 1{,}7$ %. Es lässt sich demzufolge sagen, dass eine städtische Bevölkerung von 3 Millionen Menschen einen höheren Wert von α, daher auch von Q, liefert, wenn sie die Einwohnerschaft einer einzigen Stadt bildet, als wenn sie sich auf mehrere Städte verteilt. Das Beispiel der Sterbeziffer 1901—10 bietet hierzu freilich kein Analogon. Die künstliche Masse, somit in diesem Fall der Komplex der 8 Staaten der Tabellen 7 und 8, mit einer Gesamtbevölkerung von 34 Millionen Menschen, ergibt $Q = 36{,}1$, und berechnet man Q für natürliche Massen von ungefähr derselben Grösse — das sind Oesterreich mit 27, Italien mit 33, Frankreich mit 39 und England mit 34 Millionen Einwohner —, so findet man als durchschnittlichen Wert von Q etwa 37. Es lässt sich also hier kein wesentlicher Unterschied zu Gunsten der künstlichen Masse konstatieren. Aber doch nur aus dem Grunde, weil im gegebenen Fall bei jenen 8 Staaten eine stark ausgesprochene Homodromie vorliegt, die es bewirkt, dass der künstliche Charakter der Masse nicht durchschlägt. Nähme man aber zu den 8 Staaten noch Irland, Bulgarien, Rumänien und Serbien hinzu, so würde Q auf etwa 27 herabsinken, obschon die summierte Einwohnerzahl sich auf etwa 51 Millionen erhöht hätte. Dies findet seine Erklärung in der Tat-

sache, dass in den genannten 4 Staaten die Sterbeziffer im Jahrzehnt 1901—10 keine abnehmende Tendenz zeigt und dass demgemäss die Homodromie durch das Hinzutreten dieser Staaten eine Abschwächung erfährt.[1]

Wie verhält sich nun die These, dass zwischen Homogeneität und Stabilität ein Antagonismus bestehe, zu den herrschenden Ansichten darüber? Was zunächst die Gruppe der ausschliesslich mathematisch orientierten Statistiker anlangt, auf die ich in der Einleitung zu meinem Vortrag Bezug genommen habe, so steht die bei Yule u. a. sich findende Aussage, dass die Ungleichartigkeit der Masse das Schwankungsmass herabdrücke, mit meiner These in keinem Zusammenhang. Jene Aussage beruht ja auf der Annahme, dass die Grundwahrscheinlichkeit sich von einem Zeitabschnitt zum anderen nicht ändert, während ich sie als veränderlich betrachte. Trotzdem würde sich allerdings ein Berührungspunkt zwischen dem von Yule und dem von mir eingenommenen Standpunkt ergeben, wenn man Anlass hätte, die

---

[1] Wenn ich mich in diesem Fall an Q, statt an a, halte, so entnehme ich die Berechtigung dazu daraus, dass sich Q dort als geeignetes Stabilitätsmass erweist, wo die Grund- bezw. Ereigniszahlen bei den miteinander zu vergleichenden Massen wenig von einander differieren. Sonst wird die Grösse der Schwankungen, welche die Grundwahrscheinlichkeit erfährt, nicht durch Q, sondern durch a ausgedrückt; oder auch durch v, sofern man davon Abstand nimmt, die betreffenden Schwankungen zu der Grundwahrscheinlichkeit in Beziehung zu setzen. So sieht denn auch Lexis selbst (a. a. O., S. 191) »das rationelle Mass der Dispersion» in der wesentlichen (physischen) Schwankungskomponente, als deren empirischer Wert eben v erscheint. Nur ist es nicht statthaft, bei Bestimmung von v für eine Anzahl analoger Reihen, wie es Lexis tut (a. a. O., S. 202—203), diejenigen Fälle, in denen sich für v imaginäre Werte ergeben, einfach zu ignorieren. Solch' eine unparitätische Verfahrungsweise führt offenbar zu einer Überschätzung des Durchschnittsmasses der betreffenden Schwankungen. Ebensowenig hat Lexis mit seiner Unterscheidung der beiden Fälle, wo die wesentliche (physische) Schwankungskomponente kleiner und wo sie gleich oder grösser wie die unwesentliche (normal-zufällige) Schwankungskomponente ist, das Richtige getroffen. Laut Formel (99) hat man in dem ersten dieser beiden Fälle (unter Weglassung des Index i) $Q^2 < 2$, somit $Q < 1{,}41$, in dem zweiten $Q^2 \geq 2$, somit $Q \geq 1{,}41$, und Lexis ist der Meinung (a. a. O., S. 202), dass wenn Q unterhalb der Grenze 1,41 liegt »die Stabilität der betreffenden Reihe dem Maximum nahe kommt, ja dasselbe vielleicht so nahe erreicht, als dies in der Wirklichkeit überhaupt zu erwarten ist». Demgegenüber verweise ich auf meine Formeln (71), (72) und (73), aus denen hervorgeht, dass der Spielraum, innerhalb dessen der zufällige Fehler von Q liegen kann, von z abhängt. Diesem Umstand trägt aber das Lexissche Kriterium $a < 1{,}41$ keine Rechnung. Etwas unkritisch haben sich Czuber (Wahrscheinlichkeitsrechnung II, 2. Aufl., S. 46) und Forcher (a. a. O., S. 245) Lexis insofern angeschlossen, als auch sie Gewicht darauf legen, ob Q hinter dem Wert 1,41 zurückbleibt oder diesen Wert erreicht bezw. überschreitet.

Quotienten $s_{i,k} : s_{0,k}$ als konstant, d. h. als unabhängig von k zu betrachten. In Wirklichkeit sind aber diese Quotienten, somit die Gewichte, welche den Partialmassen zukommen, in allen meinen Beispielen nicht nur nicht konstant, sondern sie weisen auch ihrerseits eine übernormale Dispersion auf, wodurch die Werte α_0 und Q_0 in die Höhe getrieben werden. Dementsprechend würden die von mir festgestellten Werte von α_0 und Q_0 bei $s_{i,k} : s_{0,k} = \text{const.}$ noch niedriger ausgefallen sein. So erhält man unter Zugrundelegung konstanter Gewichte $\frac{s_i}{s_0}$ an Stelle der variablen Gewichte $\frac{s_{i,k}}{s_{0,k}}$ z. B. in dem Fall der Eheschliessungsziffer in 5 Weltstädten $\alpha_0 = 0{,}0322$ statt $0{,}0333$ und $Q = 13{,}07$ statt $13{,}53$. Das für meine Beispiele charakteristische wirkliche Verhalten der betreffenden Gewichte ist also demjenigen Verhalten der Gewichte, auf welches YULE *seine* Behauptung, dass die Ungleichartigkeit der Masse die Stabilität erhöhe, zu stützen versucht, gerade entgegengesetzt. Es ist daher klar, dass diese Behauptung mit den von mir zutage geförderten statistischen Tatsachen und der Deutung, die ich ihnen gebe, absolut nichts zu tun hat. Im übrigen bekundet jene wissenschaftliche Richtung, der YULE angehört, für Probleme prinzipiellen Charakters, wie das hier zur Diskussion stehende, wenig Interesse.

Ganz anders ist es in dieser Beziehung um HARALD WESTERGAARD bestellt, der in diesem Zusammenhang schon aus dem Grunde genannt zu werden verdient, weil er den — leider sehr seltenen — Vorzug geniesst, in den beiden — man möchte fast sagen — feindlichen Lagern der »mathematischen Statistik» und der »Statistik ohne Zusatz» eine gesicherte und geachtete Position einzunehmen. WESTERGAARD ist sich der Tragweite der uns beschäftigenden Frage voll bewusst. Um aber zu zeigen, in welchem Sinne er sie beantwortet, tut man am besten, ihn selbst sprechen zu lassen.

»Wie bekannt», sagt er[1], »tritt in den meisten sozialen Erscheinungen eine gewisse Regelmässigkeit zutage. Viele Zahlen kehren von Jahr zu Jahr mit grösserer oder geringerer Genauigkeit wieder. Es hat sich gezeigt, dass diese Regelmässigkeit gewöhnlich am meisten hervortritt, wenn

[1] H. WESTERGAARD, Die Lehre von der Mortalität und Morbilität, 2. Aufl. Jena 1901, S. 2

man die Beobachtungen nach bestimmten Richtungen bearbeitet, wenn man z. B. nur diejenigen, welche sich auf dasselbe Alter beziehen, herausgreift, wenn man Stadt von Land, Männer von Frauen trennt u. s. w. Man hat nun in dieser Beziehung ein mit einem unklaren Ausdrucke sogenanntes Gesetz der *grossen* Zahlen aufgestellt, nach welchem ein auf jene Weise behandeltes Beobachtungsmaterial um so sicherere Vorausberechnungen zulassen soll, je umfangreicher es ist. Gewissermassen ist aber oft gerade das entgegengesetzte der Fall, so dass man auch von einem Gesetze der *kleinen* Zahlen reden könnte. Denn die Regelmässigkeit der Zahlen wird in der Regel nur dann mit dem Umfange des Materials zunehmen, wenn die Erweiterung des Beobachtungsfeldes nicht auf Kosten der Homogeneität geschieht. Eine kritiklose Anhäufung der Beobachtungen wird oft für die Regelmässigkeit nachteilig und ein kleines gleichartiges Material daher oft einem umfangreichen vorzuziehen sein. Es wird daher oft ein kleines Land der Mortalitäts- und Morbilitätsstatistik bessere Dienste leisten als ein grösseres Reich, das in sich eine bunte Menge verschiedenartiger Gebietsteile einschliesst.»

Dieser Stelle möge noch die folgende angereiht werden. »Es zeigt sich», lesen wir bei WESTERGAARD[1], »auf einzelnen Gebieten, namentlich, wie seiner Zeit LEXIS nachgewiesen hat, für das Geschlechtsverhältnis der Geborenen, dass die Übereinstimmung zwischen der Wahrscheinlichkeitslehre und den Beobachtungen eine überraschend grosse sein kann. Auf anderen Gebieten ist aber eine solche Übereinstimmung in der Regel nicht unmittelbar ersichtlich. So weicht die Geburtshäufigkeit von einem Jahr zum anderen gewöhnlich weit mehr vom Durchschnitt ab, als man nach der Wahrscheinlichkeitslehre erwarten sollte, und noch grösser sind häufig die Abweichungen der Sterblichkeitsstatistik. Aber sobald man die Beobachtungen einer angemessenen Teilung unterzieht, wird man fast immer eine *Annäherung* an die erwartungsmässige Verteilung der Abweichungen beobachten können, und diese wird um so vollkommener, je mehr man in die Tiefe dringt.»

Die in diesen beiden Zitaten unzweideutig formulierte Auffassung WESTERGAARD's, dass die Stabilität mit der Homo-

[1] Ebendaselbst, S. 196.

geneität Hand in Hand gehe, würde unbedingt zutreffen, wenn man berechtigt wäre: 1) für die (homogeneren) Partialmassen das Schema einer unveränderlichen Grundwahrscheinlichkeit als massgebend zu postulieren und 2) in Bezug auf die Gewichte oder »Anteilziffern«, mit denen die Partialmassen in die (weniger homogene) Totalmasse eingehen, anzunehmen, dass diese Anteilziffern stärker schwanken, als in dem Fall, wo auch sie empirische Werte unveränderlicher Wahrscheinlichkeiten wären. Westergaard könnte unter Umständen auch dann noch recht behalten, wenn die für die Partialmassen massgebenden Grundwahrscheinlichkeiten nur ganz schwach, die Anteilziffern hingegen sehr stark variieren würden. Die statistische Wirklichkeit bietet aber hierfür nur wenige Beispiele, und wenn Westergaard glaubt, seine Auffassung werde durch die Erfahrung bestätigt, so liegt es einfach daran, dass er bei seinen Vergleichen zwischen den Ergebnissen der Statistik und den Vorausberechnungen der Wahrscheinlichkeitstheorie Methoden anwendet, welche (ähnlich wie das Operieren mit Q) die Eigentümlichkeit haben, die wesentliche Schwankungskomponente um so weniger hervortreten zu lassen, je kleiner die betreffenden Grundzahlen bezw. Ereigniszahlen sind. So entsteht der Schein der grösseren Stabilität der Partialmassen.

Es liegt mir indessen gänzlich fern, gegen die durch eine weitgehende Zergliederung des Materials charakterisierte Forschungsweise Westergaard's, die er so meisterhaft handhabt, Stellung nehmen zu wollen und dieser Forschungsweise etwa das Operieren mit solch' monströsen statistischen Gebilden, wie meine Komplexe von mehreren Grossstädten, als die fruchtbarere Methode entgegenzusetzen. Ganz im Gegenteil! Wird da für einen derartigen Komplex z. B. $\alpha = 1{,}7$ % festgestellt, so meine ich, dass dieses Ergebnis an und für sich wertlos ist, während umgekehrt die Tatsache, dass sich für die Grossstädte, einzeln genommen, $\alpha = 4$ bis 6 % ergibt, wohl einiges Interesse bietet — als Indikator des Einflusses, den die Wellenbewegungen des Wirtschaftslebens auf die Heiratsneigungen und Heiratsmöglichkeiten ausüben.[1] Ja, ich bin

[1] Ich sage: die Wellenbewegungen, denn nur bei »undulatorischen« Reihen, wie sie Lexis nennt, ist das α von Bedeutung, bei »evolutorischen« hingegen, wofür der Gang der Sterbeziffer 1901—10 ein Beispiel bietet,

auch der Meinung, dass es sich erst recht lohnen würde, α für einzelne Stadtviertel oder Berufsschichten zu bestimmen. Ich befinde mich also, was die Bewertung der Ergebnisse feingegliederter statistischer Untersuchungen anlangt, mit WESTERGAARD durchaus im Einklang. Ich glaube nur, wie ich das übrigens bereits vor 23 Jahren ihm gegenüber geltend gemacht habe[1], dass seine in die Tiefe dringende Verfahrungsweise durch Rücksichten auf eine grössere Stabilität der Zahlenwerte, die hierbei (angeblich) herauskommen, nicht motiviert zu werden braucht.

AL. KAUFMANN huldigt ebenfalls der Ansicht, dass sich grössere Homogeneität mit grösserer Stabilität, kleinere Homogeneität mit kleinerer Stabilität verbindet, und er bringt diese Ansicht mit der von LEXIS und anderen zutage geförderten Tatsache, dass Q durch Einschränkung des Beobachtungsfeldes reduziert wird, in Zusammenhang. Man müsse beachten, meint KAUFMANN[2], dass »die statistisch ermittelten *wirklichen* Abweichungen vom Durchschnitt nicht nur von zufälligen Umständen, sondern auch von *verschiedenen*, einzelne Gruppen von Fällen einseitig beeinflussenden Ursachen örtlichen und zeitlichen Charakters hervorgerufen» würden. »Es ist nun aber von selbst verständlich», heisst es dann weiter bei KAUFMANN, »dass in einem grösseren Gebiete derartige Nebenursachen stärker vertreten sein werden als in einem kleineren, dass sie unter einer grossen Bevölkerungsmasse eine grössere Verschiedenheit aufweisen werden als unter einer kleinen. Der Inbegriff der Bedingungen, die die Geburten, Eheschliessungen, Verbrechen, Selbstmorde u. s. w. im gesamten Deutschland beeinflussen, wird natürlicherweise verschiedenartiger und komplizirter sein als in irgend einem der deutschen Einzelstaaten, für das gesamte Preussen komplizirter als für jede einzelne Provinz des preussischen Staates, in Berlin wird der entsprechende Ursachenkomplex ein viel bunteres Durcheinander aufweisen als in Wiesbaden oder

---

nicht. Man bedenke nur, dass hier α bei einem gegebenen »Gesetz» der Entwicklung grösser oder kleiner ausfällt, je nachdem man eine längere oder kürzere Periode zum Gegenstand der Betrachtung macht.

[1] Kritische Betrachtungen zur theoretischen Statistik, Jahrbücher f. Nat.-Oek. u. Stat. N. F. Bd. VIII (1894), S. 667—675.

[2] AL. KAUFMANN, Theorie und Methoden der Statistik, Tübingen 1913, S. 92.

Freiburg, in diesen Städten ein bunteres, als in Trakehnen oder Rothenburg. . . . Es ist deshalb nur etwas ganz natürliches, dass auch die Abweichungen von dem in der Durchschnittsgrösse verkörperten Normaltypus für das ganze Preussen grösser sein werden als für Braunschweig, für Berlin grösser als für Freiburg . . . und *dies* ist es gerade, was in dem grösseren Unterschied des nach »physischer (sic) Methode« berechneten Masses der Abweichungen von dem nach »kombinatorischer« Berechnung zu erwartenden seinen Ausdruck findet.« »Mit der Verengerung des Beobachtungsfeldes«, bemerkt KAUFMANN an einer anderen Stelle[1], »also mit dem Übergang vom Lande zur Provinz, von einem sonstigen grösseren zu einem kleineren Gebiete . . . wird . . . der Inbegriff der die betreffende Erscheinung beeinflussenden Bedingungen immer homogener, es verengert sich also der Spielraum für Variationen der Grundwahrscheinlichkeit, und es werden hiermit diejenigen Schwankungen der empirischen statistischen Zahlen schwächer, in denen solche Variationen ihren Ausdruck finden.«

KAUFMANN gibt sich, wie man sieht, mit der Lexisschen Erklärung des Kleinerwerdens von Q mit dem Kleinerwerden der Gruppen, auf welche sich Q bezieht, nicht zufrieden. Er hält vielmehr eine Ergänzung dieser Erklärung für geboten — eine Ergänzung, die man, unter Hinweis auf Formel (51), in die Worte fassen kann, dass Q beim Übergang von grösseren zu kleineren Gruppen nicht nur deshalb abnehme, weil sich s verringere, sondern zugleich aus dem Grunde, weil sich auch w (wegen zunehmender Homogeneität) verringere. Dabei hat es KAUFMANN seltsamer Weise unterlassen, erst zu untersuchen, ob die Abnahme von Q genau in dem *gleichen*, in einem *schwächeren* oder in einem *stärkeren* Verhältnis erfolgt, wie es der Voraussetzung eines konstanten w entsprechen würde. Nur wenn der letzte dieser drei möglichen Fälle vorläge, würde KAUFMANN's ergänzende Erklärung überhaupt in Frage kommen. Wir wissen aber, dass dieser dritte Fall, somit der Fall, wo die wesentliche Schwankungskomponente mit abnehmendem Umfang der Gruppen kleiner wird, nicht die Regel, sondern die Ausnahme bildet. Ja, noch mehr: sofern es sich um Vergleiche zwischen einer Totalgruppe und

[1] Ebendaselbst, S. 97.

dem Durchschnitt der Partialgruppen, aus denen sie sich zusammensetzt, handelt — und Kaufmann stellt sogar in erster Linie Vergleiche zwischen ganzen Ländern und ihren Teilen an — ist der in Frage stehende Fall schon aus mathematischen Gründen glattweg ausgeschlossen, weil nämlich der Syndromiekoeffizient nicht über 1 hinausgehen kann. Es zeigt sich also, dass Kaufmann's Ausführungen über die angeblich grössere Stabilität der kleineren Gruppen von den Tatsachen widerlegt und von der Theorie als gänzlich unhaltbar erwiesen werden. Damit wird aber auch seine Auffassung von den Beziehungen zwischen Homogeneität und Stabilität hinfällig.

Man wird kaum fehlgehen, wenn man annimmt, dass die überwiegende Mehrzahl auch derjenigen Theoretiker der Statistik, welche gänzlich unbeeinflusst von den Lehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind, in Bezug auf die Frage, wie die grössere oder kleinere Homogeneität einer statistischen Masse auf den Grad der Stabilität der für diese Masse geltenden Zahlenwerte einwirkt, denselben Standpunkt wie Westergaard und Al. Kaufmann vertreten. Wie steht es aber um die Praktiker? Ich meine damit nicht sowohl die Produzenten der Statistik, die statistischen Techniker, als vielmehr die Konsumenten der Statistik, welche von Berufswegen statistische Ergebnisse zur Grundlage und Richtschnur ihrer Tätigkeit machen, und da habe ich nicht zuletzt die Spezialisten des Versicherungsfachs im Auge. Es brauchen keine gelehrten Vertreter des Faches zu sein. Ich denke eher an diejenigen Männer der Praxis, die ausschliesslich aus der Empirie ihre Weisheit schöpfen. Diese haben längst erkannt, dass es im Interesse eines ruhigen Ganges des Versicherungsgeschäftes liege, mithin zu einer grösseren Stabilität der Zahlenwerte, in denen sich dieser Geschäftsgang wiederspiegelt, beitrage, wenn die Versicherungsfälle sich nach örtlichen und anderen Gesichtspunkten über einen möglichst weiten Spielraum verteilen, statt sich auf wenige Orte und wenige Arten von Risiken zu konzentrieren. So paradox demnach auf den ersten Blick die Behauptung erscheinen mag, dass zwischen Homogeneität und Stabilität ein gegensätzliches Verhältnis besteht, findet man bei genauerer Überlegung, dass sich hierin die Theorie mit dem begegnet, was gleichsam instinktiv von

der Praxis erkannt und beherzigt worden ist. Hiermit geschieht aber der Theorie der Statistik, wie mir scheint, ebensowenig Abbruch, wie etwa die moderne Hygiene dadurch diskreditiert wird, dass sie zu einer Sanktionierung von Gesundheitsregeln gelangt, welche bereits die alten Aegypter oder die alten Römer, unabhängig von jeder Bakteriologie und Mikroskopie, in Ehren hielten. Besteht doch die Aufgabe der Theorie nicht sowohl darin, die Praxis auf den Kopf zu stellen, als vielmehr — von dem eigentlichen Gebiet der Technik bis zu einem gewissen Grade abgesehen — hauptsächlich darin, ihr, der Praxis, zu einer grösseren Bewusstheit und Folgerichtigkeit zu verhelfen.

Gestatten Sie mir zum Schluss noch ein paar Worte über das Verhältnis des hier gebotenen zu dem Lexis'schen Standpunkt. Lexis hat ja keine Veranlassung genommen, sich explicite über die Frage, der mein Vortrag gewidmet gewesen ist, zu äussern, aber seine Erwartungen in Bezug auf die Verringerung der Q-Werte mit dem Übergang von der Totalmasse zu den Partialmassen zeigen, dass ihm gerade das punctum saliens meiner heutigen Darlegungen entgangen ist. Im wesentlichen habe ich jedoch an seinem Schema einer serienweise variierenden Grundwahrscheinlichkeit festgehalten und dieses Schema nur gewissermassen zu verfeinern versucht, wobei ich von einer Konfrontierung jener Lexis'schen Erwartungen mit der Wirklichkeit ausging. Genau so ist Lexis selbst mit dem alten klassischen oder Poissonschen Schema verfahren. Auch bei ihm: der Appell an die Erfahrung, die Feststellung einer typischen Unstimmigkeit, die Modifizierung des überlieferten Schemas als letzter Schritt. Der ganze Vorgang entspricht wohl, hier wie dort, der Art, wie die wissenschaftliche Erkenntnis normaler Weise fortschreitet. Es handelt sich also bei meinen Darlegungen um nichts anderes, als um eine Fortführung dessen, was Lexis auf dem Gebiet der theoretischen Statistik geleistet hat. Die Bedeutung dieser Leistungen wird aber am wenigsten dadurch geschmälert, dass gezeigt wird, wie auf ihnen weiter gebaut werden kann.

Nachtrag.

Der Ausdruck γ erscheint, der Formel (138) zufolge, als gewogenes arithmetisches Mittel der Grössen $\gamma_{i,j}$, die, wie aus (137) zu ersehen ist, nach dem üblichen Schema der Korrelationstheorie gebildet sind. Gegen dieses Schema lässt sich namentlich einwenden, dass es keine Rücksicht auf den Umstand nimmt, ob für die beiden Grössen, deren Variationen miteinander verglichen werden, die Abweichungen vom Durchschnitt sich im Verhältnis zu diesem auf einigermassen gleichem oder auf verschiedenem Niveau bewegen. Der numerische Wert des Korrelationskoeffizienten wird davon in keinèr Weise berührt. Es könnte dem in folgender Weise abgeholfen werden.

Es seien z verschiedene Einzelwerte der einen Grösse A mit A_k und der anderen Grösse B mit B_k, die Durchschnittswerte von A und B mit A_0 bezw. B_0 und die Abweichungen $A_k - A_0$ und $B_k - B_0$ mit a_k und b_k bezeichnet. Setzt man noch

$$\frac{1}{z}\sum_1^z{}_k\, a_k^2 = \delta_1^2, \qquad \frac{1}{z}\sum_1^z{}_k\, b_k^2 = \delta_2^2,$$

so ergibt sich der Korrelationskoeffizient (r) in der üblichen Weise aus

(195) $$r = \frac{\sum_1^z{}_k\, a_k\, b_k}{z\,\delta_1\,\delta_2}$$

oder auch, wenn man die Bezeichnungen

$$\frac{\delta_1}{A_0} = \mu_1, \quad \frac{\delta_2}{B_0} = \mu_2$$

einführt, aus

(196) $$r = \frac{\sum_1^z{}_k\, a_k b_k}{z\,A_0 B_0\,\mu_1\,\mu_2}.$$

Man bilde nun eine Grösse $\check{r}$, die, wie r, der Bedingung genügt, dass sie, absolut genommen, den Wert 1 niemals übertrifft und ausserdem, im Unterschied von r, den Wert 1

bezw. -1 nur dann erreicht, wenn $\mu_1 = \mu_2$. Den gestellten Forderungen entspricht z. B. der einfache Ansatz:

(197) $$\tilde{r} = r \frac{2 \mu_1 \mu_2}{\mu_1^2 + \mu_2^2},$$

welcher zu

(198) $$\tilde{r} = \frac{2 \sum_{1}^{z} k a_k b_k}{z A_0 B_0 (\mu_1^2 + \mu_2^2)}$$

oder

(199) $$\tilde{r} = \frac{2 A_0 B_0 \sum_{1}^{z} k a_k b_k}{z (B_0^2 \delta_1^2 + A_0^2 \delta_2^2)}$$

führt.

Ein fingiertes Beispiel möge den Unterschied zwischen r und $\tilde{r}$ illustrieren. Es handelt sich in diesem Beispiel um die Korrelation zwischen ein und derselben Reihe der Werte von A, nämlich

A_1	A_2	A_3
8	5	2

und fünf verschiedenen Reihen der Werte von B, die in Tabelle 14 zusammengestellt sind. Es ist $z = 3$, $A_0 = 5$, $\delta_1^2 = 6$.

Tabelle 14.

Reihe Nr.	B_1	B_2	B_3	B_0	$z \delta_2^2$	$\sum_{1}^{z} k a_k b_k$	r	$\tilde{r}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	24	18	12	18	72	36	1	0,849
2	24	14	4	14	200	60	1	0,985
3	24	15	6	15	162	54	1	1
4	24	20	16	20	32	24	1	0,6
5	24	23	22	23	2	6	1	0,144

Nach Analogie von $\tilde{r}$, wie es durch Formel (198) dargestellt ist, erhält man an Stelle von $\gamma_{i,j}$, das durch (137) gegeben war, einen neuen mit $\tilde{\gamma}_{i,j}$ zu bezeichnenden Koeffizienten, der die Form

$$(200) \qquad \check{\gamma}_{i,j} = \frac{2 \sum_{1}^{1} {}^{k}\, e_{i,k}\, e_{j,k}}{z\, p_i\, p_j\, (\beta_i^2 + \beta_j^2)}$$

annimmt. Man bilde nunmehr aus den Werten $\check{\gamma}_{i,j}$ ein gewogenes arithmetisches Mittel $\check{\gamma}$, und zwar in der Weise, dass man als Gewichte die Ausdrucke

$$s_i\, s_j\, p_i\, p_j\, (\beta_i^2 + \beta_j^2)$$

oder die ihnen identischen Ausdrucke

$$m_i\, m_j\, (\beta_i^2 + \beta_j^2)$$

verwendet. Demnach erhält man

$$(201) \qquad \check{\gamma} = \frac{2 \sum_{1}^{n} {}^{i} \sum_{i+1}^{n} {}^{j} \sum_{1}^{z} {}^{k}\, s_i\, s_j\, e_{i,k}\, e_{j,k}}{z \sum_{1}^{n} {}^{i} \sum_{i+1}^{n} {}^{j}\, m_i\, m_j\, (\beta_i^2 + \beta_j^2)},$$

und diese Formel in Verbindung mit Formel (136) ergibt vermöge der Substitution $s_i w_i = m_i \beta_i$

$$m_0^2 \beta_0^2 = \sum_{1}^{n} {}^{i}\, m_i^2\, \beta_i^2 + \check{\gamma} \sum_{1}^{n} {}^{i} \sum_{i+1}^{n} {}^{j}\, m_i\, m_j\, (\beta_i^2 + \beta_j^2),$$

woraus wegen der Beziehung

$$\sum_{1}^{n} {}^{i} \sum_{i+1}^{n} {}^{j}\, m_i\, m_j\, (\beta_i^2 + \beta_j^2) = m_0 \sum_{1}^{n} {}^{i}\, m_i\, \beta_i^2 - \sum_{1}^{n} {}^{i}\, m_i^2 \beta_i^2$$

$$(202) \qquad \check{\gamma} = \frac{m_0^2 \beta_0^2 - \sum_{1}^{n} {}^{i}\, m_i^2\, \beta_i^2}{m_0 \sum_{1}^{n} {}^{i}\, m_i\, \beta_i^2 - \sum_{1}^{n} {}^{i}\, m_i^2\, \beta_i^2}$$

folgt.

Stellt man letztere Formel der Formel (163), die sich ja mit der Formel (143) deckt, gegenüber, so findet man leicht, dass $\check{\gamma} < \gamma$, den Fall ausgenommen, wo $\beta_i = \text{const.}$ für $i = 1$ bis n. Man denke sich zum Zweck des Beweises, dass

die Werte β_i für $i = 1$ bis n nach ihrer Grösse geordnet sind, so dass $\beta_{i+1} \geq \beta_i$, und setze

$$\frac{\sum_{1}^{n} {}_i m_i \beta_i}{\sum_{1}^{n} {}_i m_i} = \beta .$$

Dabei sollen $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_{h-1}$ kleiner und $\beta_h, \beta_{h+1} \ldots \beta_n$ grösser oder, genauer formuliert, nicht kleiner als β sein. Man hat demnach

$$\sum_{1}^{h-1} {}_i m_i (\beta_i - \beta) + \sum_{h}^{n} {}_i m_i (\beta_i - \beta) = 0 ,$$

und es lassen sich zugleich die beiden Ungleichungen

$$\sum_{1}^{h-1} {}_i m_i \beta_i (\beta_i - \beta) > \beta_h \sum_{1}^{h-1} {}_i m_i (\beta_i - \beta) ,$$

$$\sum_{h}^{n} {}_i m_i \beta_i (\beta_i - \beta) > \beta_h \sum_{h}^{n} {}_i m_i (\beta_i - \beta)$$

aufstellen, deren Addierung zu

$$\sum_{1}^{n} {}_i m_i \beta_i^2 - \beta \sum_{1}^{n} {}_i m_i \beta_i > 0 ,$$

mithin zu

$$(203) \qquad m_0 \sum_{1}^{n} {}_i m_i \beta_i^2 > \left(\sum_{1}^{n} {}_i m_i \beta_i \right)^2$$

führt. Damit ist aber, wie aus einem Vergleich zwischen (163) und (202) erhellt, bewiesen, dass in der Tat $\check{\gamma} < \gamma$. Dieses Ergebnis entspricht durchaus der Tatsache, dass $\check{r}$ bezw. $\check{\gamma}_{i.j}$ einen »strengeren» Massstab der Korrelation bezw. der Syndromie darstellt als r bezw. $\gamma_{i.j}$. Jedoch darf aus $\check{\gamma}_{i.j} < \gamma_{i.j}$ nicht ohne weiteres auf $\check{\gamma} < \gamma$ geschlossen werden[1], weil nämlich die Gewichte in dem Fall von γ und in dem Fall von $\check{\gamma}$ nicht dieselben sind.

[1] Der Fall, wo für sämtliche Kombinationen i, j die beiden Werte $\gamma_{i.j}$ und $\check{\gamma}_{i.j}$ einander gleich sind, setzt voraus, dass $\beta_i = \text{const.}$ für $i = 1$ bis n, und scheidet daher hier von der Betrachtung aus.

Setzt man in (202) für m_i und β_i^2 deren empirische Werte x_i und α_i^2 ein, so kommt man auf

(204) $$\check{\gamma} = \frac{x_0^2 \alpha_0^2 - \sum_1^n {}^i x_i^2 \alpha_i^2}{x_0 \sum_1^n {}^i x_i \alpha_i^2 - \sum_1^n {}^i x_i^2 \alpha_i^2},$$

und unter der Annahme, dass keiner der Werte α_i^2 negativ bezw. keiner der Werte α_i imaginär ist, liesse sich in der nämlichen Weise, wie (203) abgeleitet worden ist,

(205) $$x_0 \sum_1^n {}^i x_i \alpha_i^2 > \left(\sum_1^n {}^i x_i \alpha_i\right)^2$$

ableiten. So muss denn auch ein nach Formel (204) berechneter Wert von $\check{\gamma}$, sofern nicht sämtliche Werte α_i^2 für $i = 1$ bis n einander gleich sind, seinem absoluten Betrag nach stets kleiner ausfallen als ein nach Formel (169) oder der mit ihr identischen Formel (168) berechneter Wert von γ.

Mit Rücksicht auf (107) und (108) geht (204) unter Vernachlässigung der Faktoren $\frac{1 - y_i}{1 - y_0}$ in

(206) $$\check{\gamma} = \frac{x_0 Q_0^2 - \sum_1^n {}^i x_i Q_i^2}{x_0 \left(\sum_1^n {}^i Q_i^2 - n + 1\right) - \sum_1^n {}^i x_i Q_i^2}$$

über. Es ergibt sich somit eine vollständige Übereinstimmung zwischen $\check{\gamma}$ und γ, wenn man letztere Grösse nach Formel (179) berechnet, die ja ebenfalls auf einer Vernachlässigung der Faktoren $\frac{1 - y_i}{1 - y_0}$ beruht, im übrigen aber ganz anders als Formel (205) begründet worden ist.

In dem Fall, wo die Zahlen x_i bei $i > 0$ nicht sehr verschieden voneinander sind, erhält man aus (204) als Näherungsformel

$$(207) \qquad \gamma' = \frac{n^2 \alpha_0^2 - \sum_1^n i\, \alpha_i^2}{(n-1) \sum_1^n i\, \alpha_i}\,.$$

Wegen (105) und (106) lässt sich aber (204) auch in der Form

$$(208) \qquad \check{\gamma} = \frac{s_0^2 v_0^2 - \sum_1^n i\, s_i^2\, v_i^2}{s_0\, y_0 \sum_1^n i \frac{s_i\, v_i}{y_i} - \sum_1^n i\, s_i^2\, v_i^2}$$

darstellen, und ersetzt man hierin die Grössen v_i durch σ_i, so findet man als Gegenstück zu Formel (182)

$$(209) \qquad \check{\gamma}' = \frac{s_0^2 \sigma_0^2 - \sum_1^n i\, s_i^2 \sigma_i^2}{s_0\, y_0 \sum_1^n i \frac{s_i\, \sigma_i}{y_i} - \sum_1^n i\, s_i^2\, \sigma_i^2}\,.$$

Das Gemeinsame zwischen γ' und $\check{\gamma}'$ besteht darin, dass beide ohne Rücksichtnahme auf die Wirkungen des Zufalls aus der statistischen Erfahrung bestimmt werden. Bei $s_i =$ const. und $y_i =$ const. für $i = 1$ bis n verwandelt sich (209) in

$$(210) \qquad \check{\gamma}' = \frac{n^2 \sigma_0^2 - \sum_1^n i\, \sigma_i^2}{(n-1) \sum_1^n i\, \sigma_i^2}\,,$$

und man findet $\check{\gamma}' = \gamma'_M$, wenn man auch in (193) $s_i =$ const. für $i = 1$ bis n setzt. Demzufolge verhält es sich mit der Mortaraschen Methode so, dass, während sie unter Zugrundelegung des üblichen Korrelationskoeffizienten r als dem Fall $s_i \sigma_i =$ const. (für $i = 1$ bis n) angepasst erscheint, man sie als gebunden an die beiden Voraussetzungen $s_i =$ const. und $y_i =$ const. (für $i = 1$ bis n) betrachten kann[1], wenn man von dem modifizierten Korrelationskoeffizienten $\check{r}$ ausgeht.

[1] Die erste dieser beiden Voraussetzungen macht übrigens MORTARA selbst. Vgl. meine Fussnote 1 auf S. 59.

Die Ergebnisse der numerischen Auswertung der beiden Formeln (204) und (207) sind für die drei behandelten Beispiele in Tabelle 15 wiedergegeben.

Tabelle 15.

Werte des Syndromiekoeffizienten $\check{\gamma}$.

Formel Nr.	Selbstmord-ziffer	Sterbe-ziffer	Eheschliessungsziffer		
			6 Städte	5 Städte	4 Städte
1	2	3	4	5	6
204	0,366	0,802	−0,052	0,020	−0,172
207	0,571	0,790	−0,035	0,129	−0,129

Die nach Formel (204) bestimmten Werte von $\check{\gamma}$ fallen mit den auf S. 56 und 64 mitgeteilten Werten von γ, denen Formel (179) zugrunde liegt, entweder ganz oder nahezu zusammen, ersteres im Fall der Selbstmordziffer, weil hier die Faktoren $\frac{1-y_i}{1-y_0}$ dadurch eliminiert sind, dass die Werte u_i nicht, wie sonst, nach Formel (113), sondern nach Formel (114) berechnet worden sind, letzteres in den übrigen vier Fällen. Was ferner die auf Formel (207) beruhenden Werte von $\check{\gamma}$ anlangt, so weichen sie, wie zu erwarten war, von denjenigen, zu denen Formel (204) führt, namentlich dort erheblich ab, wo die Zahlen x_i stark voneinander verschieden sind. Wenn sich aber da auch zwischen den nach Formel (207) berechneten Werten von $\check{\gamma}$ und den entsprechenden auf Formel (181) sich gründenden Werten von $\bar{\gamma}$ zum Teil beträchtliche Unstimmigkeiten zeigen, so liegt es daran, dass die rechnungsmässige Gleichsetzung der Zahlen x_i sehr wohl eine verschiedene Wirkung auf das Resultat ausüben kann, je nachdem diese Zahlen bei den Grössen Q_i^2 in erster oder bei den Grössen α_i^2 in zweiter Potenz als Multiplikatoren auftreten. Schliesslich möge darauf hingewiesen werden, was immerhin nicht ganz ohne Interesse ist, dass sich in keinem der betrachteten Fälle durch Anwendung einer weniger genauen Formel das Vorzeichen des Syndromiekoeffizienten geändert hat.

On certain inequalities between mean values, and their application to actuarial problems.

By J. F. Steffensen.

Let us assume that two integrable[1] functions $f(t)$ and $\varphi(t)$ are defined in an interval $a < t < b$, that $f(t)$ never increases, and that $0 \leq \varphi(t) \leq 1$.

Then we can prove that[2]

$$\int_{b-\lambda}^{b} f(t)\,dt \leq \int_{a}^{b} f(t)\,\varphi(t)\,dt \leq \int_{a}^{a+\lambda} f(t)\,dt, \tag{1}$$

where

$$\lambda = \int_{a}^{b} \varphi(t)\,dt. \tag{2}$$

Before proceeding to the rigorous proof we may observe that the inequalities (1) are almost obvious. For instance, dividing them by λ, the expression

$$\frac{\int_a^b f(t)\,\varphi(t)\,dt}{\int_a^b \varphi(t)\,dt}$$

[1] That is: *possessing an integral* from a to b. We do not require, that this integral can be expressed by previously known functions.

[2] If $\varphi\,t = 1$ or $\varphi\,t = 0$ or $f(t) = \text{const.}$ for all t, the two limits in (1) coincide.

may be regarded as a *weighted mean* of $f(t)$, the weights being $\varphi(t)\,dt$, and the total of weights λ. But in the mean

$$\frac{1}{\lambda}\int_a^{a+\lambda} f(t)\,dt$$

the same total of weights has been concentrated round the distance from a to $a+\lambda < b$, that is: round the larger values of $f(t)$, and each of these values is weighted with the maximum weight.

The arithmetical proof is easy. Remembering the assumed properties of $f(t)$ and $\varphi(t)$, the second inequality (1) may be derived as follows.

$$\int_a^{a+\lambda} f(t)\,dt - \int_a^b f(t)\varphi(t)\,dt$$

$$= \int_a^{a+\lambda} [1-\varphi(t)]\,f(t)\,dt - \int_{a+\lambda}^b f(t)\varphi(t)\,dt$$

$$> f(a+\lambda)\int_a^{a+\lambda} [1-\varphi(t)]\,dt - \int_{a+\lambda}^b f(t)\varphi(t)\,dt$$

$$= f(a+\lambda)\left[\lambda - \int_a^{a+\lambda}\varphi(t)\,dt\right] - \int_{a+\lambda}^b f(t)\varphi(t)\,dt$$

$$= f(a+\lambda)\int_{a+\lambda}^b \varphi(t)\,dt - \int_{a+\lambda}^b f(t)\varphi(t)\,dt$$

$$= \int_{a+\lambda}^b \varphi(t)\,[f(a+\lambda) - f(t)]\,dt$$

$$> 0.$$

Similarly, for the first inequality (1):

$$\int_a^b f(t)\varphi(t)\,dt - \int_{b-\lambda}^b f(t)\,dt$$

$$= \int_a^{b-\lambda} f(t)\varphi(t)\,dt - \int_{b-\lambda}^b [1-\varphi(t)]f(t)\,dt$$

$$\geq \int_a^{b-\lambda} f(t)\varphi(t)\,dt - f(b-\lambda)\int_{b-\lambda}^b [1-\varphi(t)]\,dt$$

$$= \int_a^{b-\lambda} f(t)\varphi(t)\,dt - f(b-\lambda)\left[\lambda - \int_{b-\lambda}^b \varphi(t)\,dt\right]$$

$$= \int_a^{b-\lambda} f(t)\varphi(t)\,dt - f(b-\lambda)\int_a^{b-\lambda} \varphi(t)\,dt$$

$$= \int_a^{b-\lambda} \varphi(t)[f(t)-f(b-\lambda)]\,dt$$

$$> 0.$$

From (1) we may derive corresponding inequalities for *sums*. If $x = \alpha - \theta_1$, $y = \beta + \theta_2$, where α and β are integers, $0 < \theta_m < 1$ and $y > x - 1$, we propose the convenient notation

$$\sum_x^y u(n) = \theta_1 u(\alpha - 1) + \sum_\alpha^\beta u(n) + \theta_2 u(\beta + 1), \qquad (3)$$

it being understood that $\sum_\alpha^{\alpha-1} u(n) = 0$.

As the sum depends only on *integral* values of the argument n, we may, for the purpose of demonstrating the inequalities, put

$$u(n + \theta) = u(n) \qquad (0 < \theta < 1).$$

With this convention, (3) may be written

$$\sum_{x}^{y} u(n) = \int_{x}^{y+1} u(t)\,dt \qquad (y \geq x-1). \quad (3\text{ a})$$

We have, for instance,

$$\sum_{x}^{y} 1 = y - x + 1$$

and

$$\sum_{x}^{y} u(n) = \sum_{x}^{t} u(n) + \sum_{t+1}^{y} u(n) \qquad (x-1 < t \leq y).$$

From (1) we may, by (3 a), immediately conclude,[1] for $y > x-1$,

$$\sum_{y-s+1}^{y} f(n) \leq \sum_{x}^{y} f(n)\,\varphi(n) \leq \sum_{x}^{x+s-1} f(n) \qquad (4)$$

where

$$s = \sum_{x}^{y} \varphi(n), \qquad (5)$$

provided that $f(n)$ never increases, and that $0 \leq \varphi(n) \leq 1$.

It is evident that we may, in (1) and (4), allow the range of integration or summation to increase indefinitely, provided the expressions do not become meaningless.

The inequalities (1) and (4) are useful in mathematical analysis, their affinity to such theorems as Abel's Lemma[2] and the Theorem of Mean Value being obvious.[3] Here we

[1] If $\varphi(n) = 1$ or $\varphi(n) = 0$ or $f(n) = \text{const.}$ for all n, the two limits in (4) coincide.

[2] Bromwich: An Introduction to the Theory of Infinite Series, London 1908, p. 54 and p. 426.

[3] If, instead of $0 \leq \varphi(t) \leq 1$, we have quite generally $l \leq \psi(t) \leq L$, where l and L may be positive or negative, and $l \neq L$, we may take

$$\varphi(t) = \frac{\psi(t) - l}{L - l},$$

are, however, only concerned with their application to actuarial problems. The possibility of this application is due to the fact, that the higher limit in (1) and (4) is, in certain cases, so close to the value of the integral or sum considered, that it may pass as a first rough approximation which becomes a very fair one on applying a simple correction.

Putting, for instance, in (1),

$$f(t) = v^t,\ \varphi(t) = \frac{l_{x+t}}{l_x},\ a = 0,\ b = \infty,\ \lambda = e_x,$$

we find[1]

$$\int_0^\infty v^t \frac{l_{x+t}}{l_x}\, dt \leqq \int_0^{e_x} v^t\, dt$$

or

whence

$$\lambda = \frac{\int_a^b \varphi(t)\, dt - l(b-a)}{L-l}.$$

and

$$l\int_a^{b-\lambda} f(t)\, dt + L\int_{b-\lambda}^{b} \quad < \int_a^b f(t)\varphi(t)\, dt < L\int_a^{a+\lambda} f(t)\, dt + l\int_{a+\lambda}^{b} f(t)\, dt.$$

In the case of (4), we find similarly

$$s = \frac{\sum_x^y \psi(n) - l(y-x+1)}{L-l}$$

and

$$l\sum_x^{y-s} f(n) + L\sum_{y-s+1}^{y} f(n) < \sum_x^y f(n)\psi(n) < L\sum_x^{x+s-1} f(n) + l\sum_{x+s}^{y} f(n).$$

[1] On looking through the proof again, it is seen that the sign ≦ may in this case be replaced by <.

$$a_x < \frac{1 - v^{e_x}}{\delta}; \tag{6}$$

that is the well known result that a life-annuity is smaller than an annuity-certain payable for the expectation of life.

Similarly, we find from (4), putting $x = 1$, $y = \infty$, $f(n) = v^n$, $\varphi(n) = \frac{l_{x+n}}{l_x}$, $s = e_x$,

$$a_x < \sum_1^{e_x} v^n. \tag{7}$$

If $e_x = k + \theta$, where k is an integer, and $0 < \theta < 1$, (7) may be written

$$a_x < \frac{1 - v^k}{i} + \theta v^{k+1}. \tag{7 a}$$

It was, in fact, this particular inequality, familiar to actuaries,[1] which suggested to me the general formulas (1) and (4).

The popular but erroneous notion that a life-annuity may be calculated as an annuity-certain payable for a duration equal to the expectation of life, yet contains an element of truth[2] which may be turned into good account. The duration m of an annuity-certain, equal in value to a life-annuity, may be calculated from the equation

$$a_x = \frac{1 - v^m}{i}, \tag{8}$$

whence

$$m = -\frac{\log(1 - ia)}{\log(1 + i)}. \tag{9}$$

If we expand m in powers of i, neglecting in the result powers above the first, we find the approximate formula

[1] Text-Book, 1⁰ Ed. p. 112.

[2] The reason for this is, that we shall have $a_x = a_{\overline{e_x|}}$, provided that either $\delta = 0$, or else $\mu_x = 0$ for all x.

$$m = e_x - i\,\varepsilon_x, \tag{10}$$

where

$$\varepsilon_x = \frac{1}{l_x}\sum_1^{\infty} t\, l_{x+t} - \frac{1}{2} e_x (e_x + 1), \tag{11}$$

which may more conveniently be written

$$\varepsilon_x = \frac{1}{l_x}\sum{}^2 l_{x+1} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\left(e_x + \frac{1}{2}\right)^2, \tag{11 a}$$

the summation being commenced from the bottom.

It may be worth noticing, that the function ε_x thus introduced has an independent meaning in actuarial science. In fact, it may be easily proved that $2\,\varepsilon_x$ is *the mean square deviation in the estimated curtate duration of an individual life.* Supposing the life, aged x at entry, fails after t years (leaving out any fraction of a year), then the deviation from the estimated duration is $(t - e_x)$. Squaring this, multiplying by the probability, that the life will fail between ages $x + t$ and $x + t + 1$, and summing for all values of t, we find the required mean square deviation, or

$$\sum_0^{\infty} (t - e_x)^2 \frac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_x}$$

$$= \sum_0^{\infty} (t - e_x)^2 \frac{l_{x+t}}{l_x} - \sum_1^{\infty} (t - 1 - e_x)^2 \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

$$= e_x^2 + \sum_1^{\infty} \left[(t - e_x)^2 - (t - 1 - e_x)^2\right] \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

$$= e_x^2 + \sum_1^{\infty} (2\,t - 2\,e_x - 1) \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

$$= e_x^2 + 2 \sum_1^{\infty} t \frac{l_{x+t}}{l_x} - 2\,e_x^2 - e_x$$

$$= 2\,\varepsilon_x.$$

It is seen from (10), that e_x is really a first approximation to the true duration m. We proceed to show by a

numerical investigation, that the further approximation obtained by deducting $i\,\varepsilon_x$ from e_x produces very fair approximative values of a_x.

We reproduce below specimen values according to the H^M experience (Text-Book graduation) of the functions e_x, ε_x and a_x; further, the corresponding values of a_x, calculated by (8) and (10), and a table of the differences between the true and approximative values. Finally we add a table of »Practical Standards of Comparison» with which the differences may be compared.

The Practical Standards of Comparison were calculated as $\frac{1}{2}(a_x - a_{x+1})$, representing the variation in the annuity-

H^M Text-Book graduation		
x	e_x	ε_x
20	41,601	154,10
30	34,226	112,86
40	26,889	79,72
50	19,771	53,52
60	13,308	31,71
70	7,992	15,96
80	4,163	6,30

a_x by Text-Book				
x	3 %	4 %	5 %	6 %
20	22,06	18,66	16,06	14,04
30	19,90	17,16	14,99	13,26
40	17,18	15,14	13,47	12,09
50	13,88	12,52	11,37	10,39
60	10,22	9,45	8,77	8,17
70	6,66	6,29	5,96	5,66
80	3,70	3,57	3,44	3,33

a_x by 8 and 10				
x	3 %	4 %	5 %	6 %
20	22,16	18,77	16,17	14,14
30	19,94	17,20	15,04	13,30
40	17,17	15,13	13,46	12,07
50	13,85	12,48	11,31	10,31
60	10,20	9,41	8,71	8,09
70	6,64	6,26	5,92	5,60
80	3,69	3,55	3,42	3,29

Differences between true and approx. values				
x	3 %	4 %	5 %	6 %
20	− ·10	− ·11	− ·11	− ·10
30	− ·04	− ·04	− ·05	− ·04
40	+ ·01	+ ·01	+ ·01	+ ·02
50	·03	·04	·06	·08
60	·02	·04	06	·08
70	·02	·03	·04	·06
80	·01	·02	·02	·04

Practical Standards of Comparison				
x	3 %	4 %	5 %	6 %
20	10	·07	·05	·04
30	·12	·09	·06	·05
40	·15	·12	·09	·07
50	·18	·15	·12	·10
60	19	·16	·14	·12
70	·17	15	·14	·12
80	·12	·12	·11	·10

value when the age varies one half year. This is a deviation familiar to the actuary who is accustomed to calculate the age as »age nearest birthday», a method which is legitimate when no systematic deviation from the mean is to be feared.

Our table of differences between original and approximate values shows that these differences, when the youngest ages and highest rates of interest are left out, are small, not only in comparison with the standards, but also absolutely speaking, so that the slight systematic deviation traceable, is unimportant from a practical point of view.

The best standard for measuring these deviations is, however, the *standard deviation* (or »mean error») in the value of a_x as deduced from a given experience.[1] The problem of calculating this standard deviation has not until comparatively recently[2] attracted the attention of actuaries, but as it is of importance also on other occasions, e. g. when the *weights* of the ungraduated a_x are required in a direct graduation of this function, we shall occupy ourselves with the matter here. It may be remarked beforehand, that the result at which we shall arrive is practically the same as the first formula on p. 102 of G. F. Hardy's book; but the following deduction is not only easier but also safer from the theoretical point of view, making less use of approximations.

The *mean square deviation* (or the square of the mean error) is the square of the standard deviation and is denoted by μ_2. Let there be given n different and independent observations

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$$

and an analytical function of these

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n).$$

[1] This standard deviation has, of course, nothing to do with the standard deviation, examined by Bremiker and others, in the estimated value of an annuity on a single life. The latter concerns the *application*, the former the *origin* of the table.

[2] G. F. Hardy: The Theory of the Construction of Tables of Mortality, etc. p. 99.

Put $\sigma_r = y_r + \iota_r$, y_r being the »true» value of σ_r, and ι_r the error of observation. Provided these errors are sufficiently small, f may be developed in powers of them, neglecting powers above the first. The coefficients of the errors of observation are, then,

$$\frac{df}{dy_1}, \frac{df}{dy_2}, \dots \frac{df}{dy_n}.$$

The mean square deviation in f is, therefore,[1]

$$\mu_2(f) = \sum_1^n \left(\frac{df}{dy_r}\right)^2 \mu_2(\sigma_r). \tag{12}$$

In order to apply this well-known general theorem to the life-annuity, this must be expressed as a function of the practically independent q_x, that is

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \sum_1^\infty v^t \frac{l_{x+t}}{l_x} \\ &= \sum_1^\infty v^t (1-q_x)(1-q_{x+1}) \dots (1-q_{x+t-1}). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Now

$$\begin{aligned} \frac{da_x}{dq_{x+r}} &= -\frac{1}{1-q_{x+r}} \sum_{r+1}^\infty v^t \frac{l_{x+t}}{l_x} \\ &= -\frac{1}{p_{x+r}} \frac{v^r l_{x+r}}{l_x} a_{x+r} \\ &= -\frac{N_{x+r}}{p_{x+r} D_x}. \end{aligned}$$

whence, by (12),

$$\mu_2(a_x) = \sum_{r=0}^\infty \frac{N_{x+r}^2}{p_{x+r}^2 D_x^2} \mu_2(q_{x+r}).$$

But, denoting as usual the Exposed to Risk by E_x,

[1] Thiele: Theory of Observations p. 39; Czuber: Wahrscheinlichkeitsrechnung I (dritte Auflage) p. 338.

$$\mu_2(q_x) = \frac{p_x q_x}{E_x}; \tag{14}$$

therefore

$$\mu_2(a_x) = \frac{1}{D_x^2} \sum_x^{\infty} \frac{q_t N_t^2}{p_t E_t}. \tag{15}$$

This formula gives the mean square deviation in the ungraduated value of a life-annuity, and the standard deviation $\sqrt{\mu_2(a_x)}$ is, therefore, the correctest measure for the permissible deviation from the observations.

It should be remembered, that of the functions employed in (15), D_x, p_x, q_x and N_x are assumed to be true (or at least graduated) values, while E_x depends on the observations alone.

The calculation of $\sqrt{\mu_2}$ according to (15) is not a very laborious task. A slide-ruler may be used for the purpose, the approximation obtained by this instrument being quite sufficent.

We give below specimens of the standard deviations in a_x according to various tables.

Standard deviations in a_x							
x	H^M				O^M 3 %	$O^{M(5)}$ 3 %	$D^{M(5)}$ 3½ %
	3 %	4 %	5 %	6 %			
20	·059	·048	·040	·034	·023	·065	·268
30	37	29	23	19	15	19	·063
40	38	30	25	20	15	16	58
50	44	36	31	26	16	16	69
60	52	45	40	35	18	18	82
70	67	61	55	51	20	20	99
80	·105	99	93	88	28	27	·146

They were all calculated by (15), except the figures for $O^{M(5)}$ which are G. F. Hardy's original approximations. It

is seen that this test is somewhat more severe than our »Practical Standards of Comparison»; yet it does not alter the conclusion at which we had previously arrived, that the values of a_x as calculated by (8) and (10) are sufficiently accurate for most practical purposes. The standard deviations according to $D^{M(5)}$ are particularly illustrative of the liberties which may be taken with figures derived from a comparatively small experience.[1]

It appears from (15) and has already been pointed out by G. F. HARDY that if the Exposed for all ages are multiplied by the same constant factor k, then the standard deviation in a_x is divided by $\sqrt{k}$. The total Exposed according to O^M is 7659454 and according to H^M 1199093. If the relative distribution is proportional at all ages, the standard deviation according to O^M should, therefore, be about four tenths of the standard deviation according to H^M, which is seen to agree very fairly except at the highest ages.

The mode of calculation represented by (8) and (10) is no mere curiosity. Its chief advantage is that it enables us to rapidly calculate isolated values of life-annuities at any rate of interest, provided e_x and ε_x are known. It is, therefore, desirable that statistical tables, which usually contain only the functions q_x, l_x and e_x, should also allow a column for ε_x to three or four significant figures.

The fallacy implied in the assumption that a life-annuity is equal to an annuity-certain payable for the expectation of life consists in assuming

$$\int_0^{\omega} f(t)\varphi(t)\,dt = \int_0^{\int_0^x \varphi(t)\,dt} f(t)\,dt,$$

and we might just as well have assumed

$$\int_0^{\omega} f(t)\varphi(t)\,dt = \int_0^{\int_0^{\omega} f(t)\,dt} \varphi(t)\,dt,$$

[1] The total of Exposed to Risk according to $D^{M(5)}$ is 28218.

or that a life-annuity equals the expectation of life for a duration equal to a perpetuity. But formula (1) shows, putting now

$$f(t) = \frac{l_{x+t}}{l_x},\ \varphi(t) = v^t,\ a = 0,\ b = \infty,\ \lambda = \frac{1}{\delta},$$

that

$$a_x = \int_0^\infty v^t \frac{l_{x+t}}{l_x} dt < \int_0^{\frac{1}{\delta}} \frac{l_{x+t}}{l_x} dt. \tag{16}$$

Here, too, the higher limit of the integral might, as a first rough approximation, serve as starting-point for a more exact calculation;[1] but the analysis is more complicated than in the case of (6) and (7), and besides, as a few trials show, the higher limit is not so close to the true value as in (6) and (7), so it will hardly pay to continue this investigation.

More complicated benefits, such as annuities and assurances depending on two or more lives, may be dealt with on principles similar to those we have applied to (6) and (7); instead of the auxiliary function ε_x we should, then, have to calculate other functions, depending on mortality alone, and not on the rate of interest.

If monetary tables at a particular rate of interest i have already been prepared, these may with advantage be taken as starting-point for the calculation of annuity-values at a different rate of interest, say i'. Putting $i' = i + h$ and

$$a'_x = \sum_1^\infty (1 + i')^{-t} \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

$$= \sum_1^\infty (1 + hv)^{-t} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x},$$

[1] We have, in fact, $a_x = \int_0^{\frac{1}{\delta}} \frac{l_{x+t}}{l_x} dt$, provided that either $\delta = 0$, or else $\mu_x = 0$ for all x.

we find by (4), if $h > 0$,

$$a'_x < \sum_{1}^{a_x} (1 + h v)^{-t}. \tag{17}$$

It is, therefore, natural to put, in analogy with (8),

$$a'_x = \frac{1 - (1 + h)^{-n}}{h}, \tag{18}$$

where it may be expected that a_x will be a first rough approximation to n. We find, in fact, developing n in powers of h and neglecting in the result powers above the first,

$$n = a_x - h\,\alpha_x, \tag{19}$$

where

$$\alpha_x = \frac{v}{D_x} \sum^2 D_{x+1} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\left(a_x + \frac{1}{2}\right)^2$$

or

$$\alpha_x = \frac{v\,S_x}{D_x} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\left(a_x + \frac{1}{2}\right)^2. \tag{20}$$

While, in (17), we must suppose $h > 0$, (18) is evidently valid for positive and negative h. If h is positive, the right-hand side of (18) is $a_{\overline{n}|}$ at the rate of interest h. If h is negative and $= -k$, the right-hand side of (18) is easily seen to be $s_{\overline{n+1}|} - 1$ at the rate of interest $\frac{k}{1-k}$, which may nearly always be replaced by k, as done in the examples below.

For $i = 0$, (18) and (19) evidently reduce to (8) and (10).

We give below specimen values of a_x and α_x, Text-Book graduation, at $3\frac{1}{2}$%; further the corresponding values of a_x at 3% and 4% as calculated by (18) and (19), and the differences Δ between the true and approximate values; finally the corresponding figures when a'_x is calculated by the obvious formula

$$a'_x = a_x - h\,\frac{v\,S_x}{D_x}, \tag{21}$$

obtained by expanding a'_x in powers of h, neglecting powers above the first.

H^M 3½% Text-Book		
x	a_x	α_x
20	20,245	123,8
30	18,441	93,9
40	16,103	65,7
50	13,172	42,1
60	9,823	24,28
70	6,470	12,15
80	3,634	4,97

H^M Text-Book graduation								
x	a'_x by (18)				a'_x by (21)			
	3 %	Δ	4 %	Δ	3 %	Δ	4 %	Δ
20	22,04	·02	18,65	·01	21,94	·12	18,55	·11
30	19,88	·02	17,15	·01	19,81	·09	17,08	·08
40	17,17	·01	15,13	·01	17,12	·06	15,09	·05
50	13,87	·01	12,52	·00	13,85	·03	12,49	·03
60	10,22	·00	9,45	·00	10,21	·01	9,44	·01
70	6,66	·00	6,29	·00	6,65	·01	6,29	·00
80	3,70	·00	3,57	·00	3,70	·00	3,57	·00

It should be noted that the numerical results for fractional durations were obtained by *first-difference* interpolation in an interest-table (Spitzer), which is sufficient when the life-annuity is only required to two decimals.

The results by formula (18) seem so satisfactory that we do not hesitate to recommend making a table of α_x a regular feature of every publication of monetary tables, especially when these are only calculated at a single rate of interest. The cases where life-annuity-values are required at a rate of interest not provided for may not be very frequent; still, they are sometimes wanted in transactions with life-annuities, for comparison with other tables, or for examining the effect of a change in the mortality, and the want may even increase with the facility for satisfying it.

On the correlation of acting probabilities.

By S. D. Wicksell.

In a paper printed in this journal n:r 4—5 1916, I have treated the problem of correlation in homograde statistics. This led in the case of constant acting probabilities to the discussion of an extension of the theorem of Bernoulli to embrace the occurrences of two attributes.

If in a population of s individuals, which is observed with regard to the number of occurrences of two attributes A and B, we find that n_1 individuals have both the attribute A and the attribute B, n_2 individuals have A but not B, n_3 have B but not A and n_4 have neither A nor B, the data may be arranged in a so-called fourfold table. Usually this has the following form:

	B	Not B	
A	n_1	n_2	h
Not A	n_3	n_4	$s-h$
	k	$s-k$	s

Here $n_1 + n_2 = h$; $n_1 + n_3 = k$; $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = s$.

The problem then arises to find a measure of the degree of association between the attributes A and B. In our article referred to we followed up the line of thought indicated by

Charlier that such a measure is given by the coefficient of correlation of the random variation of h and k, arising when observations of s individuals are supposed to be repeated a large number of times under *identically the same conditions.* This led to the extension of the theorem of Bernoulli to the case of two attributes. When the question is to measure the association between A and B this line of thought is really perfectly adequate. As we are only interested in the conditions underlying the actually observed fourfold table, it is appropriate to ask for the coefficient of correlation of the number of occurrences of A and B, when the observations are thought to be repeated under the same conditions, that is, when the acting probabilities remain constant.

In this connection, however, there arises another problem of very great importance for statistical theory. It is this: what will be the coefficient of correlation of the number h of A:s and the number k of B:s when we actually have observed a large number of fourfold tables for which the conditions, that is the acting probabilities, are varying, and how are we to find the coefficient of correlation of the acting probabilities themselves? This problem leads to an extension of the theorem of Lexis by which it is made to embrace the case of two attributes, and was also briefly dealt with in the cited article.

It is obvious, on account of the law of great numbers, that the greater the number s of individuals in each fourfold table the more strictly proportional the numbers h and k will be to the acting probabilities of the respective populations. It is also obvious that when the conditions really vary, the coefficient of correlation of h and k will be the more nearly equal to the coefficient of correlation of the acting probabilities the greater s is. This, which may be termed the law of multiple great numbers, we shall rigorously prove in the following, discussing also some interesting consequences.

Another problem also we shall discuss, which seems to be of great importance for the statistical method known as the method of »comparison of series»[1] (in German »Die Methode der parallelen Reihen»)[2]. It is this: If two

[1] Bowley: Elements of statistics p. 168 ff.

[2] A. Kauffman: Theorie und Methoden der Statistik.

populations of which one contains s individuals and the other s_1 individuals are to be compared with regard to the occurrences of a certain event or character, or with regard to the occurrences of two different events or characters, and if to this end we count off the number h of occurrences in the first population and the number k of occurrences in the second population and repeat this at different times or in different localities etc., how is the coefficient of correlation of the acting probabilities for the two events to be found from the coefficient of correlation of the numbers of occurrences? On account of the law of great numbers it is obvious that if s and s_1 be infinitely great the two coefficients will be equal. But on account of random variation in the occurrences it may be presumed that when s and s_1 are not immensely great the correlation of occurrences will be weaker than the correlation of the acting probabilities.

Before proceeding to a discussion of the problems here sketched we shall briefly recapitulate some of the results of the preceding article.

Problem I. A population of s individuals is observed with regard to the occurrences of two attributes A and B. If the probability for an individual to possess

the attribute	A	is p	$(1-p=q)$,
» »	B	is p_1	$(1-p_1=q_1)$,
both the attributes	A and B	is π_1,	

to find the correlation function and its characteristics for the number of occurrences h of A and k of B when a great number of such populations are observed.

Case I. The theorem of Bernoulli extended to two attributes. The acting probabilities p, p_1 and π_1 are constant for all individuals in all the populations.

Theorem 1. If we put

$$\pi_2 = p - \pi_1; \quad \pi_3 = p_1 - \pi_1; \quad \pi_4 = 1 - \pi_1 - \pi_2 - \pi_3.$$

the sought correlation function will be the coefficient of $x^h y^k$ in the expansion of the multinomial

(1) $$(\pi_1 . xy + \pi_2 . x + \pi_3 . y + \pi_4)^s.$$

Theorem 2. If spq and $s_1 p_1 q_1$ are not small the correlation function $B(h, k)$ will be of the type A of CHARLIER. If we put

$$\sigma^2 = spq; \quad \sigma_1^2 = sp_1 q_1,$$

$$r = \frac{\pi_1 - p\, p_1}{\sqrt{pq p_1 q_1}},$$

$$\xi = \frac{h - sp}{\sigma}; \quad \eta = \frac{k - sp_1}{\sigma_1},$$

and

(2) $$\varphi_0(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}(\xi^2 - 2r\xi\eta + \eta^2)},$$

(3) $$\varphi_{ij}(\xi, \eta) = \frac{\partial^{i+j}\varphi_0(\xi, \eta)}{\partial \xi^i \partial \eta^j},$$

we have

(4) $$B(h, k) = B(sp + \xi\sigma, sp_1 + \eta\sigma_1) =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sigma_1}\Big[\varphi_0(\xi, \eta) + \sum_{i+j \geqq 3} \beta_{ij}\varphi_{ij}(\xi, \eta)\Big].$$

The coefficients β_{ij} for $i + j = 3$ and 4 are given in the previous article. The orders of magnitude are the following:

for $i + j = 3$ the coefficients are of the order of magnitude of $\frac{1}{\sqrt{s}}$

for $i + j = 4$ and 6 the coefficients are of the order of magnitude of $\frac{1}{s}$

for $i+j=5$, 7 and 9 the coefficients are of the

order of magnitude of $\frac{1}{s^{3/2}}$

for $i+j=8$, 10 and 12 the coefficients are of the

order of magnitude of $\frac{1}{s^2}$

etc.

Corollary a. If s is very great the correlation of h and k will be normal and

$$B(sp+\sigma\xi,\ sp_1+\sigma_1\eta)=\frac{1}{\sigma\sigma_1}\varphi_0(\xi,\eta).$$

Corollary b. The regression is always linear.

Theorem 3. spq and sp_1q_1 amount only to some few units (are for instance smaller than 10) and s is not very small. The correlation is then of type B. The correlation function $B(h,k)$ may be developed in a series which begins with a certain transcendental (given in formula (59) of the cited paper) and of which the following terms contain the successive differences for unit interval of this transcendental.

Corollary a. sp^2 and sp_1^2 are very small. Then we have, putting

$$\lambda=sp;\ \ \lambda_1=sp_1;\ \ r=\frac{x_1-pp_1}{\sqrt{pp_1}},$$

$$\text{(5)}\qquad B(h,k)=e^{-(\lambda+\lambda_1)}\frac{\lambda^h\cdot\lambda_1^k}{\underline{|h}\,\underline{|k}}\left[1+\frac{r}{\sqrt{\lambda\lambda_1}}(h-\lambda)(k-\lambda_1)\right].$$

This is what becomes of Poisson's limit to the point binomial when two attributes are regarded. We shall call it the limit to the multinomial for rare events.

Corollary b. Here also the regression is strictly linear.

Theorem 4. When case I is under consideration the moments of the second order of h and k about the means are given by

$$\begin{aligned} \nu_{20} &= spq, \\ \nu_{11} &= s(\pi_1 - pp_1), \qquad (6) \\ \nu_{02} &= sp_1q_1, \end{aligned}$$

and the coefficient of correlation by

$$r = \frac{\pi_1 - pp_1}{\sqrt{pqp_1q_1}}. \qquad (6^*)$$

Case II. The theorem of Lexis extended to two attributes. The acting probabilities p, p_1 and π_1 vary from population to population, the characteristics for their variation being the following:

the mean of $p = \bar{p}$

the mean of $p_1 = \bar{p}_1$

the mean of $\pi_1 = \bar{\pi}_1$

the dispersion of $p = \sigma_p$

the dispersion of $p_1 = \sigma_{p_1}$

the coefficient of correlation of p and $p_1 = r_{pp_1}$.

Theorem 5. The moments about the mean of the second order are

$$\begin{aligned} \sigma^2 = \nu_{20} &= s\bar{p}\bar{q} + s(s-1)\sigma_p^2 \\ \sigma\sigma_1 r = \nu_{11} &= s(\bar{\pi}_1 - \bar{p}\bar{p}_1) + s(s-1)\sigma_p\sigma_{p_1}r_{pp_1} \qquad (7) \\ \sigma_1^2 = \nu_{02} &= s\bar{p}_1\bar{q}_1 + s(s-1)\sigma_{p_1}^2 \end{aligned}$$

The variation in π_1 has no effect on the moments of the second order.

Consequently we have for the coefficient of correlation of h and k

$$r = \frac{s(\bar{\pi}_1 - \bar{p}\bar{p}_1) + s(s-1)\sigma_p\sigma_{p_1}r_{pp_1}}{\sqrt{s\bar{p}\bar{q} + s(s-1)\sigma_p^2} \cdot \sqrt{s\bar{p}_1\bar{q}_1 + s(s-1)\sigma_{p_1}^2}}. \qquad (8)$$

Theorem 6. If in the notation of theorem 1 we have for the probabilities of the four possible combinations of attributes in an individual, of

the first population: $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, $x_3^{(1)}$, $x_4^{(1)}$,
» second » $x_1^{(2)}$, $x_2^{(2)}$, $x_3^{(2)}$, $x_4^{(2)}$,
» third » $x_1^{(3)}$, $x_2^{(3)}$, $x_3^{(3)}$, $x_4^{(3)}$,
. . . .
. . . .
the N:th population: $x_1^{(N)}$, $x_2^{(N)}$, $x_3^{(N)}$, $x_4^{(N)}$,

and we put

$$B^{(i)}(h, k) = \text{coefficient of } x^h y^k \text{ in } (x_1^{(i)} xy + x_2^{(i)} x + x_3^{(i)} y + x_4)^s,$$

the correlation function of h and k will be given by

$$(9) \quad L(h, k) =$$
$$= \frac{1}{N}[B^{(1)}(h, k) + B^{(2)}(h, k) + B^{(3)}(h, k) + \cdots + B^{(N)}(h, k)].$$

It can also be developed in series of the types A and B.
So far the recapitulation from the previous article. We shall now proceed to the further discussion.

Theorem 7. Dividing (8) by $s(s-1)$ we have

$$(10) \qquad r = \frac{\frac{1}{s-1}(x_1 - p p_1) + \sigma_p \sigma_{p_1} \cdot r_{pp_1}}{\sqrt{\frac{pq}{s-1} + \sigma_p^2} \cdot \sqrt{\frac{p_1 q_1}{s-1} + \sigma_{p_1}^2}}.$$

Hence we see that for s very great we have

$$(11) \qquad r = r_{pp_1}.$$

This forms the demonstration of what we have called the law of multiple great numbers.

A necessary condition for (11), *however great s may be*, is that σ_p and σ_{p_1} shall be of a greater order of magnitude than $\frac{1}{\sqrt{s}}$.

If σ_p and σ_{p_1} are of a smaller order, then even in the case when p and p_1 are uncorrelated, so that $r_{pp_1} = 0$, *any value of the correlation coefficient r is possible.*

Theorem 8. Correlation of occurrences of non-associated attributes. In a population two attributs A and B are generally said to be non-associated if the transfer (term due to PEARSON) $\pi_1 - pp_1$ is zero. This requires that for all individuals *within* the population p, p_1 and π_1 shall be constant, and implies that an individual having the attribute A, is equally likely to have the attribute B as an individual who has not the attribute A.

We shall now look into what becomes of the correlation coefficient r when the attributes within each separate one of the N populations are non-associated. We then have for all the populations

$$\pi_1^{(i)} = p^{(i)} p_1^{(i)}.$$

Hence it follows that the mean

$$\bar{\pi}_1 = \bar{p}\bar{p}_1 + \sigma_p \sigma_{p_1} r_{pp_1},$$

or

(12) $$\bar{\pi}_1 - \bar{p}\bar{p}_1 = \sigma_p \sigma_{p_1} \cdot r_{pp_1}.$$

This gives us, according to (7),

(13) $$\nu_{11} = s^2 \sigma_p \sigma_{p_1} \cdot r_{pp_1}.$$

Denoting by $\nu_{11}(x, y)$ the »correlation-moment» of any pair of characters x and y, we thus find that

(14) $$\nu_{11}\left(\frac{h}{s}, \frac{k}{s}\right) = \nu_{11}(p, p_1).$$

This implies that: If A and B are non-associated the correlation-moment of the *relative number of occurrences of A and B* is equal to the correlation-moment of the acting probabilities.

It does not follow, however, that the coefficient of correlation of $\frac{h}{s}$ and $\frac{k}{s}$ (which is equal to the coefficient of correlation of h and k) is equal to r_{pp_1}. Indeed, from (10), we have

$$(15) \qquad r = \frac{\sigma_p \sigma_{p_1} \cdot r_{pp_1}}{\sqrt{\frac{pq}{s} + \frac{s-1}{s}\sigma_p^2}\sqrt{\frac{p_1 q_1}{s} + \frac{s-1}{s}\sigma_{p_1}^2}},$$

and, hence, $r = r_{pp_1}$ only if s is infinitely great.

Now in practice, the case will be the following: From the correlation table of h and k the means m and m_1 and the moments ν_{20}, ν_{11} and ν_{02} are computed in the ordinary way.

Hence we have, s being known,

$$(16) \qquad p = \frac{m}{s}; \quad p_1 = \frac{m_1}{s},$$

and

$$(17) \qquad r = \frac{\nu_{11}}{\sqrt{\nu_{20}\nu_{02}}}.$$

From (7) we see that

$$(18) \qquad \begin{aligned} s(s-1)\sigma_p^2 &= \nu_{20} - m\left(1 - \frac{m}{s}\right), \\ s(s-1)\sigma_{p_1}^2 &= \nu_{02} - m_1\left(1 - \frac{m_1}{s}\right). \end{aligned}$$

Thus, from (13), if s be not small

$$(19) \qquad r_{pp_1} = \frac{\nu_{11}}{\sqrt{\nu_{20} - m\left(1 - \frac{m}{s}\right)}\sqrt{\nu_{02} - m_1\left(1 - \frac{m_1}{s}\right)}}.$$

Or dividing by $\sqrt{\nu_{20}\nu_{02}}$, we have, according to (17).

$$(20) \qquad r = r_{pp_1}\sqrt{1 - \frac{m(s-m)}{s\nu_{20}}} \cdot \sqrt{1 - \frac{m_1(s-m_1)}{s\nu_{02}}},$$

and it follows that in the case of non-associated attributes, we have $r < r_{pp_1}$. Further, when the moments and the coefficient of correlation r of the occurrences of A and B are computed from the observed correlation table, the »actual» coefficient of correlation r_{pp_1} can be found from (20).

When the attributes are *associated*, $\bar{\pi}_1$ can be found by dividing the mean of n_1, that is of the number of co-occurrences of A and B, by s.

The mean of n_1 being $\bar{n}_1$, we have, indeed,

$$\bar{\pi}_1 = \frac{\bar{n}_1}{s},$$

and subsequently computing $\bar{p}$ and p_1 from (16) we find r_{pp_1} from (8) or (10).

Corollary. When $\bar{p}$ and p_1 are very small formula (20) can be modified in an important way. Obviously then we may put

$$\frac{s - m}{s} = 1; \quad \frac{s - m_1}{s} = 1,$$

and consequently

$$r = r_{pp_1} \sqrt{1 - \frac{m}{\nu_{20}}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\bar{m}_1}{\nu_{02}}}. \tag{21}$$

In this case we need not know the number of comparison s. This is an important feature of BORTKIEWICZ, law of small numbers.

We shall now deal with the other problem mentioned in the introductory pages. Hence it will be seen that the coefficient of correlation of the acting probabilities in comparative series will be given by formulae identical to (20) and (21), with the slight modification necessary on account of the numbers of comparison s being different in the two series.

Problem II. Two populations, one consisting of s, the other of s_1 individuals, are observed, the first with regard to a certain event or attribute A, the second with regard

to another (or the same) event or attribute B. The acting probability of A being p and of B being p_1, to find the correlation function and its characteristics for the number h of occurrences of A and the number k of occurrences of B, when similar observations are repeated a great number of times.

The events A and B are thought to be independent of each other in the sense that the occurrences of A in the first population exert no influence on the occurrences of B in the other and *vice versa*.

Case I. The acting probabilities p and p_1 are constant throughout the repetitions. As the populations are separated from each other the occurrences h and k must in this case be independent of each other. Accordingly we have for the correlation function the formula

$$(22) \qquad B_{ss_1}(h, k) = B_s(h) \,.\, B_{s_1}(k) = \\ = \frac{\lfloor s}{\lfloor h \, \lfloor s-h} p^h q^{s-h} \cdot \frac{\lfloor s_1}{\lfloor k \, \lfloor s_1 - k} p_1^k q_1^{s_1-k}.$$

The moments up to the fourth order are, as may easily be verified[1],

$$m = sp; \qquad\qquad m_1 = s_1 p_1,$$

$$\nu_{20} = spq; \qquad \nu_{11} = 0; \qquad \nu_{02} = s_1 p_1 q_1,$$

$$\nu_{30} = -\nu_{20}(p-q); \qquad \nu_{21} = 0; \; \nu_{12} = 0; \qquad \nu_{03} = -\nu_{02}(p_1 - q_1),$$

$$\nu_{40} = \nu_{20}(1-6pq) + 3\nu_{20}^2; \; \nu_{31} = 0; \; \nu_{22} = 0; \; \nu_{13} = 0; \; \nu_{04} = \nu_{02}(1-6p_1q_1) + 3\nu_{02}^2$$

Theorem 9. If spq and sp_1q_1 are not small $B_{ss_1}(h, k)$ may be developed in a rapidly converging series of type A. In formula (4) we have only to put $r = 0$ and

$\beta_{ij} = 0$ when either i or j is equal to 1 or 2,

$\beta_{ij} = \beta_{i0} \cdot \beta_{0j}$ when neither i nor j are equal to 1 or 2.

The coefficients β_{i0} and β_{0j} are the same as the corresponding coefficients of (4) when, in the case of β_{0j}, s_1 is put for s.

[1] Compare our previous article or CHARLIER: Die strenge Form des Bernoullischen Theorems. Medd. fr. Lunds Astr. Observatorium n:r 43.

Theorem 10. spq and $s_1 p_1 q_1$ are not great and sp^2 and sp_1^2 are negligible. Then

$$(24) \qquad B_{ss_1}(h, k) = \epsilon^{-(\lambda+\lambda_1)} \frac{\lambda^h \lambda_1^k}{\underline{|h}\,\underline{|k}}$$

where

$$\lambda = sp = m; \quad \lambda_1 = s_1 p_1 = m_1.$$

Far more interesting here, however, is

Case II. The acting probabilities p and p_1 vary from repetition to repetition.

Theorem 11. Let the number of repetitions be denoted by N and let the acting probabilities be in order $p^{(1)}, p_1^{(1)}$; $p^{(2)}, p_1^{(2)}$; $p^{(3)}, p_1^{(3)}$; $\ldots$ $p^{(N)}, p_1^{(N)}$. Then, as is easily demonstrated, the correlation function will be

$$(25) \quad L(h, k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{\underline{|s}\,\underline{|s_1}}{\underline{|h}\,\underline{|s-h}\,\underline{|k}\,\underline{|s_1-k}} p^{(i)^h} q^{(i)^{s-h}} \cdot p_1^{(i)^k} q_1^{(i)^{s_1-k}}.$$

The moments around the origin are here

$$(26) \qquad \nu'_{\alpha\beta} = \sum_{h=0}^{s} \sum_{k=0}^{s_1} h^\alpha k^\beta L(h, k).$$

This can also be written

$$\nu'_{\alpha\beta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \nu'_{\alpha 0}(B^{(i)}) \cdot \nu'_{0\beta}(B^{(i)}),$$

when we introduce the »BERNOULLIAN» moments

$$\nu'_{\alpha 0}(B^{(i)}) = \sum_{h=0}^{s} \frac{\underline{|s}}{\underline{|h}\,\underline{|h-s}} p^{(i)^h} q^{(i)^{s-h}} \cdot h^\alpha,$$

$$\nu'_{0\beta}(B^{(i)}) = \sum_{k=0}^{s_1} \frac{\underline{|s_1}}{\underline{|k}\,\underline{|s_1-k}} p_1^{(i)^k} q_1^{(i)^{s_1-k}} \cdot k^\beta.$$

As is well known we have[1]

$$\nu'_{10}(B^{(i)}) = s p^{(i)}; \quad \nu'_{01}(B^{(i)}) = s_1 p_1^{(i)},$$
$$\nu'_{20}(B^{(i)}) = s p^{(i)} q^{(i)} + s^2 p^{(i)2}; \quad \nu'_{02}(B^{(i)}) = s_1 p_1^{(i)} q_1^{(i)} + s_1^2 p_1^{(i)2}.$$

Thus the moments of the first and second order of $L(h, k)$ will be

$$\nu'_{10} = m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} s p^{(i)},$$

$$\nu'_{01} = m_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} s_1 p_1^{(i)},$$

$$\nu'_{20} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[s p^{(i)} q^{(i)} + s^2 p^{(i)2}],$$

$$\nu'_{11} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} s p^{(i)} . s_1 p_1^{(i)},$$

$$\nu'_{02} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[s_1 p_1^{(i)} q_1^{(i)} + s_1^2 p_1^{(i)2}].$$

Hence, in the same notation as before, putting

$$p = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} p^{(i)}; \qquad p_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} p_1^{(i)},$$

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(p^{(i)} - p)^2; \quad \sigma_{p_1}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(p_1^{(i)} - p_1)^2,$$

$$\sigma_p \sigma_{p_1} r_{pp_1} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(p^{(i)} - p)(p_1^{(i)} - p_1),$$

it follows that

(27) $$m = s p; \quad m_1 = s p_1,$$

[1] Compare the previous article.

and after some reductions

$$
(28) \qquad \begin{aligned}
\nu'_{20} &= s\bar{p}\bar{q} + s(s-1)\sigma_p^2 + s^2 p^2, \\
\nu'_{11} &= ss_1\sigma_p\sigma_{p_1}r_{pp_1} + s\bar{p} \,.\, s_1\bar{p}_1, \\
\nu'_{02} &= s_1 p_1 q_1 + s_1(s_1-1)\sigma_{p_1}^2 + s_1^2 p_1^2 .
\end{aligned}
$$

And it is obvious that the moments about the mean of the second order are given by the formulae

$$
(29) \qquad \begin{aligned}
\nu'_{20} &= spq + s(s-1)\sigma_p^2, \\
\nu'_{11} &= ss_1\sigma_p\sigma_{p_1}r_{pp_1}, \\
\nu'_{02} &= s_1 p_1 q_1 + s_1(s_1-1)\sigma_{p_1}^2 .
\end{aligned}
$$

The first and the last of formulae (29) are the well known expressions for supernormal dispersion.

From the formula for ν_{11} it further follows that

$$
(30) \qquad \nu'_{11}\left(\frac{h}{s}, \frac{k}{s_1}\right) = \nu'_{11}(p, p_1),
$$

which is, *mutatis mutandis*, the same formula as in theorem 8.

Finally

$$
(31) \qquad r = \frac{ss_1\sigma_p\sigma_{p_1}r_{pp_1}}{\sqrt{s\bar{p}q + s(s-1)\sigma_p^2} \,.\, \sqrt{s_1 p_1 q_1 + s_1(s_1-1)\sigma_{p_1}^2}} .
$$

Theorem 12. From (31) we have

$$
(32) \qquad r = \frac{\sigma_p\sigma_{p_1}r_{pp_1}}{\sqrt{\frac{pq}{s} + \frac{s-1}{s}\sigma_p^2} \,.\, \sqrt{\frac{p_1 q_1}{s_1} + \frac{s_1-1}{s_1}\sigma_{p_1}^2}} .
$$

Hence it is clear that when s and s_1 are infinitely great

$$
r = r_{pp_1} .
$$

Accordingly, as might be supposed, we have come back again to the law of multiple great numbers.

Theorem 13. If from the correlation table the moments m, m_1, ν_{20}, ν_{11} and ν_{02} are computed in the ordinary way, we shall have

$$p = \frac{m}{s}; \quad p_1 = \frac{m_1}{s_1}$$

$$s(s-1)\sigma_p^2 = \nu_{20} - m\left(1 - \frac{m}{s}\right); \quad s_1(s_1-1)\sigma_{p_1}^2 = \nu_{02} - m_1\left(1 - \frac{m_1}{s_1}\right),$$

and when s and s_1 are not small

$$(33) \qquad \frac{\nu_{11}}{\sqrt{\nu_{20}\,\nu_{02}}} = r = r_{pp_1}\sqrt{1 - \frac{m(s-m)}{s\,\nu_{20}}} \cdot \sqrt{1 - \frac{m_1(s_1-m_1)}{s_1\,\nu_{02}}}.$$

Theorem 14. When p and p_1 are very small m and m_1 can be neglected as compared with s and s_1, and we have

$$(34) \qquad r = r_{pp_1}\sqrt{1 - \frac{m}{\nu_{20}}}\sqrt{1 - \frac{m_1}{\nu_{02}}}.$$

From (34) we can consequently find r_{pp_1} from r without s and s_1 being known.

It will be appropriate here to make some remarks on formulae (33) and (34). The quantities

$$L = \sqrt{\frac{s\,\nu_{20}}{m(s-m)}}; \quad L_1 = \sqrt{\frac{s_1\,\nu_{02}}{m_1(s_1-m_1)}},$$

are generally called the »Lexian ratios» or the »error excedents». (In German »Fehlerexcedenten».) Their excess over 1 measure the supernormality of variation in the two series that are to be compared. It is obvious that formulae (33) and (34) should not be used when this supernormality is very slight. The coefficient r is an observed quantity. Through errors of sampling it may be different from zero even in the case when the series have normal or nearly normal dispersion, though in this case the »theoretical» value of r is correspondingly small. The factor $\sqrt{1 - \frac{1}{L^2}}\sqrt{1 - \frac{1}{L_1^2}}$

will, however, in such a case be nearly zero. If then we should try to compute r_{pp_1} from (33) or (34), the error of sampling in r will be extensively magnified, so that it may happen that the value found for r_{pp_1} is quite illusory. It may even occasionally be found to be greater than unity. In order to reduce this error of sampling it is necessary to have at our disposal a number of repetitions which is the greater according as the supernormality of variation of the two series is the less prominent. Or else great supernormality should be secured by having recourse to series of which s and s_1 are great enough.

If the series are only slightly supernormal the true value of r is very near to zero. The mean error in r is then nearly equal to

$$\frac{1}{\sqrt{N}},$$

where N is the number of repetitions. In order that we might expect a value of r which exceeds its mean error, we should have to take N so great as to make

$$\frac{1}{\sqrt{N}} < r_{pp_1} \sqrt{1 - \frac{1}{L^2}} \sqrt{1 - \frac{1}{L_1^2}},$$

or

$$N > \frac{1}{r_{pp_1}^2} \frac{L^2 L_1^2}{(L^2 - 1)(L_1^2 - 1)}.$$

Supposing r_{pp_1} to be in any way considerable, say to exceed 0,25, we should be safe in taking

$$N > \frac{16 L^2 L_1^2}{(L^2 - 1)(L_1^2 - 1)}.$$

If for instance we have $L^2 = 1{,}1$, $L_1^2 = 1{,}1$ we ought to have N at least greater than some 2000. If r_{pp_1} is greater than 0,25 N can be correspondingly decreased.

But if $L^2 = 2$, $L_1^2 = 2$ we could work with a series for which N is only 65.

However, we need not enter into any auch considerations when the series are really of a supernormality in any way considerable. The theory gives then a value of r_{pp_1} and its mean error, and nothing more could justly be asked for.

Before going over to illustrations of the method by numerical examples, a couple of other cases that are liable to occur should be discussed.

Case III. The numbers of comparison s and s_1 vary from repetition to repetition, while the acting probabilities p and p_1 remain constant. Let the values of s and s_1 in the i:th repetition be denoted by $s^{(i)}$ and $s_1^{(i)}$. Then the correlation function of the number of occurrences h and k in the two series will be

$$(35)\quad P_1(h,k) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{\underline{|s^{(i)}}}{\underline{|h}\,\underline{|s^{(i)}-h}}\,\frac{\underline{|s_1^{(i)}}}{\underline{|k}\,\underline{|s_1^{(i)}-k}}\,p^h q^{s^{(i)}-h}\,p_1^k q_1^{s_1^{(i)}-k}.$$

The moment about the origin, defined by

$$\nu'_{\alpha\beta} = \sum_h \sum_k h^\alpha k^\beta P_1(h,k),$$

can then be written in the form

$$\nu'_{\alpha\beta} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\sum_{h=0}^{s^{(i)}} h^\alpha \frac{\underline{|s^{(i)}}}{\underline{|h}\,\underline{|s^{(i)}-h}}\,p^h q^{s^{(i)}-h} \sum_{k=0}^{s_1^{(i)}} k^\beta \frac{\underline{|s_1^{(i)}}}{\underline{|k}\,\underline{|s_1^{(i)}-k}}\,p_1^k q_1^{s_1^{(i)}-k}\right].$$

Hence we obtain

$$(36)\quad \begin{aligned} \nu'_{10} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} s^{(i)} p = s p, \\ \nu'_{01} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} s_1^{(i)} p_1 = s_1 p_1, \end{aligned}$$

where s and s_1 denote the mean values of s and s_1 for the whole series of repetitions.

Further

$$\nu'_{20} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (s^{(i)} pq + s^{(i)^2} p^2),$$

(37) $$\nu'_{11} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} s^{(i)} s_1^{(i)} p p_1,$$

$$\nu'_{02} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (s_1^{(i)} p_1 q_1 + s_1^{(i)^2} p_1^2).$$

Denoting the dispersion of the $s^{(i)}$ by σ_s, the dispersion of the $s_1^{(i)}$ by σ_{s_1} and the coefficient of correlation between $s^{(i)}$ and $s_1^{(i)}$ by r_{ss_1}, we easily find that (37) may be written

$$\nu'_{20} = spq + s^2 p^2 + p^2 \sigma_s^2,$$

(38) $$\nu'_{11} = s s_1 p p_1 + p p_1 \sigma_s \sigma_{s_1} r_{ss_1},$$

$$\nu'_{02} = s_1 p_1 q_1 + s_1^2 p_1^2 + p_1^2 \sigma_{s_1}^2.$$

Hence, obviously, the moments about the mean are

$$\nu_{20} = spq + p^2 \sigma_s^2,$$

(39) $$\nu_{11} = p p_1 \sigma_s \sigma_{s_1} r_{ss_1},$$

$$\nu_{02} = s_1 p_1 q_1 + p_1^2 \sigma_{s_1}^2,$$

and it follows that

(40) $$r = \frac{\sigma_s \sigma_{s_1} r_{ss_1}}{\sqrt{s \frac{q}{p} + \sigma_s^2} \cdot \sqrt{s_1 \frac{q_1}{p_1} + \sigma_{s_1}^2}}.$$

Thus, correlation between h and k may arise on account of a correlative variation in s and s_1.

Now we shall not discuss this correlation, because it may be wholly removed by proceeding in another manner.

To fix the ideas somewhat let the observed number of occurrences in the i:th repetition be denoted by $h^{(i)}$ and $k^{(i)}$. Then, instead of working with the correlative variation of

$h^{(i)}$ and $k^{(i)}$, let us take the relative frequencies of A and B $\frac{h^{(i)}}{s^{(i)}}$, $\frac{k^{(i)}}{s_1^{(i)}}$ and find the moments of their correlation surface. Denoting these moments by $\mu'_{\alpha\beta}$ and $\mu_{\alpha\beta}$ we evidently have

$$(41)\qquad \mu'_{\alpha\beta} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\sum_{h=0}^{s^{(i)}} \frac{\lfloor s^{(i)}}{\lfloor h \, \lfloor s^{(i)}-h} p^h q^{s^{(i)}-h}\left(\frac{h^{(i)}}{s^{(i)}}\right)^{\alpha} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \sum_{k=0}^{s_1^{(i)}} \frac{\lfloor s_1^{(i)}}{\lfloor k \, \lfloor s_1^{(i)}-k} p_1^k q_1^{s_1^{(i)}-k}\left(\frac{k}{s_1^{(i)}}\right)^{\beta}\right].$$

Hence

$$\mu'_{10} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} p = p,$$

$$\mu'_{01} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} p_1 = p_1,$$

$$(42)\qquad \mu'_{20} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{pq}{s^{(i)}} + p^2\right) = \frac{pq}{s^{(0)}} + p^2,$$

$$\mu'_{11} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} pp_1 = pp_1,$$

$$\mu'_{02} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{p_1 q_1}{s_1^{(i)}} + p_1^2\right) = \frac{p_1 q_1}{s_1^{(0)}} + p_1^2,$$

where $s^{(0)}$ and $s_1^{(0)}$ denote the *harmonic means* of s and s_1.

Further, clearly

$$\mu_{20} = \frac{pq}{s^{(0)}},$$

$$(43)\qquad \mu_{11} = 0,$$

$$\mu_{02} = \frac{p_1 q_1}{s_1^{(0)}},$$

and it follows that

$$r = 0.$$

Hence we find the important

Theorem 15. When the acting probabilities are constant and the numbers of comparison s and s_1 vary, the correlation in the variation of s and s_1 will have no influence whatever upon the correlation of the *relative numbers of occurrences*.

Employing now instead what CHARLIER terms the *reduced* statistical series $h^{(i)}\frac{s'}{s^{(i)}}$, $k^{(i)}\frac{s'_1}{s_1^{(i)}}$, where s' and s'_1 are arbitrary bases of reduction, we find for the moments in the correlation table the formulae

$$(44) \qquad \begin{gathered} \nu'_{10} = s'p; \qquad\qquad \nu'_{01} = s'_1 p_1, \\ \nu'_{20} = \frac{s'^2}{s^{(0)}}pq; \quad \nu'_{11} = 0; \quad \nu'_{02} = \frac{s_1'^2}{s_1^{(0)}}p_1 q_1. \end{gathered}$$

Thus taking for s' and s'_1 the values $s^{(0)}$ and $s_1^{(0)}$

$$(45) \qquad \begin{gathered} \nu'_{10} = s^{(0)}p; \qquad\qquad \nu'_{01} = s_1^{(0)} p_1, \\ \nu'_{20} = s^{(0)}pq; \quad \nu'_{11} = 0; \quad \nu'_{02} = s_1^{(0)}p_1 q_1. \end{gathered}$$

Hence, we arrive at the following theorem, which has before been demonstrated by CHARLIER.

Theorem 16. When a statistical series, for which the acting probability is constant but the number of comparison s varies, is reduced to the harmonic mean of s as basis, the mean and dispersion will be given by the same formulae as in the simple BERNOULLIAN case where s is constant.

To this we may add: When two parallel series are considered the correlation coefficient of the reduced elements is zero whatever may be the basis of reduction and however strong the correlation of the variation in the numbers of comparison may be.

As CHARLIER has pointed out, the variation in s and s_1 generally will be small, and then the arithmetic means may as well be taken as bases of reduction.

There remains, however a fourth case to consider.

Case IV. The numbers of comparison s and s_1 as well as the acting probabilities p and p_1 vary from repetition to repetition.

In this case the correlation function will be

$$(46)\quad P_2(h, k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{s^{(i)}!}{h!\,(s^{(i)} - h)!} \, \frac{s_1^{(i)}!}{k!\,(s_1^{(i)} - k)!} \, p^{(i)h} q^{(i)s^{(i)} - h} p_1^{(i)k} q_1^{(i)s_1^{(i)} - k}.$$

For the moments we find here by a process similar to that used above

$$(47)\quad \begin{aligned} \nu'_{10} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} s^{(i)} p^{(i)}, \\ \nu'_{01} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} s_1^{(i)} p_1^{(i)}. \end{aligned}$$

$$(48)\quad \begin{aligned} \nu'_{20} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (s^{(i)} p^{(i)} q^{(i)} + s^{(i)2} p^{(i)2}), \\ \nu'_{11} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} s^{(i)} s_1^{(i)} p^{(i)} p_1^{(i)}, \\ \nu'_{02} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (s_1^{(i)} p_1^{(i)} q_1^{(i)} + s_1^{(i)2} p_1^{(i)2}). \end{aligned}$$

Now the formulae cannot be used unless the variations in p and p_1 are independent of the variations in s and s_1. In this case we find after some algebraic work

$$(49)\quad \begin{aligned} &\nu'_{10} = sp; \qquad \nu'_{01} = s_1 p_1, \\ &\nu_{20} = spq + s(s-1)\sigma_p^2 + \sigma_s^2 p^2 + \sigma_s^2 \sigma_p^2, \\ &\nu_{11} = ss_1 \sigma_p \sigma_{p_1} r_{pp_1} + pp_1 \sigma_s \sigma_{s_1} r_{ss_1} + \sigma_p \sigma_{p_1} r_{pp_1} \cdot \sigma_s \sigma_{s_1} r_{ss_1}, \\ &\nu_{02} = s_1 p_1 q_1 + s_1(s_1 - 1)\sigma_{p_1}^2 + \sigma_{s_1} p_1^2 + \sigma_{s_1}^2 \sigma_{p_1}^2. \end{aligned}$$

If instead of the absolute numbers of occurrences $h^{(i)}$

and $k^{(i)}$ we use the reduced numbers $h^{(i)}\frac{s^{(0)}}{s^{(i)}}$, $k^{(i)}\frac{s_1^{(0)}}{s_1^{(i)}}$ we find for the moments the formulae

$$\begin{aligned} \nu'_{10} &= s^{(0)}\bar{p}, \\ \nu'_{01} &= s_1^{(0)}\bar{p}_1. \end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned} \nu'_{20} &= \frac{s^{(0)2}}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{p^{(i)}q^{(i)}}{s^{(i)}} + p^{(i)2}\right), \\ \nu'_{11} &= \frac{s^{(0)}s_1^{(0)}}{N}\sum_{i=1}^{N}p^{(i)}p_1^{(i)}, \\ \nu'_{02} &= \frac{s_1^{(0)2}}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{p_1^{(i)}q_1^{(i)}}{s_1^{(i)}} + p_1^{(i)2}\right). \end{aligned} \tag{51}$$

Hence, for the moments about the mean we obtain the formulae

$$\begin{aligned} \nu_{20} &= s^{(0)}\overline{pq} + s^{(0)}(s^{(0)}-1)\sigma_p^2 + s^{(0)^2}\sigma_{pq}\,\sigma_{1/s}r_{pq,\,1/s}, \\ \nu_{11} &= s^{(0)}s_1^{(0)}\,\sigma_p\sigma_{p_1}r_{pp_1}, \\ \nu_{02} &= s_1^{(0)}\overline{p_1 q_1} + s_1^{(0)}(s_1^{(0)}-1)\sigma_{p_1}^2 + s_1^{(0)^2}\sigma_{p_1q_1}\sigma_{1/s_1}r_{p_1q_1,\,1/s_1}, \end{aligned}$$

where σ_{pq}, $\sigma_{1/s}$, $r_{pq,1/s}$ denote the dispersions and coefficient of correlation of the quantities $p^{(i)}q^{(i)}$ and $1/s^{(i)}$.

It will be seen that the terms in σ_p^2 and in $r_{pq,1/s}$ are multiplied by the same power of $s^{(0)}$. If $s^{(0)}$ is a great number, and if $s^{(0)}\overline{pq}$ is also fairly great $1/s$ must be of a smaller order of magnitude than pq. Thus, when there is actually supernormal dispersion, generally $\sigma_{1/s}$ is of a smaller order of magnitude than σ_{pq}; but σ_{pq} is always smaller than σ_p. Hence it follows that the last term in ν_{20} and ν_{02} usually can be neglected as compared with the second term.

Theorem 17. If s and s_1 as well as p and p_1 vary, and we work with reduced series, the dispersion and correlation formulae of Case II will generally be applicable, if only

$s^{(i)}pq$ and $s_1^{(i)}p_1q_1$ are fairly large. In other cases the formulae are applicable if the variations in the quantities $p^{(i)}q^{(i)}$ and $p_1^{(i)}q_1^{(i)}$ are independent of the variations in $1/s^{(i)}$ and $1/s_1^{(i)}$.

Elimination of time-factors. Very often statistical series that are to be investigated consist of elements observed at different times. It is then generally the case that the acting probabilities are correlated to the epoch of action. Thus there may be both secular and periodical variation in the acting probabilities. The secular variation may be linear or parabolic of the second, the third degree etc., and the periodical variations may be of any description. If for instance we consider the number of deaths at a certain age in different months during the last twenty years, then the acting probabilities, i. e. the true death-rates, will show a steady decrease during the twenty years and simultaneously a yearly periodical variation; but there may also be irregular variations that are not correlated to time. Taking the yearly death-rates at a certain age there will be a secular decrease and perhaps other periodical and oscillatory variations. Thus there will be a strong supernormal dispersion, and, if two series are considered, a strong correlation, due chiefly to the time-factors common to the acting probabilities in both series. However, in investigations of this kind, the chief interest lies in the study of the dispersion and correlation between the *oscillatory* variations which remain when the time factors have been removed. When there are no periodical fluctuations the problem of isolating the oscillatory variations presents no serious difficulties. The secular components may be removed by the method of CHARLIER, or the whole investigation may be carried out with the aid of the variate-difference method of PEARSON. The method of CHARLIER applies only to the case of linear secular variations, but it could easily be extended to other cases. The method of variate-differences seems to be quite general. The problem of removing also the periodic variations has, so far as I know, not yet been treated. Evidently the general solution of this problem belongs to the theory of harmonic analysis. However, the statistical series are generally not extensive enough to permit of any such treatment. As it is, when the periods are not known

a priori we have to be content with the study of the variations which remain when the secular components have been eliminated. In the general case the deviations from the time-factor in two adjoining elements of the same series need not be independent of each other. Indeed, it must be exceedingly common for some sort of periodical fluctuations to arise owing to the fact that causes of disturbance are effective during an interval covering the epochs of observation of two or more elements. For instance, an epidemic may go on for several years, thus affecting several adjoining death rates. And in a still higher degree this will take place wherever economic conditions have a sensible influence as, for instance, in the case of the marriage rates etc.

Now, in the method of CHARLIER the statistical series is smoothed out by the aid of the method of least squares. By subtracting the ordinates of the smooth line from the observations the residuals are obtained. For various reasons it will be clear that the eventual periodicity of small period in the residuals will not seriously injure the result. It is true that the method of least squares assumes the residuals to be independent of each other. But it need be so only on the average. If there is a periodical variation the correlation between two residuals separated by one half period will be about as strongly negative as the correlation between adjoining residuals is positive. Hence the correlation may well be small on an average.

However, the method of least squares will in all cases here in question give fairly »time-free» residuals.

In the case of the variate-difference method, however, it seems as if the eventual interdependence of neighbouring elements will be a more serious factor.

The chief condition for this method seems to lie even in the independency of adjoining residuals. Assuming the secular variation to be linear and denoting by σ_Δ the dispersion of the first differences, by r_{12} the coefficient of correlation of adjoining residuals and by σ_ξ the dispersion of the residuals themselves, we have

(53) $$\sigma_\Delta^2 = 2\sigma_\xi^2 (1 - r_{12}).$$

If r_{12} is not zero there is, indeed, no way of determining it (other than by comparing with the results of the method of CHARLIER) and the method will not give the value of σ_ξ.

In the following we shall develop a method which is closely related to that of CHARLIER, but will be somewhat less laborious of application.

Taking only the case that the secular variation is linear we can write (at the time t)

$$(54) \qquad \begin{aligned} p^{(t)} - c &= at + \xi, \\ p_1^t - c_1 &= a_1 t + \xi_1. \end{aligned}$$

c, c_1 and a, a_1 are here constants and ξ and ξ_1 are the time-free residuals. The constants are found by the method of least squares in the following fashion. Exchanging for the »true» values of $p^{(t)}$ and $p_1^{(t)}$ the »observed» values $\frac{h^{(t)}}{s^{(t)}} = x^{(t)}$ and $\frac{k^{(t)}}{s^{(t)}} = x_1^{(t)}$, we have the equations of condition

$$(55) \qquad \begin{aligned} x^{(t)} &= c + at + \xi, \\ x_1^{(t)} &= c_1 + a_1 t + \xi_1. \end{aligned}$$

The normal equations are

$$(56) \qquad \begin{aligned} [x] &= c + a \,.\, N\frac{N+1}{2}, \\ [tx] &= cN\frac{N+1}{2} + \frac{1}{6}aN(2N^2 + 3N + 1), \end{aligned}$$

and

$$(57) \qquad \begin{aligned} [x_1] &= c + a_1 N\frac{N+1}{2}, \\ [tx_1] &= c \,.\, N\frac{N+1}{2} + \frac{1}{6}a_1 N(2N^2 + 3N + 1). \end{aligned}$$

It is of importance to note that this determination of c, a, c_1, a_1 is of a character to make the means of $\xi, \xi_1, t\xi, t\xi_1$ vanish.

Hence we have especially

(58)
$$a\frac{N^2-1}{12}=\frac{1}{N}[t\pi]-\frac{N+1}{2}[\pi]\frac{1}{N},$$

$$a_1\frac{N^2-1}{12}=\frac{1}{N}[t_1\pi]-\frac{N+1}{2}[\pi_1]\frac{1}{N}.$$

The values of $[\pi]$, $[t\pi]$; $[\pi_1]$, $[t\pi_1]$ are to be taken from the series of observations, and thus a and a_1 are found. If we are working with reduced statistical series we have

$$\frac{1}{N}[\pi]=\frac{m}{s^{(0)}},$$

$$\frac{1}{N}[t\pi]=\frac{1}{s^{(0)}}\left[t\frac{h^{(t)}}{s^{(t)}}s^{(0)}\right]\frac{1}{N},$$

and similarly for the other series.

Having recourse to the equations

$$p^{(t)}-c=at+\xi,$$

$$p_1^{(t)}-c_1=a_1t+\xi_1,$$

we find, since the means of the residuals are zero,

(60)
$$\bar{p}-c=a\frac{N+1}{2},$$

$$\bar{p}_1-c=a_1\frac{N+1}{2}.$$

Further, because $[t\xi]$ and $[t\xi_1]$ are zero,

$$\sigma_p^2=\frac{a^2}{12}(N^2-1)+\sigma_\xi^2,$$

(61)
$$\sigma_p\sigma_{p_1}r_{pp_1}=\frac{aa_1}{12}(N^2-1)+\sigma_\xi\sigma_{\xi_1}r_{\xi\xi_1},$$

$$\sigma_{p_1}^2=\frac{a_1^2}{12}(N^2-1)+\sigma_{\xi_1}^2.$$

We accordingly have

$$
(62) \qquad
\begin{aligned}
\sigma_{\zeta}^2 &= \sigma_p^2 - \frac{a^2}{12}(N^2 - 1), \\
\sigma_{\zeta_1}^2 &= \sigma_{p_1}^2 - \frac{a_1^2}{12}(N^2 - 1).
\end{aligned}
$$

$$
(63) \qquad r_{\zeta\zeta_1} = \frac{\sigma_p \sigma_{p_1} r_{pp_1} - \frac{a a_1}{12}(N^2 - 1)}{\sqrt{\sigma_p^2 - \frac{a^2}{12}(N^2 - 1)} \cdot \sqrt{\sigma_{p_1}^2 - \frac{a_1^2}{12}(N^2 - 1)}}.
$$

Now we have by (29)

$$
(64) \qquad
\begin{aligned}
\sigma_{\zeta}^2 &= \frac{1}{s^{(0)2}}\left[r_{20} - m\left(1 - \frac{m}{s^{(0)}}\right) - \frac{s^{(0)2} a^2}{12}(N^2 - 1)\right], \\
\sigma_{\zeta_1}^2 &= \frac{1}{s_1^{(0)2}}\left[r_{02} - m_1\left(1 - \frac{m_1}{s_1^{(0)}}\right) - \frac{s_1^{(0)2} a_1^2}{12}(N^2 - 1)\right], \\
\sigma_{\zeta}\sigma_{\zeta_1} r_{\zeta\zeta_1} &= \frac{1}{s^{(0)} s_1^{(0)}}\left[r_{11} - \frac{s^{(0)} s_1^{(0)} a a_1}{12}(N^2 - 1)\right].
\end{aligned}
$$

When there are only secular variations of p and p_1 and no periodical or oscillatory fluctuations, we shall have

$$
\sigma_{\zeta} = 0; \quad \sigma_{\zeta_1} = 0.
$$

Numerical examples. *Example 1.* We shall first give an example of *Theorem 4*, that is of the theorem of BERNOULLI for two attributes. To this end we have made an experiment. A thoroughly shuffled pack of cards was laid out in the following way: In the order in which the cards were taken from the pack they were placed in 13 heaps, the first containing »aces», the second »twos», the third »threes» etc. The number h of red cards on top of the heaps and the number k of red cards at the bottom of the heaps were counted. This operation was repeated 30 times, much care being taken to shuffle the pack well between each repetition.

The number l of heaps having red both at the top and at the bottom was also counted.

The result was as follows:

Table I.

Trial	h	k	l
1	4	5	0
2	8	5	3
3	7	7	3
4	6	7	2
5	6	8	3
6	6	10	3
7	9	6	3
8	8	6	3
9	8	5	2
10	7	9	4
11	8	7	2
12	9	6	4
13	9	7	4
14	8	3	2
15	3	7	2
16	7	7	3
17	4	8	1
18	8	6	2
19	8	7	2
20	6	6	1
21	7	6	2
22	8	6	2
23	8	5	2
24	6	6	2
25	4	10	3
26	6	6	2
27	6	7	3
28	5	9	2
29	6	6	1
30	11	6	4
Sum	206	199	72
	H	K	L

Arranging all the observations in a fourfold table we obtain

		Top: Red	Top: Black	
Bottom	Red	$72 = L$	127	$199 = K$
	Black	134	57	191
		$206 = H$	184	$390 = S$

From this we derive

$$\frac{H}{S} = 0{,}5282 = p \qquad q = 0{,}4718$$

$$\frac{K}{S} = 0{,}5102 = p_1 \qquad q_1 = 0{,}4898$$

$$\frac{L}{S} = 0{,}1846 = x_1$$

The theoretical values are easily found to be

$$p = 1/2$$

$$p_1 = 1/2$$

$$x_1 = 1/6$$

Hence we find by (6):

Theoretical value of $r = -0{,}3333$;

Observed fourfold table value of $r = -0{,}3399 \pm 0{,}048$.

The mean error is taken from formula (46) of the previous article. Hence there is seen to be a very good correspondence between theory and observation.

But the most interesting feature of the experiment will be to see how the fourfold table value of r corresponds with

the coefficient of correlation between h and k in the repetitions. From table I we derive

$$\nu'_{10} = 6{,}867 \qquad\qquad \nu'_{01} = 6{,}633$$

$$\nu'_{20} = 3{,}0491 \qquad \nu_{11} = -1{,}0822 \qquad \nu_{02} = 2{,}2326.$$

From this it follows that

$$\sigma = 1{,}7462 \pm 0{,}22,$$

$$\sigma_1 = 1{,}4942 \pm 0{,}20,$$

where as the theoretical values are

$$\sigma = \sigma_1 = \sqrt{\frac{13}{4}} = 1{,}8028.$$

For the coefficient of correlation we obtain

$$r = -0{,}4157 \pm 0{,}1622.$$

The mean errors are computed from the ordinary formulae valid for normal correlation i. e.

$$\varepsilon(\sigma) = \frac{\sigma}{\sqrt{2N}}; \quad \varepsilon(r) = \frac{1 - r^2}{\sqrt{N}}.$$

Taking the mean errors into account it will be seen that the correspondence is satisfactory. However it may be that an imperfection in shuffling has made the dispersions *subnormal* and consequently the observed value of r too great.

Example 2. Correlation between the number of suicides among men and women in Swedish rural districts, different months 1891—1910. This will give an example of theorem 14. The rural districts were chosen because there the population has been reasonably constant during the 20 years in question. Indeed, for the whole population we have

	1890	1910
men	1 906 494	2 074 169
women	1 978 789	2 083 435

It is true that as numbers of comparison we should here rather take the population between, say, 15 and 80 years of age, as practically all suicides occur between these ages, and are there fairly uniformly distributed (see for instance *Sverges Officiella statistik: Dödsorsakerna 1911 and 1912*). But as we have here to do with rare events *the choice of the numbers of comparison is of no consequence whatever.* All that counts is whether they may be regarded as constant or not. I think that the error introduced by their variation will be negligible in this case. However, as we only wish to give an illustration of the computations involved and not to discuss the numerical results, and as besides, there would be no difficulty in obtaining the reduced series by which the effects of variation in s and s_1 would be wholly removed, we shall not go further into the question.

The material was taken from *Sverges officiella statistik A. 1891—1910* and gave the following correlation table.

Table II.

Number of suicides among men

Number of suicides among women	10-14	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49	50-54	55-59	60-64	65-69	70-74	Total
2—3	1	—	—	2	4	—	1	—	—	—	—	—	—	8
4—5	—	3	6	5	5	2	1	—	1	—	—	—	—	23
6—7	3	1	7	5	5	7	4	—	1	—	—	—	—	33
8—9	—	3	5	9	8	6	4	1	—	—	—	—	—	36
10—11	—	5	7	6	10	4	2	1	—	—	—	—	—	35
12—13	1	2	12	4	6	3	2	3	2	—	—	1	1	35
14—15	1	2	1	8	6	5	—	1	—	—	—	—	—	26
16—17	1	—	4	1	6	2	3	2	—	—	—	—	—	19
18—19	—	—	2	1	2	1	—	3	—	—	—	—	—	9
20—21	—	—	—	2	3	1	2	1	—	—	—	—	—	9
22—23	—	—	2	1	1	1	—	—	—	—	—	—	—	5
24—25	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	1
26—27	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
Total	7	16	47	44	56	33	19	12	4	—	—	1	1	240

From this we find

$$m = 30{,}92 \qquad m_1 = 11{,}56$$

$$\nu_{20} = 87{,}287 \qquad \nu_{11} = +6{,}009 \qquad \nu_{02} = 22{,}272$$

Hence

$$\sigma = 9{,}34 \qquad \sigma_1 = 4{,}72$$

$$r = +0{,}1363 \pm 0{,}0634$$

Further $\frac{m}{\nu_{20}} = 0{,}3542 = \frac{1}{L^2}$; $\frac{m_1}{\nu_{02}} = 0{,}5191 = \frac{1}{L_1^2}$. We have here cases of considerable supernormality.

We hence derive

$$\sqrt{1 - \frac{m}{\nu_{20}}} \cdot \sqrt{1 - \frac{m_1}{\nu_{02}}} = 0{,}5572$$

and

$$r_{pp_1} = \frac{r}{0{,}5572} = 0{,}2446 \pm 0{,}11.$$

Hence the coefficient of correlation of p and p_1 is nearly twice as great as the coefficient of correlation of the number of suicides.

Obviously the correlation chiefly arises on account of there being a yearly period in the numbers of suicides for both men and women.

It should be added that the condition that the numbers of occurrences in the two series shall exert no direct influence on each other is here not strictly fulfilled. Obviously the double suicides influence both the series in the same direction. I assume, however, that the error produced by double suicides can be neglected.

Example III. Correlation in infantile and child mortality. Different departments of Sweden, rural districts, 1911. The material is taken from *Sverges officiella statistik. Befolkningsrörelsen 1911* and *Folkräkningen* (*Census*) *Dec. 31, 1910. II.*

Table III gives:

In column 1: The number of deaths at the age 0—1 years in 1911.

» » 2: The number of 0—1 year old children Dec. 31, 1910.

» » 3: The number of deaths at the age 1—5 years in 1911.

» » 4: The number of 1—5 year old children Dec. 31, 1910.

Table III.

	Rural districts in		1	2	3	4
1.	Stockholms	län	435	5195	214	20732
2.	Uppsala	-	158	2196	47	8628
3.	Södermanlands	-	218	3105	84	11836
4	Östergötlands	-	318	5044	129	19781
5.	Jönköpings		219	4035	117	16018
6.	Kronobergs		179	3368	84	13058
7.	Kalmar		247	4026	113	16540
8.	Gottlands		59	926	22	3532
9.	Blekinge		186	2671	93	10382
10.	Kristianstads		386	4683	190	18735
11.	Malmöhus		488	6383	224	25358
12.	Hallands		180	2543	74	9986
13	Göteborgs & Bohus		299	4448	153	17600
14.	Älvsborgs		293	5037	157	20053
15	Skaraborgs		239	4009	171	16197
16.	Värmlands		243	4823	110	19520
17.	Örebro		235	3672	112	14982
18.	Västmanlands		186	2671	96	10793
19.	Kopparbergs		307	5024	164	20591
20.	Gävleborgs		395	5015	175	19433
21.	Västernorrlands		483	5848	206	22182
22	Jämtlands		185	2726	75	10297
23.	Västerbottens		365	4317	122	16560
24	Norrbottens		458	4719	142	17920
			6761	96484	3174	380714

Neglecting the increase in the number of 0—1 year old and 1—5 year old children during 1911, the death-rates are obtained by dividing the numbers of column 1 by the numbers of column 2 and the numbers of column 3 by those of column 4. We thus obtain table IV.

Table IV.

District	π	π_1
1	0,0837	0,01032
2	0,0719	0,01124
3	0,0702	0,00709
4	0,0630	0,00652
5	0,0542	0,00730
6	0,0531	0,00643
7	0,0614	0,00683
8	0,0637	0,00623
9	0,0696	0,00896
10	0,0824	0,01013
11	0,0764	0,00883
12	0,0708	0,00741
13	0,0672	0,00869
14	0,0582	0,00783
15	0,0596	0,01056
16	0,0504	0,00563
17	0,0640	0,00748
18	0,0696	0,00890
19	0,0611	0,00796
20	0,0788	0,00901
21	0,0826	0,00929
22	0,0679	0,00728
23	0,0845	0,00737
24	0,0971	0,01071
	1,6614	0,19800

For the moments of the observed death-rates we now find

$$\nu'_{10} = 0{,}0692 = p \qquad \nu'_{01} = 0{,}00825 = p_1$$

$$\nu_{20} = 0{,}000129 \qquad \nu_{11} = 0{,}0000109 \qquad \nu_{02} = 0{,}000000233\,.$$

And as a consequence

$$r = +\,0{,}6288 \pm 0{,}204\,.$$

Further the harmonic means of the number of 0—1 year old and the number 1—5 year old children are

$$s^{(0)} = 3388\,; \qquad s_1^0 = 13270\,.$$

Hence we have

$$L^2 = \frac{s^{(0)}\,\nu_{20}}{p(1-p)} = 6{,}789\,,$$

$$L_1^2 = \frac{s_1^{(0)}\,\nu_{02}}{p(1-p)} = 3{,}779\,,$$

or

$$L = 2{,}605\,; \quad L_1 = 1{,}946\,.$$

We have, thus, considerable supernormality of dispersion in both series. Indeed, computing the CHARLIER coefficients of disturbancy we find

$$100\,\varrho = 15{,}16\,; \quad 100\,\varrho_1 = 15{,}85\,,$$

which means that the dispersions in p and p_1 amount to 15,16 % and 15,85 % respectively of their mean values.

We have now

$$\sqrt{1-\frac{1}{L^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{L_1^2}} = 0{,}6791\,,$$

and thus

$$r_{pp_1} = \frac{r}{0{,}6791} = +\,0{,}9259 \pm 0{,}30\,.$$

We hence find that the correlation of the »true» death rates for infants and for 1—5 year old children is high and positive. The mean error is too small to make this fact in any way uncertain.

The result seems to speak against the opinion held by several English statisticians who mean to have found evidence of a »natural selection in man» in the data of infantile and child mortalities.

As a final example we take one in which time factors are involved. As we only wish to give an example of the calculations we take a couple of series which are ready made in the Swedish public statistics, without paying heed to the fact that they are too short to allow of any conclusion being drawn from the numerical results.

Example IV. Correlation between the fluctuations in the death-rates for children between 0—1 and 1—3 years old in Sweden. During the years 1901—1913. *Statistisk Årsbok för Sverige 1915 and 1917. Sveriges officiella statistik: Befolkningsrörelsen 1901—1910.*

From the cited publications we take table V, where in column 1 we give the deaths of 0—1 year old children divided by the number of living children born in the respective years, and in column 2 the number of deaths of 1—3 year old children divided by the mean number of children 1—3 years old in the respective years.

Table V.

	π	π_1
1901	0,1029	0,02151
02	0,0864	0,02011
03	0,0928	0,01940
04	0,0844	0,01682
05	0,0883	0,01699
06	0,0810	0,01461
07	0,0768	0,01438
08	0,0854	0,01543
09	0,0722	0,01247
10	0,0751	0,01396
11	0,0720	0,01286
12	0,0709	0,01340
13	0,0697	0,01152
mean	0,0814	0,01565

We find here

$$p = 0{,}0814; \qquad p_1 = 0{,}01565$$

$$r'_{20} = 0{,}0002480; \qquad r'_{11} = + 0{,}0000270; \qquad r'_{02} = 0{,}00000900$$

$$\sigma = 0{,}01575; \qquad r = 0{,}5714 \pm 0{,}1868; \qquad \sigma_1 = 0{,}00300.$$

For $s^{(0)}$ we take the mean yearly number of living children born 1901—1910 and for $s_1^{(0)}$ the mean number of 1—3 year old children 1901—1910. We have then

$$s^{(0)} = 136841 \qquad s_1^{(0)} = 242780.$$

Hence we have

$$\frac{pq}{s^{(0)}} = 0{,}0000005461$$

$$\frac{p_1 q_1}{s_1^{(0)}} = 0{,}00000006343.$$

And it follows that

$$L^2 = 454{,}1$$

$$L_1^2 = 141{,}8$$

$$\sqrt{1 - \frac{1}{L^2}}\sqrt{1 - \frac{1}{L_1^2}} = 0{,}995 \text{ and}$$

$$\sigma_p^2 = 0{,}0002475 \qquad r_{pp_1} = 0{,}5742 \pm 0{,}1877 \qquad \sigma_{p_1}^2 = 0{,}00000894.$$

We thus see, as was to be expected on account of the common time-factors, that the »true» death-rates are decidedly correlated.

Eleminating the time-factors we have first to determine the quantities a and a_1. We have

$$N = 13; \qquad \frac{N^2 - 1}{12} = 14;$$

$$\frac{1}{N}[tx] = 0{,}53765; \qquad \frac{1}{N}[tx_1] = 0{,}099055.$$

Hence, from (58),

$$a = -0{,}002281 \qquad a_1 = -0{,}000750.$$

And from (61) and (30) we derive

$$\sigma_\xi^2 = 0{,}0001747 \qquad \sigma_\xi = 0{,}01322$$

$$r_{\xi\xi_1} = +0{,}224$$

$$\sigma_{\xi_1}^2 = 0{,}00000106 \qquad \sigma_{\xi_1} = 0{,}001030.$$

Here the coefficients of disturbancy are

$$100\,\varrho = 16{,}24\ \% \qquad 100\,\varrho_1 = 6{,}58\ \%,$$

indicating a strong supernormality in the time-free fluctuations.

For the mean error of $r_{\xi\xi_1}$ I have not yet deduced the formula. It could be done with the aid of (63). I suppose, however, that it is of the same order of magnitude as the mean error of r_{pp_1}. In that case it will be about 0,20. If that is so, we should be able to conclude that there is probably a moderate positive correlation between the »time-free» fluctuations in the death rates for 0—1 and 1—3 year old children in different years.

We have previously found that there is a decidedly positive correlation in the true death-rates of 0—1 and 1—5 year old children in the different rural districts. Indeed, there should be nothing very surprising in there being a stronger correlation (and variation) if the death rates are taken in different local districts than if they are taken in different years.

Litteratur.

Utjämning av sjutton svenska livförsäkringsbolags dödlighetstabeller för läkarundersökta livförsäkrade. På uppdrag av Kungl. Försäkringsinspektionen verkställd av Gustaf Stoltz. Stockholm 1917.

Der har i den sidste Snes Aar været en overordentlig frodig Udvikling i Spørgsmaalet om Undersøgelsen af Dodeligheden blandt livsforsikrede. I Spidsen for de moderne Undersøgelser paa dette Omraade staar den engelske for Perioden 1863—93, hvis Offentliggørelse afsluttedes med det i 1903 udkomne Bind, der gør Rede for de anvendte Metoder og Principer. Endvidere er der i den senere Tid foretaget Dodelighedsundersøgelser for livsforsikrede i franske Selskaber (1895), i amerikanske Selskaber (1903 og 1912—14), i skandinaviske Selskaber (1906), i østerrig-ungarske Selskaber (1907—09), medens en Undersøgelse for livsforsikrede i tyske Selskaber er paabegyndt men endnu ikke fuldført. De her nævnte Undersøgelser omfatter alle en Flerhed af Selskaber, men ogsaa for enkelte Selskaber er der i de senere Aar foretaget adskillige særlige Undersøgelser; i første Række maa man her nævne Karups omfattende Undersøgelse for Gothabanken (1903).

Naturligvis har den nuværende Krig for de deltagende Landes Vedkommende lagt Hindringer i Vejen for denne raske Udviklings Fortsættelse, men med saa megen desto større Glæde hilser man derfor Bidrag fra de ikke krigsførende Lande til de her omhandlede Spørgsmaals nærmere Klarlæggelse. Et saadant interessant Bidrag har svenske Aktuarer givet ved den i 1907 paabegyndte og i 1915 afsluttede Undersøgelse, hvis Resultater foreligger i det i 1915 udkomne Bind: Undersökning af Dödligheten enligt Erfarenheten hos sjutton svenska Lifförsäkringsbolag. Läkareundersökta normala risker $^{1}/_{1}$ 1895—$^{31}/_{12}$ 1906. Det er de af denne Undersøgelse fremgaaede Tavler, Aktuaren i Balder, Gustaf Stoltz, efter Opfordring fra Försäkringsinspektionen har foretaget en Udjævning af.

Før Anmelderen kommer nærmere ind paa denne Udjævning vil det være hensigtsmæssigt at gøre nogle Bemærkninger om den Funktion, der ved de svenske Undersøgelser er benyttet som Maal for Dødeligheden.

Ved den nyeste Tids Dødelighedsundersøgelser har man i højere Grad, end det tidligere var Tilfældet, taget Hensyn til Nødvendigheden af at skabe et saa ensartet Materiale som muligt. De moderne Undersøgelser har derfor været foretaget særskilt for hvert Køn og for hver Forsikringsart. Man har endvidere skelnet mellem Personer antaget paa normale Betingelser og Personer antaget med visse Restriktioner og er endda i enkelte Tilfælde — som f. Eks. ved den sidste amerikanske Undersøgelse — gaaet endnu videre og har delt den førstnævnte Klasse i Underklasser efter den større eller mindre »Belastning» i Henseende til Helbred, Familieforhold o. l., der har kunnet forenes med den normale Antagelse. De derigennem vundne Resultater afgiver gode Korrektiver for den fremtidige Bedømmelse ved Antagelsen.

og en vigtig Del af Fremtidens Dødelighedsundersøgelser vil vistnok komme til at ligge paa dette Omraade. Bestrbelserne for at opnaa større Homogenitet har ogsaa ført til, at man ved moderne Dødelighedsundersøgelser bestemmer Dødeligheden som Funktion ikke alene af Alderen, men ogsaa af den siden Indtrædelsen forløbne Tid. Det Maal for Dødeligheden, man da har bestemt, har i Almindelighed været $q_{[x]+t}$, Sandsynligheden for at en $x + t$ aarig, der har været forsikret i t Aar, skal dø i Løbet af det kommende Aar. Da Aldersaarene og Forsikringsaarene i Almindelighed ikke er sammenfaldende, har man maattet foretage en vis Afrunding for ét af Argumenterne. Man har da i Reglen valgt at afrunde Alderen ved Indtrædelsen til hele Aar (nærmeste Alder, fyldt Alder eller Alder næste Fødselsdag) og derefter som Observationsaar at benytte Forsikringsaarene. En saadan Gruppering er saa meget desto naturligere, som man derved kommer til at regne med Grupper af Forsikrede, der i Henseende til Alder er identiske med dem, der benyttes, naar Præmien skal bestemmes ved Indtrædelsen.

Ved den her omhandlede nye svenske Undersøgelse har man imidlertid ønsket at faa en eksakt Afgrænsning saavel med Hensyn til Alder som til Forsikringstid. Man har derfor af samtlige Observationstider samlet sammen, hvad der falder mellem eksakt Alder $x + t$ og $x + t + 1$ og samtidig ligger mellem t og $t + 1$ Aar fra Indtrædelsen (x og t hele Tal). Ved Bestemmelsen af en saadan Observationstid, der kan betegnes ved $E_{[x]+t}$, regnes med Maaneds Nøjagtighed. Det tilsvarende Antal Dødsfald vil vi betegne med $\Theta_{[x]+t}$. Som Maal for Dødeligheden benyttes da i den svenske Undersogelse den saakaldte centrala Dødskvote, $m_{[x]+t} = \frac{\Theta_{[x]+t}}{E_{[x]+t}}$. Naturligvis er de Erfaringer, der benyttes til Bestemmelsen af denne Dødskvote, paa en enkel og eksakt Maade afgrænset saavel med Hensyn til Alder som til Forsikringstid, men en Afrunding, en Henførsel til en Middelværdi af Argumenterne, undgaar man dog ikke, naar man vil anvende den fundne Dødskvote. I den ovennævnte Publikation af Undersøgelsesresultaterne paavises det udförligt (pag. 33—39), at $m_{[x]+t}$ med Tilnærmelse er = Dødelighedsstyrken svarende til Midtpunkterne af Argumenterne, $\mu_{[x]+t+1/2}$. $[x]$ er her Middelværdien af Indtrædelsesaldre, der ligger mellem $x - 1$ og $x + 1$, medens $t + {}^1/_2$ er Middelværdien af Forsikringstider fra t til $t + 1$. Hvor god den nævnte Tilnærmelse bliver, afhænger af μ's og E's Variation med Argumenterne. Denne Variation er dels af systematisk Art (E vokser med Alderen for lave Aldre og aftager for høje), hvorved ogsaa Fejlene bliver systematiske, dels af tilfældig Art, hvorved Fejlene kan blive væsentlig forskellige for to ved Siden af hinanden liggende Argumenter. Det forekommer derfor Anm. ikke at være helt berettiget, naar Fejlen i den ovennævnte Udvikling maales ved sin *gennemsnitlige* Størrelse, der findes kun at være en Brókdel af en Maaned.

Det skal villig indrømmes, at $q_{[x]+t}$ paa de Steder, hvor denne Funktion varierer stærkt med Argumenterne (i de første Forsikringsaar eller i de høje Aldre), kun giver et utydeligt Billede af Dødelighedens Forløb. Et godt bestemt μ vilde paa disse Steder være langt

bedre, men uheldigvis bliver ovennævnte Bestemmelse af μ ret usikker netop paa disse Steder. Man vil kunne komme over disse vanskelige Steder ved at regne med mindre Enheder end Aaret, men i saa Tilfælde forøges q's Anvendelighed fuldt saa vel, som Bestemmelsen af μ ovenfor bliver nøjagtigere. Det forekommer derfor Anm., at der ikke vindes noget i Nøjagtighed ved Valget af m i Stedet for q, og at der saaledes ikke faas Equivalent for det væsentlig forøgede Arbejde med Delingen af Forsikringsaarene paa de enkelte Aldersaar, Bestemmelsen af m medfører.

For Udjævningens Vedkommende er det imidlertid en Fordel, at de direkte observerede Sandsynligheder betragtes som Dødelighedsstyrker, saa man ved Anvendelse af Makehams Formel kan opnaa de Fordele, denne Formel frembyder. Stoltz sætter

$$m_{[x]+t} = \alpha_t + \beta_t \cdot c^{x+t} \text{ eller}$$

$$m_{[x]+t} \cdot E_{[x]+t} = \Theta_{[x]+t} = \alpha_t \cdot E_{[x]+t} + \beta_t \cdot c^{x+t} \cdot E_{[x]+t},$$

hvor α_t og β_t er Funktioner alene af t. Ved Bestemmelsen af Konstanterne gaar Stoltz derefter frem paa lignende Maade som Hardy ved Udjævningen af de engelske Erfaringer, idet han for visse simple skønnede Værdier af log c bestemmer de tilsvarende Værdien af α_t og β_t ved at sætte Momenterne af 0te og 1ste Grad i $[x]$ — eller hvad der fører til nøjagtig samme Resultat i $[x] + k$, hvor k er en Konstant — ligestor for de observerede og for de beregnede Døde. Dette kan som bekendt ske derved, at 1ste og 2den Sum af de observerede og af de beregnede Døde sættes lige store. Af de fremkomne Afvigelser mellem de observerede og de beregnede Døde skønnes derefter, hvilken Værdi af log c, man maa anse for den bedste.

Mod denne som mod andre Anvendelser af Momentmetoden til Udjævning kan invendes, at der ikke tages Hensyn til de observerede Størrelsers Vægte. Betydningen af denne Indvending er imidlertid langt mindre, naar de observerede Størrelser som her er Antal Døde end naar man som observerede Størrelser har μ_x eller — log p_x. Dels er nemlig i Almindelighed Rækken af Vægte mindre stærkt varierende, naar Talen er om de observerede Antal Dødsfald, end naar Talen er om μ_x eller — log p_x, og dels er Fordringen om, at Summen af de observerede og af de beregnede Døde skal være ligestore, en saadan, som enhver Praktiker saa nær som mulig vil kræve opfyldt uafhængig af, hvilke Principer man iøvrigt lægger til Grund for Udjævningen. Den af Forf. anvendte Udjævningsmetode har den Fordel at være saa simpel, at den tillader Masseudjævning af Erfaringer for enkelte Forsikringsaar, for Grupper af saadanne o. s. v. og derved give gode Midler til at udfinde, hvorledes α_t og β_t varierer med t. Men netop derved kommer ogsaa en af Svaghederne ved Metoden frem.

Naar Metoden som her for et enkelt Forsikringsaar gennemføres med Benyttelse af 1ste og 2den Sum, betyder det, at man som Momentarme benytter $[x] + k$, hvor k afhænger af de mer eller mindre tilfældige Grænser, hvorimellem Indtrædelsesaldrene ligger. Denne Tilfældighed faar imidlertid som ovenfor nævnt ingen Indflydelse paa Værdien af Konstanterne. Er der derimod Tale om at udjævne Erfaringerne for Grupper af Forsikringsaar (f. Eks. femaarige Grupper) eller for en

Sluttavle, er der — som af Forf. anført pag. 20 — de to paa Forhaand lige nærliggende Muligheder:

I. Man kan ordne Erfaringerne i hver Gruppe af Forsikringsaar efter opnaaet Alder og derefter danne 1ste og 2den Sum (ɔ: benytte $[x] + t$ som Momentarm) eller

II. Man kan danne Ligninger svarende til 1ste og 2den Sum særskilt for hvert enkelt Forsikringsaars Erfaringer og derefter addere alle 1ste Sums Ligninger for sig og alle 2den Sums Ligninger for sig, ialt α_t og β_t erstattes med deres Gennemsnitsværdi α og β.

Metode II er anvendt ved de pag. 5—11 anførte Udjævninger· Metode I ved Sluttavlerne f. Eks. pag. 22—23 og forøvrigt ved alle endelige Udjævninger af Sluttavler. Ligningen svarende til 1ste Sum bliver naturligvis den samme, hvad enten I eller II omvendes, men Forskelligheden i Ligningen svarende til 2den Sum gør, at de endelige Resultater kan blive ret forskellige. Forf. anfører pag. 20, at for livsvarige Livsforsikringer, Forsikringsaar 10—51 og log $c = 0.038$ faas

ved Metode I: $\alpha = 0.00335$ og $\beta = 0.0001358$ og
ved Metode II: $\alpha = 0.00427$ og $\beta = 0.0001272$.

Man vil af Konstanternes Størrelse kunne slutte, at Metode II for de unge Aldre giver en betydelig højere Dødelighed end Metode I, medens Forholdet er omvendt for de høje Aldre. En Prøve viser da ogsaa, at Metode II helt op til Alder 50 Aar giver en Dødelighed væsentlig højere end Erfaringerne. Selv om Overensstemmelsen mellem observerede og beregnede Døde efter II bliver væsentlig bedre, naar disse samles efter Indtrædelsealder, kan Anm. dog ikke dele Forf's Opfattelse, at det er svært at vælge mellem de to Metoder (pag. 20). Er der Tale om Udjævning af Sluttavler, maa man — naar man er bleven opmærksom paa de to Metoders Forskellighed — være henvist til Benyttelsen af Metode I. Anm. ser iøvrigt i dette Forhold et Udtryk for den Forsigtighed, det er nødvendigt at anvende overfor Momentmetoden, naar der er Tale om Forhold, der ikke er let gennemsigtige, eller paa hvilke Metoden ikke tidligere er anvendt med brugbart Resultat. Naar Metoden som her praktiseres gennem Dannelsen af 1ste og 2den Sum af de observerede og de beregnede Døde, betyder det, at man f. Eks. for Forsikringsaar 10 ved livsvarige Livsforsikringer (pag. 59* i Publikationen vedrørende Dødelighedsundersøgelsen), hvor der er Erfaringer svarende til Indtrædelsesaldre fra 15 til 68 Aar, som Momentarme benytter $69 - [x] = 79 - (x + t)$, medens man f. Eks. for Forsikringsaar 40, hvor Indtrædelsesaldrene gaar fra 19 til 48 Aar, benytter $49 - [x] = 89 - (x + t)$. Summationen er tænkt foretaget fra de laveste mod de højeste Aldre. Sker Summationen fra de højeste mod de laveste Aldre, bliver Momentarmene henholdsvis $(x + t - 24)$ og $(x + t - 58)$. Naar 2den Sums Ligningerne i Metode II lægges sammen, kommer de altsaa til at virke med højst forskellige »Vægte», og Forskelligheden er tildels afhængig af rene Tilfældigheder. Naar der er Tale om et Materiale som det foreliggende, der — som ogsaa af Forf. anført — kun i ringe Grad er homogent, idet Selektionen ikke

er udtømt med de første 10 Aar, er det ikke overraskende, at de to Metoder giver saa forskellige Resultater.

Da Forf. helt igennem bygger paa givne c-Værdier og derefter kun udjævner paa α og β, saa Betingelsesligningerne er lineære, vil mindste Kvadraters Metode jo naturligt frembyde sig, ihvorvel den naturligvis overfor et saa stort Antal Udjævninger, som der i det følgende bliver Tale om (alene Side 12—13 er anført Resultaterne af 144 Udjævninger), frembyder en Del mere Ulejlighed end Momentmetoden. Forøvrigt vil man ved en Udjævning efter mindste Kvadraters Metode som ogsaa ved en mere detailleret Fejlkritik af de foreliggende Udjævninger stöde paa den Vanskelighed, at man ikke af de offentliggjorte Erfaringer kan slutte sig til Usikkerheden paa de enkelte observerede Størrelser. Ved Opstillingen af Erfaringerne er der nemlig som Tælleenhed benyttet ikke Personen, men Forsikringen (Selektionen), og uden noget Kendskab til, hvor ofte samme Person optræder med to eller flere Forsikringer, kan man altsaa ikke bestemme de paagældende Middelfejl. Naar det saaledes ikke er muligt at foretage en mere detailleret, videnskabelig Vurdering af Erfaringerne, kan man naturligvis ikke med videre Ret gøre Indsigelser mod den, der ønsker at bringe simplere og mere summariske Metoder i Anvendelse. Anm. vilde dog have foretrukket at anvende mindste Kvadraters Metode med de Tilnærmelser til de virkelige Vægte, der fremkommer, naar man betragter Observationerne som »baandfrie».

S. gaar meget grundigt til Værks, idet han først for hele Materialet foretager en Udjævning for 5-aarige Grupper af Forsikringsaar og for $\log c =$ hhv. 0.038, 0.039 og 0.041. Brugbarheden af disse Konstanter bedømmes ud fra Summen af de positive resp. negative Afvigelser mellem de observerede og de beregnede Antal Dødsfald for hver »opnaaet Alder» i Gruppen og tilsvarende Summer for de akkumulerede Afvigelser. Det viser sig da, at hver af Konstanterne giver bedst Resultat for nogle af Grupperne, ingen af dem for alle Grupper. For de første Forsikringsaars Vedkommende giver $\log c = 0.041$ det bedste Resultat.

Til at give nærmere Oplysning om Selektionsfænomenet benyttes Erfaringerne for livsvarige Livsforsikringer, der anses for at byde det mest homogene Materiale, og for disse Erfaringer foretages Udjævning for hvert Forsikringsaar for sig og for hver af de ovennævnte 3 Værdier af $\log c$. Endvidere foretages for $\log c = 0.038$ Udjævning af Erfaringerne for de enkelte Forsikringsaar, idet Erfaringer for Aldre under 30 Aar lades ude af Betragtning for at undgaa den Forstyrrelse, der kan hidrøre fra, at Makehams Formel passer mindre godt for de lave Aldre. Endelig foretages Udjævning af Erfaringerne for livsvarige Livsforsikringer samlede i 5-aarige Grupper af Forsikringsaar og med Benyttelse af $\log c = 0.038$.

Af alle disse Udjævninger synes det at fremgaa, at medens β_t kun vokser med t for de første ca. 10 Forsikringsaar, men derefter nærmest er konstant, vokser α_t stadig med t ogsaa ud over de første 10 Aar. Ved den tidligere af Prof. Fredholm foretagne Udjævning af hele Materialet kom tilsvarende Forhold frem og førte til, at han ansaa det for

nødvendigt at regne med en stadig fortsat Selektion uden Tilslutning til nogen fælles Sluttavle. Naturligvis bliver de af en saadan Udjævning resulterende Grundtavler meget omfangsrige, og en af de vigtigste Grunde til, at det af Forsikringsinspektionen overdroges S. at foretage en ny Udjævning, har derfor sikkert været Onsket om at skabe mere haandterlige Tabeller til praktisk Brug.

S. søger derfor at faa en Udjævning med en Selektionsperiode paa 10 Aar, skønt han er klar over, at der derved i videnskabelig Henseende til en vis Grad maa gøres Vold paa Erfaringerne. For at faa en fælles Værdi for log c i alle Tavler bestemmes denne paa Grundlag af hele Materialet, og da log $c = 0.038$ anses for den sandsynligste Værdi, foretages Udjævning for 0.037, 0.038 og 0.039 for Aldre fra 30 Aar og derover, idet de første 10 Aar bortskæres. De to første Værdier af log c giver meget nær ligegode Resultater og betydelig bedre end log $c = 0.039$, og da Udjævningen af Erfaringerne for de første Forsikringsaar — som nævnt ovenfor — synes at passe bedst med en noget højere c-Værdi, fastsloges log $c = 0.038$ som den endelige Værdi.

Denne Værdi synes ogsaa at give den mindste Kvadratsum efter Vægt, forsaavidt Middelfejl og Vægte kan skønnes ud fra de offentliggjorte Erfaringer, og altsaa at afgive et godt Grundlag for den videre Udjævning. Efter saaledes at have fundet en Slags Generalnævner for alle Udjævningerne, gaar Forf. over til Detailler af disse. Der foretages Udjævning under Hensyntagen saavel til Alder som til Forsikringstid af

1) Hele Materialet, Mænd, Makehams Formel anvendt for alle Aldre,
2) » » » Makehams Formel anvendt for Aldre 30 Aar og derover,
3) Livsvarige Livsforsikringer, Mænd, Makehams Formel anvendt for Aldre 30 Aar og derover,
4) Livsforsikringer med Udbetaling, Makehams Formel anvendt for Aldre 30 Aar og derover,
5) Livsvarige Livsforsikringer, Mænd, Makehams Formel anvendt for alle Aldre:

a) Selektionsperiode paa 10 Aar,
b) Selektionsperiode paa 5 Aar.

Der er ved de forskellige Udjævninger fulgt væsentlig samme Principer, idet der dog for α_t og β_t som Funktion af t er brugt Polynomier af forskellige Grader. Da den under 3) nævnte Udjævning synes at have ført til den Tavle, der kan ventes at blive anvendt af de svenske Selskaber i Fremtiden, vil vi omtale den lidt nærmere.

For Sluttavlen findes:

$\alpha = 0.0033385230$ og $\beta = 0.00013585360$, hvorefter der for de første 10 Forsikringsaar sættes:

$$\alpha_t = \alpha - \alpha' (9{,}5 - t)^3 \text{ og } \beta_t = \beta - \beta' (9{,}5 - t).$$

Konstanten 9,5 er valgt, fordi Tilslutningen til Sluttavlen da sker ved Argumentet $[x] + 9\,{}^1\!/_2$ for Dödskvoternes Vedkommende, hvilket svarer til $[x] + 10$ for μ'ernes Vedkommende.

Ved Bestemmelsen af Konstanterne α' og β' benyttedes derefter Momentmetoden med opnaaede Alder som Momentarme, og Resultatet blev:

$\alpha' = 0.0000024130 84$, $\beta' = 0.0000069747253$.

Ved foranstaaende Regninger har kun Aldre fra 30 Aar og derover været benyttede. Fortsættes Tabellen ved Anvendelse af de fundne Formler til Aldre under 30 Aar, finder S., at en Korrektion paa den udjævnede Dødelighed er nødvendig for at sikre god Tilslutning til Erfaringerne. Korrektionen paa $m_{[x]+t}$ for $x + t < 30$ findes uafhængig af t at kunne sættes =

$0.000000122889 (780\,u^2 - 97\,u^3 + 3\,u^4)$, hvor $u = 29.5 - (x + t)$. Denne Korrektion omfatter altsaa Aldre fra 29 Aar og derunder, idet den ved 29 Aar begynder med at være ringe for ved Alder 22 Aar at naa sit Maximium ca. $1\frac{1}{2}$ ‰, hvorefter den aftager, saa den ved Alder 15 Aar atter er forsvindende lille.

Naturligvis er det et Minus for Tavlen, at det har været nødvendigt at tilføje den sidstnævnte Korrektion, idet »the principle of uniform seniority« derved ikke helt bliver anvendeligt ved Beregningen af Forsikringer paa to eller flere Liv. Forf. kan imidlertid henvise dem, der ønsker en saadan Lettelse, til at gøre Brug af hans under 5) anførte Tavle, der heltigennem er udjævnet efter Makehams Formel, og hvor man endda har Valget mellem en Selektionsperiode paa 10 eller 5 Aar. I Virkeligheden er det vist ogsaa tvivlsomt, om den »Pukkel« paa Dødeligheden, der er antydet i Erfaringerne, og som Forf. ogsaa faar frem i sin under 3) nævnte principale Udjævning, kræver saa meget Hensyn, at ikke en Udjævning helt efter Makehams Formel skulde kunne betragtes som fuldgod. Første Aars udjævnede Dødelighed, hvor $m_{[15]+0} = 1.64$ ‰, $m_{[22]+0} = 3.28$ ‰, $m_{[29]+0} =$ $= 2.18$ ‰ og $m_{[36]+0} = 2.89$ ‰ viser i hvert Fald et mere udpræget Maximum først i Tyverne og Minimum sidst i Tyverne, end Tilfældet er med selve Erfaringerne, der nærmest viser konstant Dødelighed i disse Aldersaar, og mere udpræget, end man vil finde sandsynligt, efter hvad man andetsteds fra kender til Dødelighedens Forløb i disse Aar. Det er de efter det første følgende Forsikringsaar — særlig Forsikringsaarene 1—4 —, der viser en ret høj Dødelighed i Tyverne og har givet Anledning til Korrektionen paa den Makehamske Kurve. Formentlig er det her en Del Tuberkulosedødsfald, der gør sig gældende, men det er dog tvivlsomt, om disse Forhold vil gøre sig saa stærkt gældende ogsaa i Fremtiden efter den Kamp, der nu er og i længere Tid har været i Gang mod denne Sygdom, efter de forbedrede Undersøgelsesmetoder, der nu bringes i Anvendelse, og efter det Hensyn, der nu almindeligt ved Antagelsen tages ogsaa til Tuberkulose i Familien. Selv om ogsaa andre Forhold end Tuberkulosen kan have været medvirkende til Dødelighedskurvens bugtede Forløb i 20-erne, vil Anm. dog ikke nære større Betænkeligheder ved at foretage en Udligning ved at lade den Makehamske Kurve gaa helt ned til Alder 25 for Slutkurven og bestemme de første Aars Dødelighed i Forhold dertil, m. a. O. foretrække den under 5a nævnte Udjævning med de store praktiske Fordele, den byder. Forf. har forøvrigt ved under den sidstnævnte Udjævning at sætte $\alpha_t = \alpha - \alpha' (4{,}5 - t)^2$, saaledes

at α_t allerede for $t = 5$ faar samme Værdi som i Slutkurven, opnaaet at faa ret høje Dødskvoter i de unge Aldre, hvor den væsentligste Del hidrører fra Leddet α. Overfor Forf. sædvanlige Prøve ved Hjælp af Afvigelser og akkumulerede Afvigelser staar Udjævningen under 5ª da heller ikke meget tilbage for den principale Udjævning.

Stoltz Udjævning er — ligesom hvad der iøvrigt foreligger fra hans Haand — præget af hans Dygtighed og Paalidelighed. Han har været stillet overfor den Opgave inden for en begrænset Tidsfrist at skaffe et i Praksis brugbart Grundlag og vælger derfor en Metode, hvis Anvendelse fører til simple og mekaniske Regneregler. Ved Valget af Formlerne for α_t og β_t indstiller han derefter sin Metode, sit Værktøj, efter de forskellige Erfaringsrækkers Krav. Det vilde formentlig have lønnet sig at underkaste de enkelte af disse Erfaringsrækker en mere individuel Behandling, ligesom man forskellige Steder savner en mere detailleret Fejlkritik, men disse Ønsker kommer ganske vist let til at sigte ud over de Rammer, det var givet paa Forhaand for Forf. Arbejde. Overfor de af Forf. naaede praktiske Resultater føler man ingen Usikkerhed, ligesom Indtrykket af at have været under sikker Ledelse bestyrkes af den korte og koncise Form, hvori den ledsagende Tekst er givet.

Efter at de udjævnede Værdier af $m_{[x]+t}$ er bestemt, sættes disse som nævnt $= \mu_{[x]+t+\frac{1}{2}}$, hvorefter

$$\log_e l_{[x]+t} = -\int_0^t \mu_{[x]+t}\,dt + \text{Konstant}.$$

Det frembyder ingen Vanskeligheder at udføre denne Integration for de for $\mu_{[x]+t}$ iflg. ovenstaaende benyttede Funktioner, hvorved $l_{[x]+t}$ foruden af x og t bliver afhængig af Konstanter, der kan findes ud fra Konstanterne i μ. (Ved Afledningen af de nye Konstanter er pag. 64: $\psi(t)$ sat $= \psi(t - \frac{1}{2})$ i Stedet for $c^{-\frac{1}{2}} \cdot \psi(t - \frac{1}{2})$, men de endelige Konstanter synes at være bestemt ud fra den rigtige Formel.)

Der meddeles derefter udførlige Grundtavler svarende til $3\frac{1}{2}$, 4 og $4\frac{1}{2}$ % p. a. for Dødelighedstavlerne 2), 3), 4) og 5) og for 5^a endogsaa Grundtavler for 2 Liv. Det er saaledes et godt Hjælpemiddel, der gennem Stoltz Arbejde er givet de svenske Selskaber til Udarbejdelse af de nye Grundlag, de i Øjeblikket er ved at skabe. Det selekte Grundlag vil jo nok give en Del mere Ulejlighed, end man tidligere kom igennem med, men til Gengæld ogsaa skabe mere Eksakthed og Klarhed i Vurderingen af Selskabernes Passiver og Aktier, et Forhold, der — i hvert Fald af de gode Selskaber — kan hilses med Glæde.

Alt i alt læser man Stoltz Afhandling med Interesse og Udbytte og det har været Anm. en Glæde efter Opfordring at fremkomme med foranstaaende Bemærkninger derom.

L. Iversen.

Avis.

D'après convention faite avec les association des actuaires du Danémark et de Norvège, la Société des actuaires de Suède a résolu de discontinuer la publication de son journal (Svenska Aktuarieföreningens Tidskrift). Il sera remplacée par ce nouveau journal, »Skandinavisk Aktuarietidskrift«, qui fera fonction d'organe commun des trois sociétés d'actuaires du Danémark, de Suède et de Norvège.

Le nouveau journal, dont l'économie est garantie par les compagnies d'assurance sur la vie des trois pays, suivra essentiellement le même programme scientifique que son prédécesseur. La redaction a été confiée au soussigné NORDENMARK en qualité rédacteur en chef, et à trois rédacteurs représentant les pays intérresés, a savoir:

pour le Danémark: M. J. F. STEFFENSEN, Docteur ès sciences;

pour la Norvège: M. IVAR HESSELBERG, Actuaire;

pour la Suède: M. GUSTAF STOLTZ, Actuaire.

Nous comptons publier, annuellement, environ quatre livraisons de quatre feuilles.

On peut s'abonner aux bureaux de poste, ou bien chez le rédacteur en chef. Prix de souscription est de 10 couronnes par an; les livraisons détachées s'obtiennent au prix de 3 couronnes.

Stockholm, mars 1918.

N. V. E. Nordenmark.
Helsingetorget 1.

Sur le problème d'interpolation.

Quelques notes théoriques.

Par **G. H. d'Ailly.**
Docteur ès sciences.

Dernièrement quand il était mis en question d'introduire dans la pratique de la technique des assurances sur la vie des primes continues, j'ai fait l'épreuve de calculer d'une manière la plus simple qu'il était possible, des valeurs approximatives mais d'une grande précision des nombres fondamentals $N_{[x]+t} = \int_t^\infty D_{[x]+t}\, dt$.

A ce sujet je suis parti des valeurs des nombres $D_{[x]+t}$, qui sont publiés par l'actuaire G. Stoltz dans *Utjämning av sjutton svenska livförsäkringsbolags dödlighetstabeller.*

Les expressions analytiques qui sont appliquées dans cet œuvre pour représenter les nombres $D_{[x]+t}$, ne s'accommodent pas à l'integration directe. Donc il était mon intention de calculer les integrales en appliquant la formule d'interpolation de Lagrange et d'une methode de Gauss.

Aussi j'ai fait l'épreuve d'appliquer les fonctions sphériques ou un autre système orthogonal commode.

Quelques circonstances en ces travaux portaient mon attention sur le problème d'interpolation en général et je me mis à étudier quelques questions qui sont liées à ce problème.

Comme on sait, dans l'œuvre susdit les coefficients centraux de mortalité ou les coefficients instantanés de mortalité sont représentés par des expressions analytiques qui ne sont

pas identiques dans tout l'intervalle considéré. Cela n'est pas bien au point de vue des mathématiques pures mais dans un travail d'un but premièrement pratique on n'a guère pu éviter cette inopportunité sans une trop grande complication des formules.

Cependant ces circonstances m'ont fait m'adresser la question suivante: Quand on essaye de représenter par des expressions analytiques une fonction qui est donnée par des valeurs empiriques, y a-t-il peut-être une nécessité non seulement pratique mais aussi théorique d'appliquer des expressions différentes dans des parties différentes de l'intervalle considéré?

Il est possible qu'une fonction qui est donnée empirique dans un intervalle n'y représente pas la même fonction analytique ou que les expressions par lesquelles on représente la fonction dans certaines parties de l'intervalle sont les commencements de séries qui ne convergent pas dans tout l'intervalle considéré et qui doivent par conséquent être échangées contre les commencements de séries qui sont convergentes dans ces autres parties de l'intervalle.

Quoique possible je ne veux point dire qu'un tel fait soit ici l'occasion qu'on doit représenter les coefficients centraux de mortalité par des expressions différentes, mais je propose cet raisonnement seulement parce qu'il était la cause de la recherche présente.

En cherchant des expressions convenables à représenter pour l'usage pratique une fonction donnée, ces points de vue théoriques sont souvent et avec raison repoussés en faveur de l'utilité pratique, mais comme celle-ci dépend en dernier lieu d'hypothèses theoriques, de plus ou moins distinctement énoncées, j'ai cru qu'il aurait de l'intérêt de les prendre bien en considération. Comme je l'ai formulé généralement, le problème est donc d'étudier les propriétés analytiques de fonctions qui sont données dans un intervalle par ses valeurs numériques.

Les fonctions, qu'il est convenable d'étudier premièrement sont les fonctions continues, plus tard des fonctions avec des points de discontinuité d'un nombre fini et des fonctions qu'on peut représenter par des séries trigonométriques. Ce-

pendant dans cette recherche je ne veux qu'étudier des fonctions continues qui sont les plus importantes dans la pratique.

La forme de la recherche que j'ai préférée par plusieurs raisons a été d'approximer les fonctions données par des polynômes et cette approximation peut être faite directement ou comme une correction d'une autre forme qui ne donne pas une assez bonne adhérence aux valeurs données. La représentation de polynôme ou de séries de polynômes est d'une si grande généralité qu'on peut approximer une fonction continue arbitraire aussi exactement qu'on veut par un polynôme ou une série de polynômes qui est uniformement convergente dans un certian intervalle, et on peut même poser *une* seule série de polynômes avec la propriété remarquable que cette seule série *posée d'avance* peut représenter *tous* les fonctions continues pourvu qu'on coupe cette série sur des places convenables c'est-à-dire qu'on forme des sommes partielles convenables, différentes pour chaque fonction donnée. La seule condition qu'on doit imposer à la fonction continue donnée est qu'elle est $= 0$ pour $x = 0$.

Ainsi soit

$$\mathfrak{P}(x) \sim a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

cette série *posée d'avance* où le signe $\sim$ marque que l'égalité n'est que formelle, c'est-à-dire sans égard à la convergence de la série, et soit

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x^\nu = S_n(x)$$

la n:ième somme partielle, je peux toujours trouver une suite de nombres $n_1, n_2, n_3, \ldots$ telle que

$$f(x) = \lim_{\nu=\infty} S_{n_\nu}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(S_{n_{\nu+1}}(x) - S_{n_\nu}(x)\right)$$

où $f(x)$ est une fonction continue arbitraire, $f(o) = 0$ et $S_{n_0}(x) = S_0(x) = 0$.

Cependant je ne veux pas entrer de plus près dans cela mais j'ai présenté cette circonstance comme une raison que j'ai consideré la représentation par des polynômes comme assez générale et souple pour y baser ma recherche.

Toutefois pour ne pas perdre de vue le point de départ pratique j'ai choisi entre les polynômes divers d'approximation ceux qui résultent de l'interpolation ordinaire d'une fonction donnée par des valeurs isolées, et entre les formules d'interpolation j'ai preferé celle de LAGRANGE.

Soit donc $f(x)$ la fonction d'interpoler, je choisis une suite x_0, x_1, x_2, ... x_n entre les valeurs de la variable pour lesquelles la fonction $f(x)$ est donnée, et présente un polynôme $P_n(x)$ qui coïncide avec $f(x)$ dans les points choisis, ainsi

$$P_n(x) =$$
$$= \sum_{\nu=0}^{n} y_\nu \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{\nu-1})(x-x_{\nu+1})\dots(x-x_n)}{(x_\nu-x_0)(x_\nu-x_1)\dots(x_\nu-x_{\nu-1})(x_\nu-x_{\nu+1})\dots(x_\nu-x_n)}$$

où

$$y_\nu = f(x_\nu) \qquad (\nu = 0, 1, \dots n)$$

Cependant je veux restreindre la généralité de la fonction $f(x)$ et le polynôme qui l'approxime mais ces restrictions ne sont faites que pour les aises et ne diminuent pas la généralité du problème.

Soit donc $a \dots b$ l'intervalle dans lequel je considère $f(x)$ je le modifie à l'intervalle $-1 \cdots +1$ par la transformation linéaire $x' = 2 \cdot \frac{x-a}{b-a} - 1$.

D'ailleurs je choisis les valeurs de coïncidence dans les points qu'on obtient en partageant les deux portions $-1 \dots 0$ et $0 \cdots +1$ en n parties égales. Donc les points de coïncidence sont les $2n+1$ points de division qui sont déterminés par la relation

$$x_\nu = \frac{\nu}{n} = \nu \cdot h \quad \text{où} \quad h = \frac{1}{n}.$$

$$(\nu = -n, \dots + n).$$

Donc nous obtenons

$$(1)\quad \begin{cases} P_n(x) = \\ = \sum_{\nu=-n}^{+n} y_\nu \cdot \dfrac{(x+nh)(x+\overline{n-1}\,h)\ldots(x+h).x.(x-h)\ldots}{(\nu h+nh)(\nu h+\overline{n-1}\,h)\ldots(\nu h+h).\nu h.(\nu h-h)\ldots} \\ \quad \dfrac{\ldots(x-\overline{\nu-1}\,h)(x-\overline{\nu+1}\,h)\ldots(x-nh)}{\ldots(\nu h-\overline{\nu-1}\,h)(\nu h-\overline{\nu+1}\,h)\ldots(\nu h-nh)} = \\ = \sum_{\nu=-n}^{+n} \pm y_\nu \dfrac{x(x^2-h^2)(x^2-4h^2)\ldots(x^2-n^2h^2)}{(x-\nu h)h^{2n}\underline{|n+\nu}\,.\,\underline{|n-\nu}} = \\ = \sum_{\nu=-n}^{+n} \pm y_\nu \cdot \dfrac{x(x^2-h^2)(x^2-4h^2)\ldots(x^2-n^2h^2)}{(x^2-\nu^2h^2)h^{2n}\underline{|n+\nu}\,.\,\underline{|n-\nu}}(x+\nu h). \end{cases}$$

Je continue cette interpolation avec des valeurs grandissantes pour obtenir une approximation par les polynômes qui soit de mieux en mieux.

Mais une fonction peut être approximée par des polynômes de plusieurs manières, donc je veux considérer l'ensemble des polynômes qui approximent la fonction, et en particulier étudier ceux qui la représentent avec une précision proposée d'avance.

Soit donc $P(x)$ un polynôme d'un certain degré et qui approxime la fonction donnée avec la précision ε c'est-à-dire

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

et posons

$$f(x) - P(x) = \varphi(x) \qquad \because \ |\varphi(x)| < \varepsilon.$$

En interpolant directement d'une manière dite ci-dessus la fonction $f(x)$ par le polynôme $P'(x)$ et puis interpolant la fonction $\varphi(x)$ par le polynôme $P''(x)$, les deux polynômes $P'(x)$ et $P''(x)$ étant du même degré, nous obtenons en vertu de l'uniformité de la détermination

$$P'(x) = P(x) + P''(x)$$

et le polynôme $P''(x)$ a le caractère d'une expression de correction dont on obtient la coïncidence dans les points sur lesquels s'appuie l'interpolation.

Donc je puis appliquer directement la formule d'interpolation à la fonction de correction $\varphi(x)$.

La courbe qui représente la fonction $\varphi(x)$ est située dans une bande étroite de la largeur 2ε comme fait voir la figure 1.

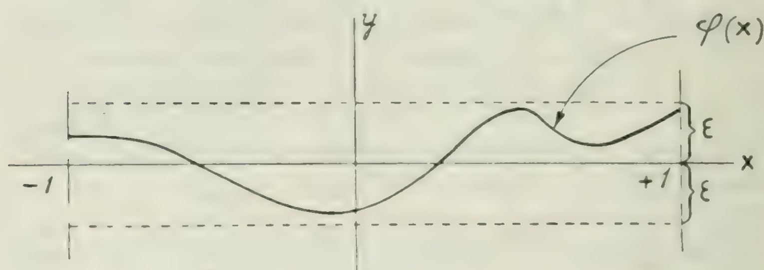


Fig. 1.

Soit donc le polynôme $P_n(x)$ (1) le résultat de l'interpolation appliquée à la fonction $\varphi(x)$, le premier but est d'étudier l'ordre de grandeur des coefficents.

Étudions premièrement un seul terme dans la somme (1) et posons-le ainsi

$$Q_n(x) =$$
$$= \frac{y_\nu}{h^{2n}\,\underline{|n+\nu}\,\underline{|n-\nu}} \cdot \frac{x(x^2-h^2)(x^2-4h^2)\ldots(x^2-n^2h^2)}{x^2-\nu^2h^2}(x+\nu h).$$

Posons de plus

$$\frac{x(x^2-h^2)(x^2-4h^2)\ldots(x^2-n^2h^2)}{x^2-\nu^2h^2}(x+\nu h) = \sum_0^{2n} \pm c_\lambda x^\lambda$$

où tous les coefficients c_λ sont positifs et en conséquence de cela leurs signes doivent être choisis convenablement.

D'ailleurs posons

$$\frac{x(x^2+h^2)(x^2+4h^2)\ldots(x^2+n^2h^2)}{x^2+\nu^2h^2}(x+\nu h) = \sum_0^{2n} \bar{c}_\lambda x^\lambda$$

$$(\because\ \bar{c}_\lambda > c_\lambda)$$

et

$$\frac{x(x^2+h^2)(x^2+4h^2)\dots(x^2+n^2h^2)}{x^2+\nu^2h^2}=\sum_0^{2n-1} b_\lambda x_\lambda$$

où donc

$$b_\lambda \begin{cases} = 0 & \text{pour } \lambda \text{ pair} \\ \neq 0 & \text{» } \lambda \text{ impair} \end{cases}$$

et

$$x(x^2+h^2)(x^2+4h^2)\dots(x^2+n^2h^2)=\sum_0^{2n+1} a_\lambda x^\lambda$$

où donc

$$a_\lambda \begin{cases} = 0 & \text{pour } \lambda \text{ pair} \\ \neq 0 & \text{» } \lambda \text{ impair.} \end{cases}$$

Donc nous obtenons

$$(x^2+\nu^2h^2)\sum_0^{2n-1} b_\lambda x^\lambda = \sum_0^{2n+1} a_\lambda x^\lambda$$

et

$$b_{\mu-2}+\nu^2h^2\,b_\mu = a_\mu$$

donc

$$b_{\mu-2} \leqq a_\mu .$$

D'ailleurs

$$(x+\nu h)\sum_0^{2n-1} b_\lambda x^\lambda = \sum_0^{2n} \bar{c}_\lambda x^\lambda$$

d'où

$$b_{\mu-1}+\nu h\,b_\mu = \bar{c}_\mu$$

mais

$$\nu h \leqq n h = 1$$

donc

$$b_{\mu-1}+b_\mu \geqq \bar{c}_\mu > c_\mu .$$

Posons $\mu = 2m$, donc

$$b_{2m-1} + b_{2m} > c_{2m}$$

et $\mu = 2m - 1$, donc

$$b_{2m-2} + b_{2m-1} > c_{2m-1}.$$

Mais comme $b_{2m} = 0$ et $b_{2m-2} = 0$, ces deux relations se changent en

$$\left.\begin{matrix} c_{2m-1} \\ c_{2m} \end{matrix}\right\} < b_{2m-1} < a_{2m+1}.$$

L'évaluation des coefficients c peut être faite par l'évaluation des coefficients a du polynôme

$$\sum_0^{2n+1} a_\lambda x^\lambda = x(x^2 + h^2)(x^2 + 4h^2)\ldots(x^2 + n^2h^2) =$$

$$= h^{2n+1}(\underline{|n})^2 \cdot \frac{x}{h} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{h^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{4h^2}\right)\ldots\left(1 + \frac{x^2}{n^2h^2}\right).$$

Mais les coefficients de ce polynôme sont plus petits que les coefficients de la serie qui représente la fonction

$$h^{2n+1}(\underline{|n})^2 \cdot \frac{x}{h} \prod_{\lambda=1}^{\infty}\left(1 + \frac{x^2}{\lambda^2 h^2}\right)$$

et qui converge pour toute valeur de la variable.

Mais

$$\frac{x}{h} \cdot \prod_{\lambda=1}^{\infty}\left(1 + \frac{x^2}{\lambda^2 h^2}\right) = \frac{1}{\pi}\sin\text{hyp}\frac{\pi x}{h} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{1}{\underline{|2\lambda+1}}\left(\frac{\pi}{h}\right)^{2\lambda+1} \cdot x^{2\lambda+1}$$

et nous obtenons donc finalement

$$a_\mu < h^{2n+1}(n!)^2 \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{h}\right)^\mu \cdot \frac{1}{\mu!} \qquad (\mu \text{ impair}).$$

De cela et des relations ci-dessus nous avons obtenu comme une évaluation des coefficients du polynôme $Q_n(x) = \sum_{\lambda=0}^{2n} \pm C_\lambda x^\lambda$

$$\left.\begin{matrix} C_{\mu-1} \\ C_{\mu-2} \end{matrix}\right\} < \frac{y_\nu}{h^{2n}\,(n+\nu)!\,(n-\nu)!} \cdot h^{2n+1}(n!)^2 \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{h}\right)^\mu \cdot \frac{1}{\mu!} =$$

$$= \frac{y_\nu (n!)^2}{(n+\nu)!\,(n-\nu)!} \cdot \frac{h}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{h}\right)^\mu \cdot \frac{1}{\mu!}$$

ou comme $h = \frac{1}{n}$

(2) $$\left.\begin{matrix} C_{\mu-1} \\ C_{\mu-2} \end{matrix}\right\} < \frac{y_\nu (n!)^2}{(n+\nu)!\,(n-\nu)!} \cdot \frac{1}{n} \cdot \pi^{\mu-1} \cdot \frac{n^\mu}{\mu!}.$$

Pour avoir une évaluation des coefficients du polynôme $P_n(x)$ nous sommons en ν en observant que

$$|y_\nu| < \varepsilon$$

donc

$$\left.\begin{matrix} p_{\mu-1} \\ p_{\mu-2} \end{matrix}\right\} < \sum_{\nu=-n}^{+n} \frac{\varepsilon (n!)^2}{(n+\nu)!\,(n-\nu)!} \cdot \frac{1}{n} \cdot \pi^{\mu-1} \cdot \frac{n^\mu}{\mu!} =$$

$$= \varepsilon (n!)^2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \pi^{\mu-1} \cdot \frac{n^\mu}{\mu!} \cdot \sum_{\nu=-n}^{+n} \frac{1}{(n+\nu)!\,(n-\nu)!}$$

où nous avons posé

$$P_n(x) = \sum_{\lambda=0}^{2n} p_\lambda x^\lambda.$$

Mais

$$\sum_{\nu=-n}^{+n} \frac{1}{\lfloor n+\nu \ \lfloor n-\nu} = \frac{1}{\lfloor 2n} \cdot \sum_{\nu=-n}^{+n} \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n+\nu \ \lfloor n-\nu} =$$

$$= \frac{1}{\lfloor 2n} \sum_{\nu=0}^{2n} \binom{2n}{\nu} = \frac{1}{\lfloor 2n} (1+1)^{2n} = \frac{1}{\lfloor 2n} \cdot 2^{2n}$$

donc

$$\left|\frac{p_{u-1}}{p_{u-2}}\right| < \frac{(\lfloor n)^2 \cdot 2^{2n}}{\lfloor 2n} \cdot \varepsilon \cdot \frac{1}{n} \cdot \pi^{u-1} \cdot \frac{n^u}{\lfloor u} .$$

En évaluant par la formule de Stirling : $\lfloor n = \sqrt{2\pi n} \ n^n e^{-n}$ nous obtenons

$$\left|\frac{p_{u-1}}{p_{u-2}}\right| < \frac{2\pi n \cdot n^{2n} e^{-2n} \ 2^{2n}}{\sqrt{4\pi n} \ (2n)^{2n} \ e^{-2n}} \cdot \varepsilon \cdot \frac{1}{n} \cdot \pi^{u-1} \frac{n^u}{\lfloor u} =$$

$$= \varepsilon \cdot \pi^{u-\frac{1}{2}} \cdot n^{u-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\lfloor u} .$$

Donc si nous avons une suite de polynômes $P'_n(x)$ de degré $2n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ qui approximent la fonction donnée avec une précision de la grandeur ε_n dont la diminution est d'une telle force que la série

$$\sum_{(n)} \varepsilon_n \cdot n^{u-\frac{1}{2}}$$

converge, les coefficients de la suite de polynômes obtenus par l'interpolation s'approchent de plus en plus des coefficients de cette nouvelle suite, c'est-à-dire si

$$P'_n(x) = \sum p'_u \, x^u$$

et

$$P_n(x) = \sum p_u \, x^u$$

sont ces deux suites de polynômes nous obtenons

$$\lim_{n=\infty} (p_\mu - p'_\mu) = 0.$$

Quand la fonction $f(x)$ est analytique dans le cercle $|x| \leq 1 + \eta$ (η arbitrairement petit) il y a au moins une suite de polynômes qui approximent la fonction avec cette ordre de précision: les sommes partielles de la serie de Taylor qui représente la fonction.

Ce resultat préliminaire n'est pas trop important, mais je l'ai voulu présenter car elle met à l'approximation une condition qui est plus faible que la fonction ne soit analytique et à cela elle surpasse les résultats qui sont déjà énoncés.

Maintenant je vais étudier le problème avec des hypothèses un peu modifiées sur le degré d'approximation, mais avec la même méthode du travail. En analogie avec les sommes partielles des séries de puissances je propose que les polynômes représentent la fonction avec une précision dont la force de diminution est la même que du terme complémentaire d'une série de Taylor c'est-à-dire la puissance de x qui suit immédiatement après la plus grande puissance de $P_n(x)$, savoir x^{2n+1}.

Comme la fonction de correction $\varphi(x)$ diminue encore en les limites de l'intervalle consideré j'ajoute un facteur $G \cdot k^{2n+1}$ où $k < 1$.

Posons que la fonction $\varphi(x)$ que nous allons interpoler satisfait à la condition

$$|\varphi(x)| < G \cdot k^{2n+1} \cdot |x|^{2n+1}$$

où

(3) $$|y_\nu| < G \cdot k^{2n+1} \left(\frac{|\nu|}{n}\right)^{2n+1}.$$

Cette condition est toujours satisfaite quand la fonction est analytique dans un cercle $|x| \leq R$ où $R > 1$, mais *il ne faut pas faire dans cette démonstration cette hypothèse.*

En analogie avec la démonstration ci-dessus nous obtenons après la sommation de (2)

$$\left.\begin{matrix} p_{\mu-1} \\ p_{\mu-2} \end{matrix}\right\} < \frac{1}{n} \cdot \pi^{\mu-1} \frac{n^{\mu}}{\underline{\vert \mu}} \cdot \sum_{\nu=-n}^{+n} \frac{y_{\nu} (\underline{\vert n})^2}{\underline{\vert n+\nu}\ \underline{\vert n-\nu}} .$$

Nous évaluons la somme en observant (3) et obtenons

$$(4) \quad \left.\begin{matrix} p_{\mu-1} \\ p_{\mu-2} \end{matrix}\right\} < \frac{1}{n} \pi^{\mu-1} \frac{n^{\mu}}{\underline{\vert \mu}} \cdot G \, . \, k^{2n+1} \, . \sum_{\nu=-n}^{+n} \left(\frac{|\nu|}{n}\right)^{2n+1} \frac{(\underline{\vert n})^2}{\underline{\vert n+\nu}\ \underline{\vert n-\nu}} =$$

$$= G \, . \, k^{2n+1} \, . \, \frac{1}{n} \cdot \pi^{\mu-1} \, . \, \frac{n^{\mu}}{\underline{\vert \mu}} \cdot 2 \sum_{\nu=0}^{n} \left(\frac{\nu}{n}\right)^{2n+1} \frac{(\underline{\vert n})^2}{\underline{\vert n+\nu}\ \underline{\vert n-\nu}} .$$

Pour évaluer la somme

$$\sum_{\nu=0}^{n} \left(\frac{\nu}{n}\right)^{2n+1} \cdot \frac{(\underline{\vert n})^2}{\underline{\vert n+\nu}\ \underline{\vert n-\nu}}$$

nous cherchons une évaluation de $\frac{(\underline{\vert n})^2}{\underline{\vert n+\nu}\ \underline{\vert n-\nu}}$.

D'après la formule de Stirling nous posons

$$\frac{(\underline{\vert n})^2}{\underline{\vert n+\nu}\ \underline{\vert n-\nu}} \sim$$

$$\frac{2\pi n \, . \, n^{2n} \, . \, e^{-2n}}{\sqrt{2\pi(n+\nu)} \, . \, (n+\nu)^{n+\nu} e^{-n-\nu} \, . \, \sqrt{2\pi(n-\nu)} \, . \, (n-\nu)^{n-\nu} e^{-n+\nu}} =$$

$$= \frac{n}{\sqrt{n^2-\nu^2}} \cdot \frac{n^{2n}}{(n+\nu)^{n+\nu}(n-\nu)^{n-\nu}} .$$

Comme nous n'avons jamais $\underline{\vert n-\nu} = 0$ nous pouvons dans cette évaluation exclure la racine et posons donc

$$\frac{(\underline{\vert n})^2}{\underline{\vert n+\nu}\ \underline{\vert n-\nu}} < C \, . \, n \cdot \frac{n^{2n}}{(n+\nu)^{n+\nu}(n-\nu)^{n-\nu}} .$$

Puis posons $\nu = k \, . \, n$ $(0 \leq k \leq 1)$, donc

$$\frac{(\underline{|n})^2}{\underline{|n+\nu}\;\underline{|n-\nu}} < C \, . \, n \cdot \frac{n^{2n}}{n^{n+\nu}(1+k)^{n(1+k)}\, n^{n-\nu}(1-k)^{n(1-k)}} =$$

$$= C \, . \, n \cdot \frac{1}{(1-k^2)^n} \cdot \frac{(1-k)^{nk}}{(1+k)^{nk}} = C \, . \, n \, . \, e^{-k^2 n \alpha}$$

où le nombre α est défini par l'équation ci-dessus.

Nous obtenons

$$-k^2 n\alpha = -n \log(1-k^2) + nk \log(1-k) - nk \log(1+k)$$

ou

$$\alpha = \frac{1}{k^2}\log(1-k^2) - \frac{1}{k}\log(1-k) + \frac{1}{k}\log(1+k).$$

En développant en série suivante des puissances de k nous obtenons la série

$$\alpha = 1 + 2\left(\frac{k^2}{3\,.\,4} + \frac{k^4}{5\,.\,6} + \frac{k^6}{7\,.\,8} + \cdots\right)$$

qui converge pour $k \leq 1$.

Ce développement met en évidence que $\alpha \geq 1$.

Donc

$$\frac{(\underline{|n})^2}{\underline{|n+\nu}\;\underline{|n-\nu}} < C \, . \, n \, . \, e^{-k^2 n} = C \, . \, n \, . \, e^{-\frac{\nu^2}{n}}$$

pour tous ν et n.

Je choisis maintenant $\beta = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et pose $\nu \, . \, \beta = x_\nu$, donc $\nu = \dfrac{x_\nu}{\beta} = x_\nu \, . \, \sqrt{n}$.

Donc

$$\frac{(\underline{|n})^2}{\underline{|n+\nu}\;\underline{|n-\nu}} < C \, . \, n \, . \, e^{-x_\nu^2}.$$

Cependant je veux évaluer

$$\Sigma = \sum_{\nu=0}^{n} \left(\frac{\nu}{n}\right)^{2n+1} \cdot \frac{(\underline{|n})^2}{\underline{|n+\nu}\;\underline{|n-\nu}} = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\nu}{n}\right)^{2n+1} \cdot \frac{(\underline{|n})^2}{\underline{|n+\nu}\;\underline{|n-\nu}} <$$

$$< \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{x_\nu}{n\beta}\right)^{2n+1} C \,.\, n \,.\, e^{-x_\nu^2} = \left(\frac{1}{n\beta}\right)^{2n+1} . \, C \,.\, n \cdot \frac{1}{\beta} \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^{2n+1} e^{-x_\nu^2} . \, \beta =$$

$$= \frac{C}{n^{n-1}} \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^{2n+1} e^{-x_\nu^2} . \, \beta < \frac{C}{n^{n-1}} \int_0^{n\beta} (x+\beta)^{2n+1} e^{-x^2} dx .$$

Posons $x + \beta = y$, donc

$$\Sigma < \frac{C}{n^{n-1}} \int_\beta^{(n+1)\beta} y^{2n+1} e^{-(y-\beta)^2} dy =$$

$$= \frac{C}{n^{n-1}} \int_\beta^{(n+1)\beta} y^{2n+1} e^{-y^2-\beta^2+2y\beta} dy <$$

$$< \frac{C \,.\, e^{2(n+1)\beta^2-\beta^2}}{n^{n-1}} \cdot \int_0^\infty y^{2n+1} e^{-y^2} dy =$$

$$= \frac{C \,.\, e^{\frac{2n+1}{n}}}{n^{n-1}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty y^{2n} e^{-y^2} d(y^2) <$$

$$(y^2 = z)$$

$$< \frac{C}{n^{n-1}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty z^n e^{-z} dz = \frac{C}{n^{n-1}} \frac{1}{2} \Gamma(n+1)$$

ou comme $\Gamma(n+1) = \underline{|n}$ nous obtenons

$$\Sigma < \frac{C}{n^{n-1}} \frac{1}{2} \underline{|n} .$$

D'après (4) nous obtenons donc

$$\left.\begin{matrix} p_{\mu-1} \\ p_{\mu-2} \end{matrix}\right\} < G \, . \, k^{2n+1} \, . \, \frac{1}{n} \, . \, \pi^{\mu-1} \, . \, \frac{n^\mu}{\lfloor\mu} \, . \, \frac{\bar{C}}{n^{n-1}} \lfloor n = H \, . \, k^{2n+1} \, \pi^\mu \, . \, \frac{n^\mu}{\lfloor\mu} \, . \, \frac{\lfloor n}{n^n} \, .$$

En considérant seulement le facteur

$$\frac{n^\mu}{\lfloor\mu} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{3} \cdots \frac{n}{\mu}$$

nous trouvons qu'il a sa valeur plus grande pour $\mu = n$, donc

$$\frac{n^\mu}{\lfloor\mu} \leq \frac{n^n}{\lfloor n}$$

et puis

$$\left.\begin{matrix} p_{\mu-1} \\ p_{\mu-2} \end{matrix}\right\} < H \, k^{2n+1} \, \pi^\mu \, . \, \frac{n^n}{\lfloor n} \, . \, \frac{\lfloor n}{n^n} = H \, k^{2n+1} \, \pi^\mu .$$

En modifiant le nombre H nous pouvons séparer les deux inégalités qui sont unies dans la formule précédente et obtenons

(5) $$p_\mu < H \, k^{2n+1} \, \pi^\mu .$$

Une série $\Sigma \beta_\mu x^\mu$ dont les coefficients ne surpassent pas cette limite supérieure des nombres p_μ est ainsi toujours convergente pour $|x| < \frac{1}{\pi}$ et cette convergence ne dépend pas de n.

De la relation (5) nous déduisons

$$\lim_{n=\infty} p_\mu = 0$$

c'est-à-dire si la différence de la fonction et le polynôme $P'_n(x)$ par lequel nous cherchons le représenter diminue comme $G \, k^{2n+1} \, x^{2n+1}$, les coefficients du polynôme qu'on obtient par l'interpolation de la fonction de correction diminuent aussi vers zéro quand n tend vers l'infini.

Cette chose nous pouvons exprimer ainsi:
Soit

$$P'_n(x) \quad \text{et} \quad P''_n(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

deux suites de polynômes qui approximent la fonction donnée avec une précision dite ci-dessus. Donc les coefficients correspondants tendent infiniment l'un vers l'autre quand n tend vers l'infini. Aussi les coefficients des polynômes dans la suite qu'on obtient par d'interpolation successive de la fonction donnée tendent infiniment vers les coefficients des polynômes $P'_n(x)$ et $P''_n(x)$.

Quand la fonction $f(x)$ est analytique il y a du moins une telle suite, c'est-à-dire les sommes partielles de la série de Taylor de la fonction, car le terme complémentaire $R(x)$ du degré $2n+1$ diminue comme $G k^{2n+1} . x^{2n+1}$ où ce terme est défini par la relation

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{2n} a_\nu x^\nu + R(x).$$

Les polynômes qu'on obtient par l'interpolation de la fonction $f(x)$ suivant les principes exprimés ci-dessus ont ainsi la propriété que ses coefficients tendent vers les coefficients correspondants du développement en série de la fonction quand n tend vers l'infini.

En partant d'avance d'une fonction analytique on peut par l'integrale de Cauchy obtenir ces résultats plus simplement mais comme j'ai désiré que ma recherche soit *totalement indépendante de la connaissance des propriétés analytiques de la fonction* j'ai préféré une voie qui *ne s'appuie que sur la connaissance des valeurs de la fonction dans l'intervalle considéré.*

Les résultats ici obtenus peuvent être *retournés* sous certains rapports. J'ai démontré ci-dessus que le resultat d'interpolation peut avoir pour forme-limite la série de Taylor qui représente la fonction.

Maintenant je veux retourner le problème ainsi: Soit donnée une fonction à laquelle j'applique la formule d'interpolation de LAGRANGE avec un degré grandissant des polynômes obtenus.

Posons

$$P_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu^{(n)} x^\nu \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

où $P_n(x)$ représente la suite des polynômes obtenus et soit

$$\lim_{n=\infty} a_\mu^{(n)} = a_\mu$$

et puis

$$(6) \qquad \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu x^\mu$$

une série avec le rayon de convergence r_1.

Puis nous déterminons une suite de nombres positifs

$$M_1, M_2, \ldots M_\nu, \ldots$$

tels que

$$M_\nu > |a_\nu^{(n)}| \qquad (n = 1, 2, \ldots \infty)$$

et posons la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} M_\nu x^\nu.$$

Soit r_2 le rayon de convergence de cette série.

Soit ϱ un nombre plus petit que r_1 et r_2. Nous montrerons que la fonction $f(x)$ est analytique dans l'intervalle $|x| \leq \varrho$ et peut être représentée dans cet intervalle par la série (6) donc

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu \qquad (|x| \leq \varrho).$$

La suite des polynômes obtenus par l'interpolation soit

$$P_n(x) = a_0^{(n)} + a_1^{(n)} x + a_2^{(n)} x^2 + \cdots + a_{n-1}^{(n)} x^{n-1}$$
$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Donc

$$P_n(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu^{(n)} x^\nu - \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-1} (a_\nu^{(n)} - a_\nu) x^\nu - \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu x^\nu =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m-1} (a_\nu^{(n)} - a_\nu) x^\nu + \sum_{\nu=m}^{n-1} (a_\nu^{(n)} - a_\nu) x^\nu - \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu x^\nu.$$

Prenons m si grand que

$$\left| \sum_{\nu=m}^{n-1} (a_\nu^{(n)} - a_\nu) x^\nu \right| < \sum_{\nu=m}^{\infty} (M_\nu + |a_\nu|) \varrho^\nu < \frac{\varepsilon}{3}$$

(ε arbitrairement petit).

Puis prenons n assez grand que nous obtenons simultanément

$$\left| \sum_{\nu=0}^{m-1} (a_\nu^{(n)} - a_\nu) \varrho^\nu \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{car} \quad \lim a_\nu^{n} = a_\nu$$

et

$$\left| \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu \varrho^\nu \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{car } \Sigma a_\nu x^\nu \text{ est convergente pour } |x| \leq \varrho.$$

Donc nous obtenons comme résultat total

$$\left| P_n(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu \right| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad |x| < \begin{cases} \varrho \\ 1 \end{cases}.$$

Mais nous pouvons trouver des valeurs n si grandes qu'un nombre commensurable arbitraire $x = \frac{p}{q}$ satisfait à la relation

$$f(x) = P_n(x)$$

et donc

$$\left| f(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu \right| < \varepsilon .$$

Mais cette relation est indépendante de n et nous pouvons prendre ε arbitrairement petit, donc nous obtenons pour des valeurs commensurables arbitraires

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu .$$

Cependant $f(x)$ est une fonction continue et les nombres commensurables forment un ensemble partout dense, donc cette relation est satisfaite pour toutes les valeurs de x où $|x| \leqq \varrho$.

La fonction $f(x)$ est donc représentée dans cet intervalle par la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$$

et donc elle y est analytique.

Cette démonstration ne donne aucune des propriétés de la fonction en dehors de l'intervalle $|x| \leqq \varrho$; quand $\varrho \geqq 1$ la fonction empirique est analytique dans tout l'intervalle considéré $|x| \leqq 1$ et nous obtenons facilement la précision de l'évaluation du raisonnement ci-dessus. Si le nombre ϱ est plus petit qu'un, plusieurs cas peuvent se présenter: $f(x)$ peut être analytique dans tout l'intervalle $-1 \cdots +1$, ou peut avoir un point singulier pour $x = \pm \varrho$ ou pour $x = \varrho e^{i\Theta}$ ou finalement $f(x)$ peut être composée de plusieurs »functiones continuæ».

Il ne faut pas qu'un point singulier dans l'intervalle restreint la régularité de la suite des valeurs dans cet intervalle, chose que montre l'exemple $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, car cette fonction est singulière pour $x = 0$ et existe comme valeur limite ainsi que toutes ses derivées quand x tend vers un point le long de l'axe réel, mais quand x tend vers zéro avec des valeurs de la forme $r \, . \, e^{i\theta}$ où

$$\frac{\pi}{4} + \varepsilon < \Theta < \frac{3\pi}{4} - \varepsilon$$

ou

$$-\frac{3\pi}{4} + \varepsilon < \Theta < -\frac{\pi}{4} - \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0)$$

$f(x)$ surpasse toute limite.

Je ne veux pas affirmer que cette recherche peut être appliquée immédiatement en pratique mais je ne veux que démontrer qu'on peut trouver quelques propriétés analytiques d'une fonction donnée seulement par ses valeurs et qu'on peut faire dans certains cas cette recherche en appliquant seulement la formule simple de LAGRANGE et en trouver une limite supérieure de la précision d'approximation sans faire des réflexions si profondes que par exemple le problème de TCHEBYCHEFF.

Eine graphische Darstellung der Leibrente, der einmaligen Prämie, der Jahresprämie und der Prämienreserve.

Von Aktuar **N. Solberg**, Kristiania.

Um eine graphische Darstellung einer gegebenen, eindeutigen Funktion $f(\alpha)$ zu erhalten. denken wir uns die den Werten $\alpha', \alpha'', \ldots \alpha^{(n)}$ der unabhängigen Veränderlichen entsprechenden Grössen $x = l \,.\, f(\alpha)$ als Abszissen auf eine Gerade von demselben Ausgangspunkt abgetragen und bezeichnen dann die Endpunkte der Abszissen mit dem zugehörigen Wert von α. Über die Konstante l, den *Modul*, können wir frei verfügen und hierdurch einen passenden Massstab erhalten.

Ein solches graphisches Bild einer Funktion einer Veränderlichen nennt man eine *Funktionsskala* (échelle de la fonction).

Wir benutzen im folgenden ein besonderes System paralleler Linienkoordinaten, dessen praktische Anwendung von MAURICE D'OCAGNE[1] eingehend behandelt worden ist. In den Endpunkten eines geraden Linienstückes $AB = s$ (Fig. 1) werden Senkrechte, AU und BV, die Achsen, errichtet. Jede Achse wird mit positiver Richtung und Massstab versehen. Unter den Koordinaten, u und v, einer Geraden, λ, wollen wir die algebraischen Stücke, AU_1 und BV_1, die die Gerade der Achsen abschneiden, verstehen.

Die Werte von u und v, die eine lineare Gleichung

$$au + bv + c = 0 \qquad (1)$$

befriedigen, sind Koordinaten einer Geraden durch einen

[1] MAURICE D'OCAGNE: »Traité de Nomographie», Paris, Gauthiers-Villars, 1899. Unter »Nomographie» versteht man die Lehre von der graphischen Darstellung von Zahlenreihen.

Ein ausgezeichnetes Referat dieser Arbeit gibt Dr. FRIEDRICH SCHILLING: »Über die Nomographie von M. d'Ocagne», Leipzig, Teubner, Zweite Aufl. 1917.

festen Punkt P. Dies sieht man leicht ein, wenn man ein rechtwinkliges Punktkoordinatensystem mit Ursprung in A und Achsen längs AB und AU einführt. Die Gleichung der Gerade ist hier

Fig. 1.

$$y = \frac{v - u}{s} \cdot x + u.$$

und geht wegen (1) durch den festen Punkt $\left(\frac{bs}{a+b}, -\frac{c}{a+b}\right)$. Die Gleichung (1) stellt demgemäss den Punkt P dar.

Sind a, b und c Funktionen derselben Parameters t, so wird die Gleichung

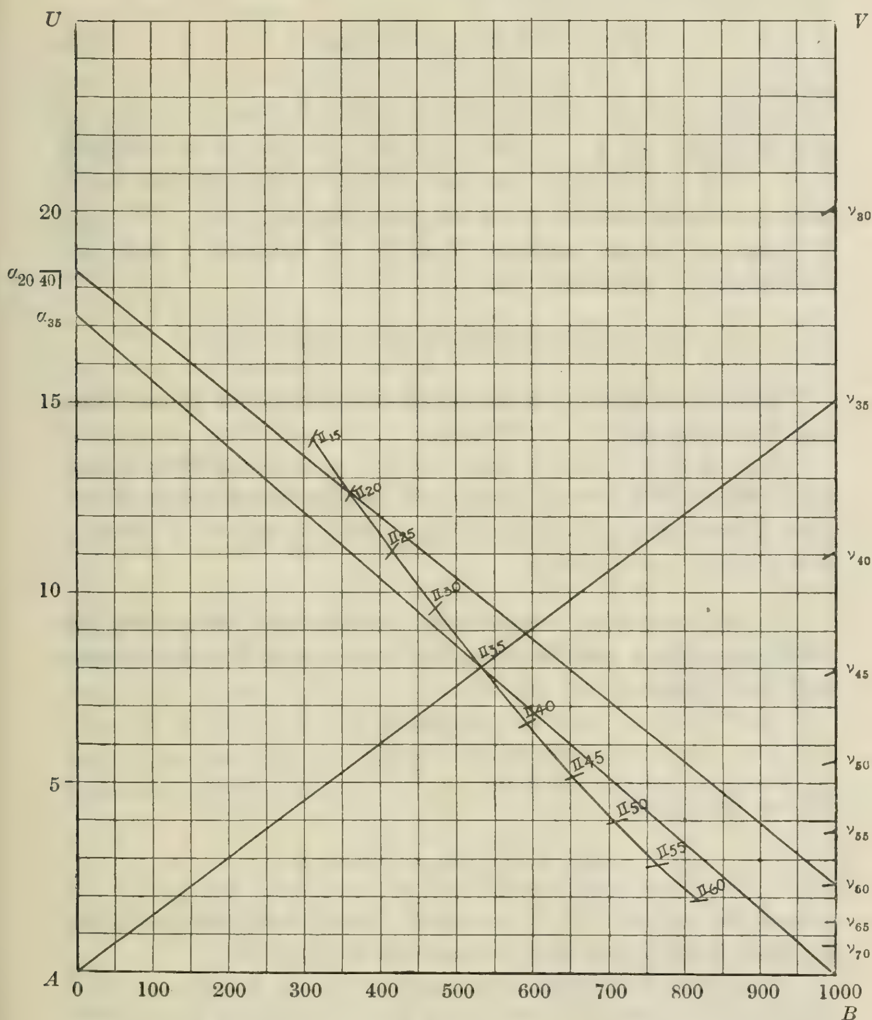


Fig. 2.

$$\varphi(t) \,.\, u + \psi(t) \,.\, v + \chi(t) = 0$$

für die Veränderliche t alle Punkte P auf einer gewissen Kurve K darstellen. Sind die Funktionen $f(u)$ und $g(v)$ als

Skalen jede längs ihrer Achse abgetragen, so wird dasselbe für die allgemeine Gleichung

$$\varphi(t) \cdot f(u) + \psi(t) \cdot g(v) + \chi(t) = 0 \qquad (2)$$

gelten.

Haben wir also die Funktion $g(v)$ längs der V-Achse an den Punkten $v', v'', \ldots v^{(n)}$ skaliert und auf K die Punkte $t', t'', \ldots t^{(m)}$ eingetragen, die verschiedenen Werten des Argumentes t entsprechen, so wird eine gerade Linie $v^{(i)}t^{(j)}$ die U-Achse in einem solchen Punkte $u^{(k)}$ schneiden, dass die Gleichung (2) befriedigt wird:

$$\varphi(t^{j}) \cdot f(u^{(k)}) + \psi(t^{(j)}) \cdot g(v^{(i)}) + \chi(t^{(j)}) = 0.$$

Hierdurch haben wir eine einfache graphische Darstellung von $f(u)$ erhalten.

Die Methode erhält eine weniger praktische Bedeutung, wenn Teile der Kurve K ausserhalb des Zeichenpapieres fallen, diese Unannehmlichkeit ist aber in der folgenden Anwendung sicher nicht vorhanden.

1. Wir suchen zuerst eine graphische Darstellung der vorschussweisen, aufhörenden Leibrente, des Eintrittsalters x und der Dauer n:

$$a_{x\overline{n|}} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}.$$

In der Gleichung

$$D_x \cdot a_{x\overline{n|}} + N_{x+n} - N_x = 0$$

setzen wir $a_{x\overline{n|}} = f(u)$, $N_{x+n} = g(v)$. Die Koeffizienten N_x und D_x sind Funktionen des Parameters x (Fig. 2).

Der dem Eintrittsalter x entsprechende Punkt π_x auf K kann als Schnittpunkt zwischen der Linie $f(u) = 0$, $g(v) = N_x$ durch A und die Linie $g(v) = 0$, $f(u) = \frac{N_x}{D_x} = a_x$ durch B bestimmt werden. Wir setzen also N_x in einem passenden Massstab längs der V-Achse bis v_x und a_x in einem passenden Massstab längs der U-Achse bis a_x ab. Dann wird π_x der Schnittpunkt zwischen den Linien Av_x und Ba_x.

Infolge des Obenstehenden wird nun die Gerade $\nu_{x+n} \pi_x \; A \alpha_{x\overline{n}|} = \mathrm{a}_{x\overline{n}|}$ der U-Achse abschneiden.[1]

Wir zeichnen die Kurve K. Dieselbe kann, wie oben erklärt worden ist, punktweise durch Linealkonstruktionen bestimmt werden. Da aber die Punkten der K die Grundlage für alle folgenden Konstruktionen bilden, ist es am besten die Punktkoordinaten der π_x in z. B. dem Cartesischen System deren Achsen AB und AU sind zu berechnen. Wir finden $\pi_x\left(\frac{1}{1+D_x}\cdot s,\ \frac{N_x}{1+D_x}\right)$, welche Koordinaten für alle Werte des Eintrittsalters x ausgerechnet werden, wonach die Punkte direkt abgetragen werden.

Wir benutzen bequem ein Blatt gewöhnliches Millimeterpapier und wählen $s = 50$ cm. Der Massstab für N_x und a_x wird so gewählt, dass wir für das niedrigste in Betracht kommende Schluss- bzw. Anfangsalter ν_x und α_x eingezeichnet bekommen.

2. Zur Bestimmung der einmaligen Prämie tragen wir $\frac{1}{d} = \frac{1}{i} + 1$ längs der U-Achse bis D in demselben Massstabe wie für a_x ab und ziehen die Linie BD (Fig. 3). (Sollte D ausserhalb des Blattes Papiers fallen, so bestimmt man leicht den Schnittpunkt von BD mit dem oberen Rande des Blattes.) Wir ziehen hierauf eine Gerade durch $\alpha_{x\,\overline{n}|}$ parallel der Grundlinie AB bis zum Schnitte mit BD in C. Dann wird die einmalige Prämie für eine Lebensversicherung mit dem Eintrittsalter x und Auszahlung spätestens nach n Jahren:

$$A_{x\overline{n}|} = 1 - d\,\mathrm{a}_{x\,\overline{n}|}$$

die Länge von $\alpha_{x\overline{n}|}C$, mit AB als Einheit gemessen, sein. Dies folgt einfach aus

$$\alpha_{x\overline{n}|}C = \frac{\alpha_{x\overline{n}|}D}{AD}\cdot AB = \frac{AD - A\alpha_{x\overline{n}|}}{AD}\cdot AB = \frac{\frac{1}{d} - \mathrm{a}_{x\overline{n}|}}{\frac{1}{d}} = 1 - d\,\mathrm{a}_{x\overline{n}|}.$$

[1] Dies folgt auch direkt aus der Figur, indem die Dreiecke $A\alpha_x\pi_x$ und $\nu_x B \pi_x$ gleichförmig und in demselben Verhältnis wie die gleichförmigen Dreiecke $A\alpha_{x\overline{n}|}\pi_x$ und $\nu_x \nu_{x+n}\pi_x$ sind, weshalb:

$$A\alpha_{x\overline{n}|} = \frac{A\alpha_x}{B\nu_x}\cdot \nu_{x+n}\nu_x = \frac{\mathrm{a}_x}{N_x}(N_x - N_{x+n}) = \mathrm{a}_{x\overline{n}|}.$$

Anstatt die Gerade $a_{x\overline{n}|}C$ zu ziehen und messen, können wir eine lineare Skala von 0 in D bis 1000 in A einzeichnen. Im Schnittpunkt der Gerade $v_{x+n}\,x_x$ mit der U-Achse lesen wir auf dieser Skala $A_{x\overline{n}|}$ augenblicklich ab.

Falls die einmalige Bruttoprämie linear durch die Nettoprämie

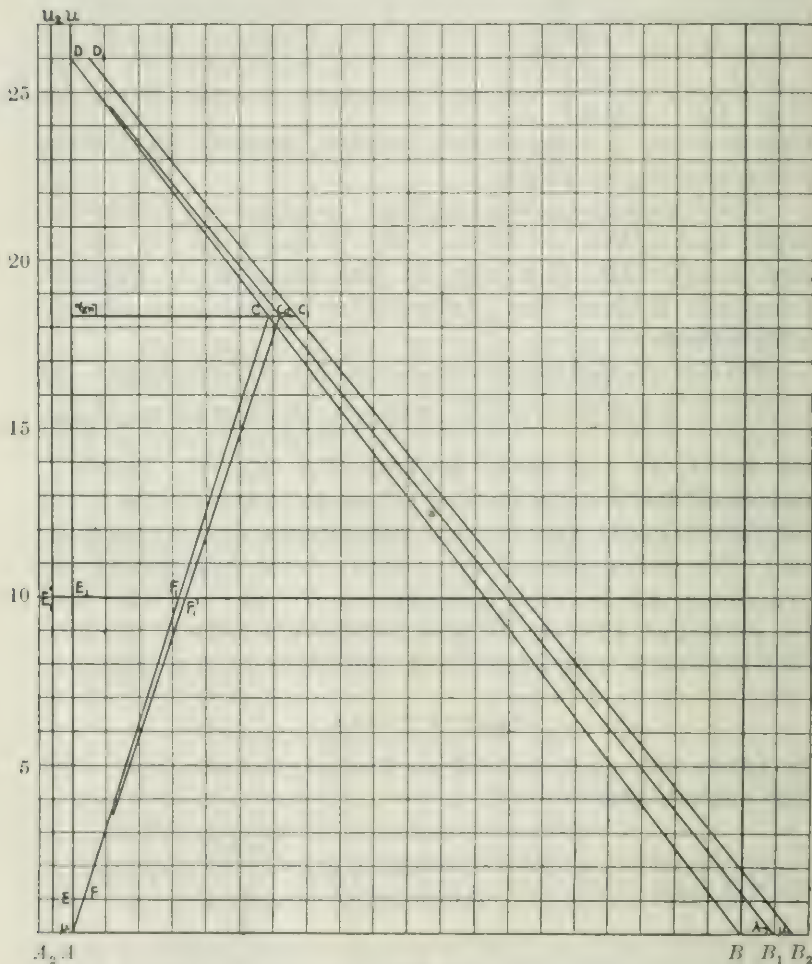


Fig. 3.

$$A'_{x\overline{n}|} = \lambda A_{x\overline{n}|} + \mu$$

ausgedrückt wird, können auch die Bruttoprämien an derselben Figur abgelesen werden. Wir verlängern $AB = 1$ mit

$\lambda - 1$ bis B_1 und danach mit μ bis B_2 und ziehen $B_2 D_1 \parallel B_1 D$. Die Linie $B_2 D_1$ spielt nun dieselbe Rolle wie oben BD. $A'_{x\overline{n}|}$ wird somit durch $\alpha_{x\overline{n}|} C_1$ dargestellt, wo C_1 der Schnittpunkt zwischen $B_2 D_1$ und der Parallele der Grundlinie durch $\alpha_{x\overline{n}|}$ ist.

3. Die jährliche Prämie, zahlbar während der ganzen Versicherungszeit:

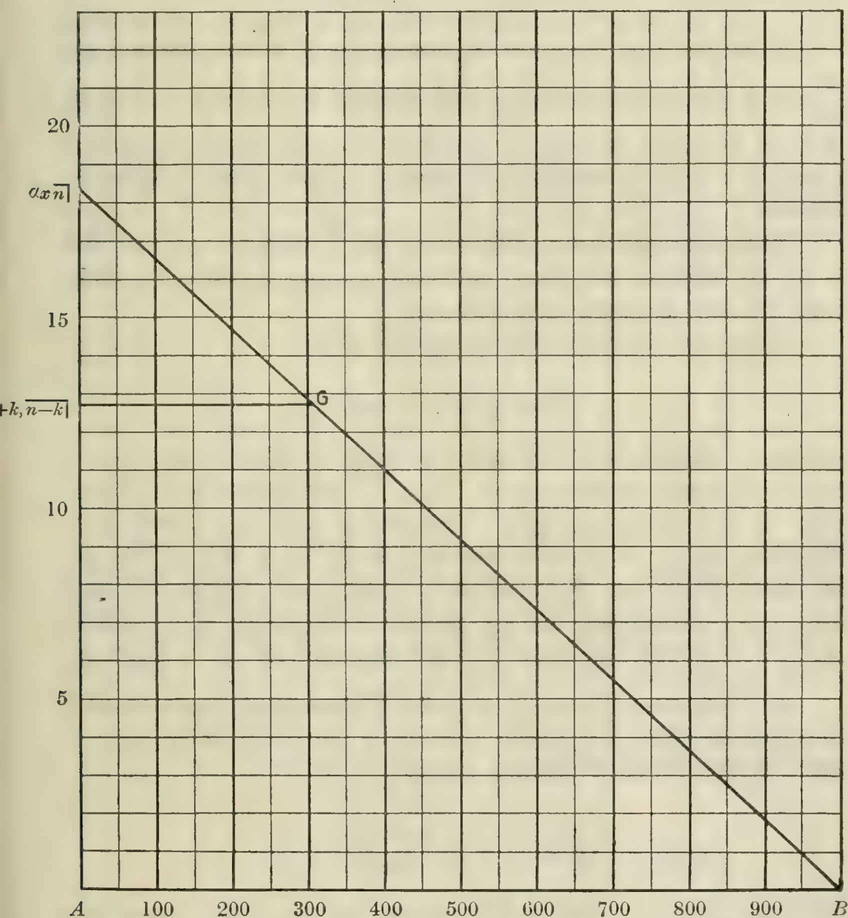


Fig. 4.

$$P_{x\overline{n}|} = \frac{A_{x\overline{n}|}}{a_{x\overline{n}|}}$$

wird folgendermassen bestimmt: Durch den Punkt E der U-Achse, dessen Abstand von A 1 ist, wird eine gerade Linie, die Einheitslinie, parallel der Grundlinie des Schnittes mit AC in F gezogen. Dann wird EF (mit AB als Einheit gemessen) $P_{x\overline{n}|}$ sein. Die Figur zeigt nämlich, dass

$$EF = \frac{AE}{A\,a_{x\overline{n}|}} \cdot a_{x\overline{n}|}C = \frac{1}{\mathrm{a}_{x\overline{n}|}} \cdot A_{x\overline{n}|}.$$

Falls die in Betracht kommenden Prämien kleiner als $\frac{1}{10}$ der Versicherungssumme sind, könnte die Prämie auf einer AB im Abstand $10\,(AE_1 = 10\,AE,\ E_1F_1 = 10\,.\,P_{x\overline{n}|})$ parallelen Linie (in dem 10-doppelten Massstab) deutlicher abgelesen werden.

Durch eino geeignete Skalierung der U-Achse von 0 in D bis 8 in A, können wir $P_{x\overline{n}|}$, nachdem $v_{x+n}\,\pi_x$ gezogen ist, ohne jede weitere Konstruktion ablesen.

Wird die jährliche Bruttoprämie durch

$$P'_{x\overline{n}|} = \lambda\,.\,P_{x\overline{n}|} + \mu_1,$$

gebildet, verlängern wir $AB = 1$ über B hinaus mit $(\lambda - 1)$ bis B_1 und über A hinaus mit μ_1 bis A_1. Die Linien $A_1U_1 \parallel AU$ und B_1D werden gezogen. Schneiden nun $a_{x\overline{n}|}C$ und B_1D einander in C_2, schneiden ferner EF A_1U_1 in E', AC_2 in F', so wird $P'_{x\overline{n}|}$ als $E'F'$ abgelesen werden. Wünschen wir auf E_1F_1 abzulesen, so ist selbstverständlich A_1U_1 durch $A_2U_2 \parallel AU$ im Abstand 10μ zu ersetzen $(E'_1F_1' = 10P'_{x\overline{n}|})$.

4. Bei einer Versicherung mit Prämienzahlung während der ganzen Versicherungszeit drücken wir die Prämienreserve nach Verlauf von k Jahren durch

$$_kV_{x\overline{n}|} = 1 - \frac{\mathrm{a}_{x+k,\overline{n-k}|}}{\mathrm{a}_{x\overline{n}|}}$$

aus.

Wir verbinden (Fig. 4) $a_{x\overline{n}|}$ mit B und ziehen durch $\mathrm{a}_{x+k,\overline{n-k}|}$ zu AB die Parallele, die $a_{x\overline{n}|}B$ in G schneiden. Dann wird $a_{x+k,\overline{n-k}|}G$, mit AB als Einheit gemessen, gleich $_kV_{x\overline{n}|}$ sein. Wir haben nämlich:

$$\alpha_{x+k,\overline{n-k}|}G = \frac{A\alpha_{x\overline{n}|} - A\alpha_{x+k,\overline{n-k}|}}{A\alpha_{x\overline{n}|}} = \frac{a_{x\overline{n}|} - a_{x+k,\overline{n-k}|}}{a_{x\overline{n}|}} = {}_kV_{x\overline{n}|}.$$

Die zu derselben Versicherung gehörenden Prämienreserven werden also als Parallelen der Grundlinie im Dreieck $AB\alpha_{x\overline{n}|}$ abgebildet.

5. Soll die Prämie nicht während der Versicherungszeit, sondern in m Jahren $(m < n)$ erlegt werden, so ist

$$_{m|}P_{x\overline{n}|} = \frac{1 - d\,a_{x\overline{n}|}}{a_{x\overline{n}|}}.$$

Wir tragen (Fig. 5) auf der V-Achse $B\beta_{x\overline{m}|} = A\alpha_{x\overline{m}|} = a_{x\overline{m}|}$ ab, ziehen $\alpha_{x\overline{n}|}\beta_{x\overline{m}|}$ bis zum Schnitte mit BD in H und weiter AH bis zum Schnitte mit der V-Achse in W. Dann ist

$$\frac{BW}{AD} = \frac{B\beta_{x\overline{m}|}}{\alpha_{x\overline{n}|}D}$$

oder

$$BW = \frac{\frac{1}{d}\cdot a_{x\overline{m}|}}{\frac{1}{d} - a_{x\overline{n}|}} = \frac{a_{x\overline{m}|}}{1 - d\,a_{x\overline{n}|}} = \frac{1}{_{m|}P_{x\overline{n}|}}.$$

Die Prämie selbst wird auf EF (bezw. $E_1\ F_1$) von der U-Achse bis zum Schnittpunkte mit AH abgelesen. (Dies ersehen wir daraus, dass $\Delta AEF \sim \Delta WBA$).

Führen wir die in 3 erwähnte Skala der U-Achse horizontal nach BD über, werden wir die Prämie auf diese Gerade direkt ablesen können.

6. Die Prämienreserve für dieselbe Versicherung nach einer Dauer von k Jahren $(k < m)$:

$$_kV(_{m|}P_{x\overline{n}|}) = A_{x+k,\overline{n-k}|} - {}_{m|}P_{x\overline{n}|}\cdot a_{x+k,\overline{m-k}|}$$

bestimmen wir am sichersten, indem wir A und $P.a$ jedes für sich ablesen und nachher die Subtraktion vornehmen. $A_{x+k,\overline{n-k}|}$ wird, wie in 2 gezeigt ist, auf BD bis C und $_{m|}P_{x\overline{n}|}\cdot a_{x+k,\overline{m-k}|}$ von $\alpha_{x+k,\overline{m-k}|}$ bis I auf AK, beide parallel der Grundlinie und mit AB als Einheit abgelesen.

7. Die Regeln für die Berechnung des Rückkaufswerts und der Grösse der prämienfreien Police sind, wie bekannt,

Fig. 5.

mannigfach. In vielen Fällen wird es indessen gelingen, diese Werte auf derselben Figur graphisch bestimmt zu erhalten.

Als Beispiel hierfür wollen wir die Bestimmung des Rück-

kaufswertes für eine Versicherung mit fortdauernder Prämienzahlung nach der FREDHOLMschen Regel (Rückkaufswert gleich dem mathematischen Wert mit Abzug von 4 % des ungedeckten Risikos $= 1{,}04\, V \div 0{,}04$) angeben. Die prämienfreie Police

Fig. 6.

denken wir uns weiter so berechnet, dass ihr Rückkaufswert gleich dem Rückkaufswert der ursprünglichen Police ist.

Wir verlängern (Fig. 6) AB über A um 0,04 bis A_1, und ziehen $A_1 D_1 \parallel AD$. Auf dieser Linie tragen wir die Punkte D_1 und $\alpha'_{x\overline{n}|}$ ein, die in derselben Höhe über der

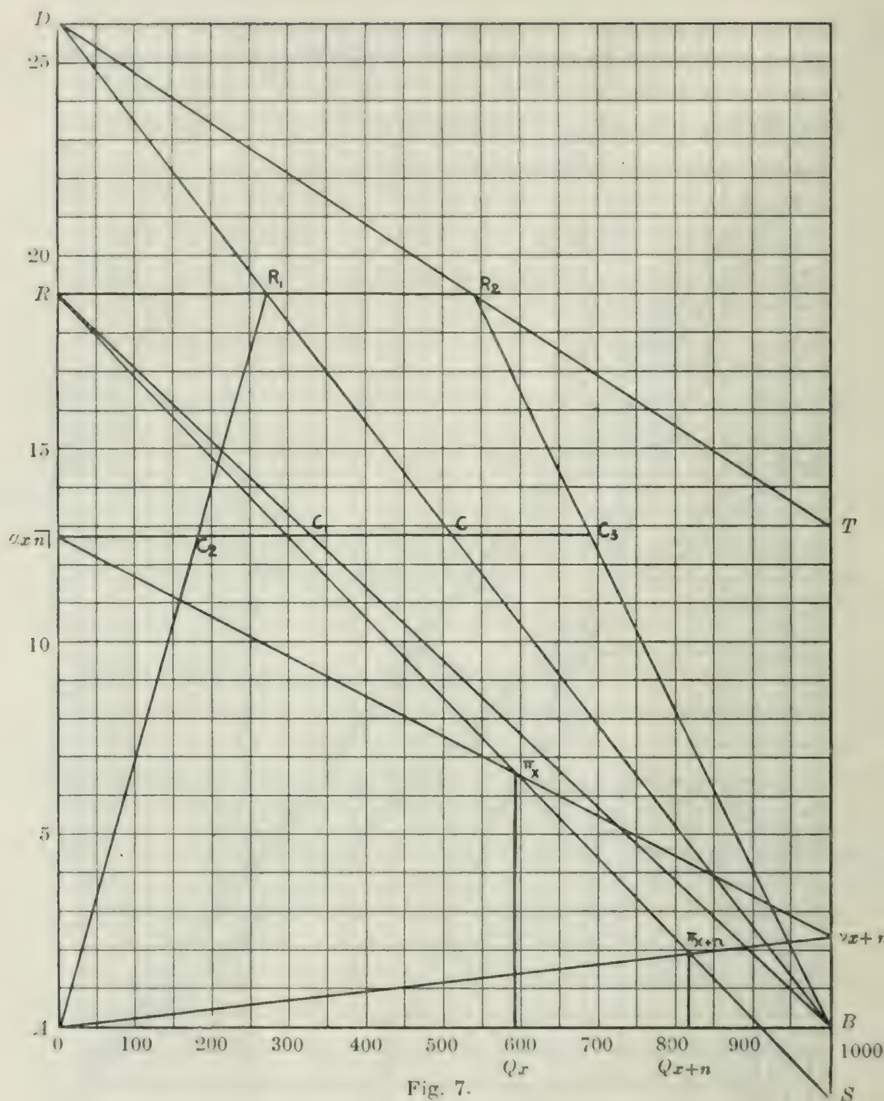


Fig. 7.

Grundlinie wie D und $\alpha_{x\overline{n}|}$ liegen, und ziehen $D_1 B$ und $\alpha'_{x\overline{n}|} B$. Die erste Linie schneidet die U-Achse in dem festen Punkte D_2, die andere schneidet den Rückkaufswert $\alpha_{x+k,\overline{n-k}|} G_1$ des abgebildeten Prämienreserve ($\alpha_{x+k,\overline{n-k}|} G$, Fig. 4) ab, während die Linie $D_2 G_1$ AB in N schneidet, wo AN der Betrag der prämienfreien Police wird.

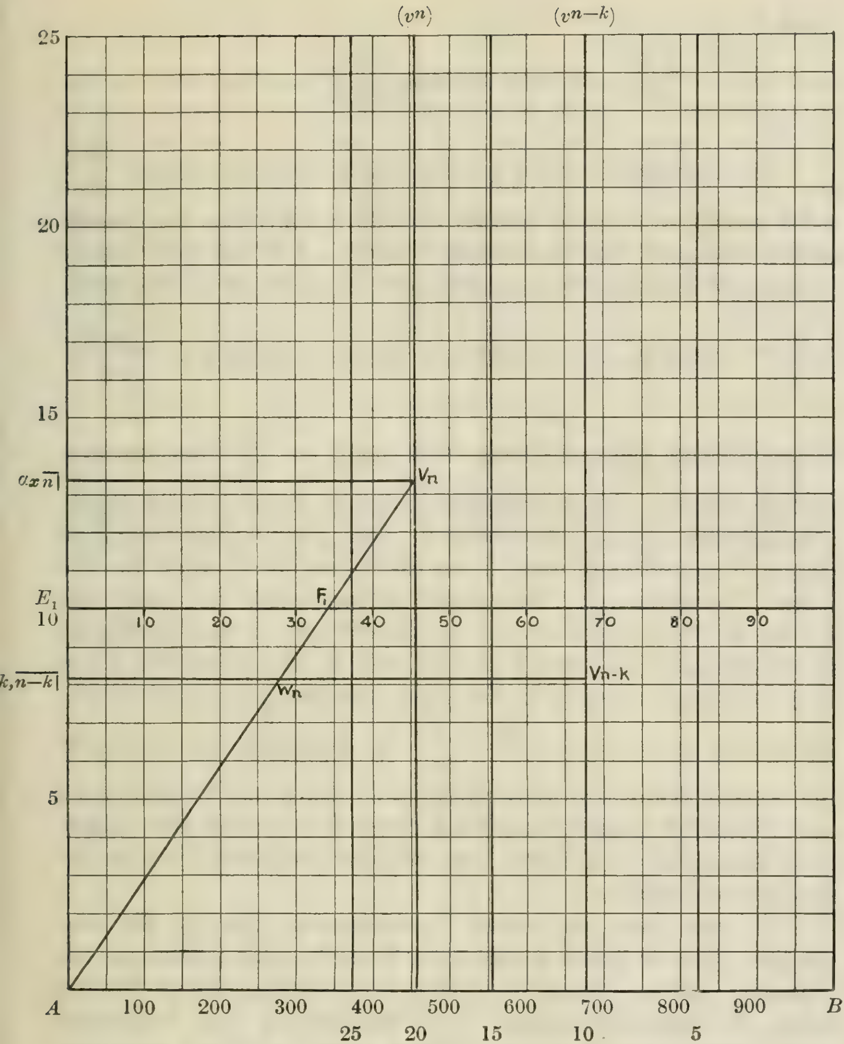


Fig. 8.

8. Die Projektionen (Fig. 7) von π_x und π_{x+n} auf AB seien mit Q_x und Q_{x+n} bezeichnet und $\pi_x \pi_{x+n}$ schneide die U-Achse in R, die V-Achse in S. Weil wegen 1:

$$AQ_x = \frac{1}{1+D_x} AB, \; BQ_x = \frac{D_x}{1+D_x} AB,$$

wird

$$\frac{B Q_x}{A Q_x} = D_x \text{ und ebenso } \frac{B Q_{x+n}}{A Q_{x+n}} = D_{x+n}.$$

Die einmalige Prämie für die Aussteuerversicherung: $\frac{D_{x+n}}{D_x}$ wird somit durch das Doppelverhältnis $(B A Q_{x+n} Q_x)$ dargestellt, das erst durch senkrechte der $A B$ auf der Gerade $\pi_x \pi_{x+n}$ und dann aus ν_{x+n} auf der U-Achse projiziert wird:

$$\frac{D_{x+n}}{D_x} = (B A Q_{x+n} Q_x) = (S R \pi_{x+n} \pi_x) = (\infty R A \alpha_{x\overline{n}|}) = \frac{\alpha_{x\overline{n}|} R}{A R}$$

Hieraus folgt, dass die Linie $R B \; \alpha_{x\overline{n}|} C_1 = \frac{D_{x+n}}{D_x}$ der die einmalige Prämie der zusammengesetzten Versicherung repräsentierenden Linie abschneidet. Der zurückbleibende Teil dieses Linienstückes wird dann die einmalige Prämie für die kurze Versicherung mit dem Anfangsalter x und der Dauer n. Wünschen wir die letztere Prämie direkt abzulesen, so bestimmen wir den Schnittpunkt R_1 zwischen $RR_1 \parallel AB$ und BD und ziehen AR_1 bis zum Schnitte mit $\alpha_{x\overline{n}|} C$ in C_2. Dann ist $\alpha_{x\overline{n}|} C_2 = C_1 C \left(= \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \right)$. Die jährliche Prämie für die Versicherung auf Lebensfall bzw. die kurze Versicherung auf Todenfall findet man beim Schnitt zwischen AC_1 bezw. AC_2 und einer der Linien, auf welcher sämtliche Prämien abgeschnitten werden. (3)

Da wir nun die kurze Versicherung, die in der einmaligen Prämie einer gemischten Versicherung enthalten ist, gefunden haben, werden wir auch die Prämienreserve für die kurze Versicherung bezw. die Versicherung auf Lebensfall leicht bestimmen können. Ferner sehen wir, dass wir auch eine graphische Bestimmung der Prämie und der Prämienreserve für eine gemischte Versicherung mit verschiedenen Auszahlungsbeträgen bei erreichtem Alter und bei früherem Tod angeben können.

Bestimmen wir als Beispiel hierfür die einmalige Prämie für eine gemischte Versicherung mit 100 % Zuschlag bei früherem Tod. Da hier $\alpha_{x\overline{n}|} C$ um $\alpha_{x\overline{n}|} C_2 = C_1 C$ vermehrt

werden soll, tragen wir $BT = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2d}$ längs der V-Achse ab, ziehen DT und bestimmen den Schnittpunkt R_2 zwischen dieser festen Linie und $RR_1 (RR_1 = R_1 R_2)$, ziehen BR_2 und lesen die gesuchte Prämie $\alpha_{x\overline{n}|} C_3$ von der U-Achse bis BR_2 ab.

9. Prämie und Prämienreserve einer Versicherung auf bestimmte Verfallzeit können wir aus derselben Figur finden, wenn wir im voraus die Parallele zu der U-Achse in dem Abstande $v, v^2, v^3 \ldots$ (Fig. 8) aufgezeichnet haben. Ziehen wir eine Linie durch $\alpha_{x\overline{n}|}$ parallel der Grundlinie bis zum Schnitt mit der Linie für v^n in V_n und verbinden V_n mit A, so wird die Prämie in der Versicherungszeit, $\frac{v^n}{a_{x\overline{n}|}}$, von der Einheitslinie abgeschnitten. Die Prämienreserve nach Verlauf von k Jahren finden wir als Differenz zwischen $\alpha_{x+k,\overline{n-k}|} V_{n-k}$ und $\alpha_{x+k,\overline{n-k}|} W_n$, wo V_{n-k} und W_n die Schnittpunkte der Ablesungslinie mit der Linie für v^{n-k} und mit $A V_n$ sind.

Note sur quelques inégalités et formules d'approximation.

Par **Birger Meidell.**

Les calculs pénibles et laborieux que nécessitent trop souvent les opérations d'assurance sur la vie, rendent fort désireux de trouver des formules d'approximation ou bien des inégalités *générales*, faisant connaître en chaque cas particulier, et avec le moins de travail possible, une limite supérieure ou inférieure des expressions dont on cherche la valeur numérique. Cela est évident surtout au cas où l'on désire seulement faire une évaluation »à peu près». Les exemples en abondent.

Au numéro précédent de ce journal M. STEFFENSEN a publié un mémoir remarquable où il démontre une inégalité très générale, importante sans doute pour l'analyse mathématique, et qui, en outre, paraît être d'une grande utilité pratique précisement dans le sens nommé. C'est l'inégalité suivante.

$$\int_{b-\lambda}^{b} f(t)\,dt < \int_{a}^{b} f(t)\,\varphi(t)\,dt < \int_{a}^{a+\lambda} f(t)\,dt; \qquad (1)$$

$f(t)$ y désigne une fonction qui dans l'intervalle (a, b) n'est jamais croissante, tandis que $\varphi(t)$ dans ce même intervalle est positive et plus pétite que l'unité. Pour abréger on a posé

$$\int_{a}^{b} \varphi(t)\,dt = \lambda.$$

M. Steffensen fait de cette inégalité des applications immédiates par exemple au calcul approché des rentes viagères. En donnant à la limite, trouvée ainsi de (1), une certaine correction, il arrive à des formules d'approximation très précises.

Ces applications au calcul des assurances reposent surtout sur le fait que la fonction $v^t \frac{l_{x+t.y+t\ldots}}{l_{x.y\ldots}}$, qui figure comme un élement fondamental en bon nombre des expressions des mathématiques d'assurance, est le produit de deux fonctions satisfaisant précisément aux conditions nommées plus haut.

Or, on remarque encore que v^t est une fonction convexe (d'en bas) dans tout intervalle et que $\frac{l_{x+t.y+t\ldots}}{l_{x.y\ldots}}$ est une quantité positive. Cette remarque met en évidence les applications nombreuses et immédiates que l'on peut faire à ces mêmes calculs d'assurance d'une autre inégalité bien connue, due à M. Jensen.

Si $e(t)$ est une fonction positive dans un intervalle (a, b), et si $\psi(t)$ est une fonction partout convexe dans l'intervalle $(\alpha_1\, \alpha_2)$, α_1 et α_2 étant les limites inférieure et supérieure en (a, b) d'une fonction arbitraire $\alpha(t)$, on a

$$(2) \qquad \int_a^b e(t)\,.\,\psi(\alpha(t))\,dt \geq \int_a^b e(t)\,dt\,.\,\psi\left\{\frac{\int_a^b e(t)\,\alpha(t)\,dt}{\int_a^b e(t)\,dt}\right\}.$$

Le signe inverse a lieu si ψ est concave.[1] *Cette inégalité a également lieu quand on remplace le signe $\int$ par le signe $\sum$.*[2]

On peut très souvent se servir avec avantage dans les calculs numériques de cette propriété très générale. Le but du présent travail est de montrer qu'il existe une parenthé entre ces inégalités (1) et (2). Ensuite nous allons, pour mieux les comparer, appliquer (2) à l'un des exemples traités par M. Steffensen, ainsi qu'à quelques cas analogues.

---

[1] Il est sousentendu que toutes les fonctions en question sont intégrables.
[2] Jensen: Sur les fonctions convexes. Acta mathématica, XXX 1906.

Remarquons que $f(t)$ n'étant jamais croissante en (a, b), la fonction

$$\psi(t) = \int_a^t f(\xi)\, d\xi$$

sera concave[1] dans cet intervalle, parce que $\psi''(t)$ ne sera, par définition, jamais positive en (a, b). Egalement

$$\psi(t) = \int_t^b f(\xi)\, d\xi$$

sera convexe.

Considérons d'abord le premier de ces deux cas et partons de l'inégalité (2) pour le cas de concavité et pour $\alpha(t) = t$; (2) s'écrie alors

$$(2)' \qquad \int_a^b e(t)\, \psi(t)\, dt \leq \int_a^b e(t)\, dt \,.\, \psi\left\{\frac{\int_a^b e(t) \,.\, t \,.\, dt}{\int_a^b e(t)\, dt}\right\};$$

(le signe inverse au cas de convexité).

En introduisant en $(2)'$ la première des deux fonctions $\psi(t)$ écrites, on trouve

$$(2)'' \qquad \int_a^b e(t) \int_a^t f(\xi)\, d\xi\, dt \leq \int_a^b e(t)\, dt \int_a^{\frac{\int_a^b e(t) \,.\, t\, dt}{\int_a^b e(t)\, dt}} f(\xi)\, d\xi .$$

[1] La définition de concavité et convexité introduite par M. Jensen, est plus générale que la définition ordinaire, mais contient celle ci comme cas particulier.

Or, comme on a dans tout l'intervalle (a, b)

$$\int_a^t f(\xi)\, d\xi \geq (t-a) f(t),$$

l'on aura, puisque $e(t)$ est positive,

$$\int_a^b e(t) \int_a^t f(\xi)\, d\xi\, dt \geq \int_a^b e(t)\,(t-a) f(t)\, dt;$$

donc de $(2)''$

$$(2''') \qquad \int_a^b e(t)\,(t-a) f(t)\, dt \leq \int_a^b e(t)\, dt \int_a^{\frac{\int_a^b e(t)\,.\,t\, dt}{\int_a^b e(t)\, dt}} f(\xi)\, d\xi.$$

Enfin, comme

$$\frac{\int_a^b e(t)\, t\, dt}{\int_a^b e(t)\, dt} \equiv a + \frac{\int_a^b e(t)\,(t-a)\, dt}{\int_a^b e(t)\, dt}$$

et en posant

$$(3) \qquad \left\{ \text{ɔ:}\; \begin{aligned} & e(t)\,(t-a) = \varphi(t) \\ & \qquad e(t) = \frac{\varphi(t)}{t-a} \end{aligned} \right.$$

on trouve finalement

$$\int_a^b f(t)\,\varphi(t)\,dt < \mu \int_a^{a+\frac{\lambda}{\mu}} f(\xi)\,d\xi \tag{4}$$

pourvu que les intégrales

$$\begin{cases} \lambda = \displaystyle\int_a^b \varphi(t)\,dt \\ \text{et} \\ \mu = \displaystyle\int_a^b \frac{\varphi(t)}{t-a}\,dt \end{cases} \tag{5}$$

aient un sens, et que $\varphi(t)$ *soit positive en* (a, b), *tandis que* $f(t)$ *ne soit jamais croissante en* (a, b).

On voit d'abord que φ doit s'annuler pour $t = a$.

Prenons maintenant le cas de convexité. L'inégalité (2)′ devient après introduction de la deuxième des fonctions $\psi(t)$ écrites plus haut,

$$\int_a^b e_1(t) \int_t^b f(\xi)\,d\xi\,dt \geq \int_a^b e_1(t)\,dt \,.\int_{\frac{\int_a^b e_1(t)\,t\,dt}{\int_a^b e_1(t)\,dt}}^b f(\xi)\,d\xi. \tag{6}$$

Or, comme

$$\int_t^b f(\xi)\,d\xi < (b-t)\,f(t)$$

on aura

$$\int_a^b e_1(t) \int_t^b f(\xi)\,d\xi\,dt < \int_a^b e_1(t)\,(b-t)\,f(t)\,dt;$$

donc de (6)

$$(7)\qquad \int_a^b e_1(t)\,(b-t)\,f(t)\,dt \geq \int_a^b e_1(t)\,dt \,.\int_{\frac{\int_a^b e_1(t)\,t\,dt}{\int_a^b e_1(t)\,dt}}^b f(\xi)\,d\xi .$$

Or

$$\frac{\int_a^b e_1(t)\,t\,dt}{\int_a^b e_1(t)\,dt} \equiv b - \frac{\int_a^b e_1(t)\,(b-t)\,dt}{\int_a^b e_1(t)\,dt} .$$

Posons

$$(3)'\qquad \left\{\begin{array}{lll} & e_1(t)\,(b-t) & = \varphi_1(t) \\ \text{ɔ:} & & \\ & e_1(t) & = \dfrac{\varphi_1(t)}{b-t} \end{array}\right.$$

on trouve donc de (7)

$$(8)\qquad \nu \int_{b-\frac{\lambda}{\nu}}^b f(t)\,dt \leq \int_a^b f(t)\,\varphi_1(t)\,dt$$

pourvu que λ (de (5)) et ν aient un sens.

$$(5)'\qquad \nu = \int_a^b \frac{\varphi_1(t)}{b-t}\,dt ,$$

et que $\varphi_1(t)$ soit positive, tandis que $f(t)$ ne soit jamais croissante en (a, b).

$\varphi_1(t)$ doit, on le voit, s'annuler pour $t = b$.

En choisissant pour $\varphi(t)$ la même fonction dans ces deux inégalités (4) et (8) on voit de (3) et (3)' qu'elle sera de la forme $(b-t)(t-a)C(t)$; où $C(t)$ sera positive. En joignant les deux inégalités on aura

$$(9) \qquad \nu \int_{b-\frac{\lambda}{\nu}}^{b} f(t)\,dt < \int_{a}^{b} f(t)\varphi(t)\,dt \leq \mu \int_{a}^{a+\frac{\lambda}{\mu}} f(t)\,dt$$

pourvu que $\varphi(t)$ soit positive en (a,b), s'annule pour $t=a$ et $t=b$, et que les intégrales λ, μ et ν définies par (5) et (5)' aient un sens; et enfin que la fonction $f(t)$ ne soit jamais croissante en (a,b).

On voit la grande ressemblance entre l'inégalité (9) et celle de M. Steffensen, (1). La restriction de la fonction φ est pourtant assez différente dans les deux cas. Ces inégalités, on le voit, coïncident quand on a $\mu=\nu=1$.[1]

[1] Il est facile de trouver des exemples où ces équations sont compatibles. Supposons pour simplifier que les limites sont $a=0$ et $b=1$. Nous allons choisir pour φ la fonction

$$\varphi(t) = c\,.\,t\,.\,(1-t)\,e^{-\rho^2(t-1/2)^2}.$$

Chacune des deux intégrales μ et ν se réduit, on le voit sans peine, en mettant $\rho(t-{}^1/_2)=\xi$, à

$$\frac{c}{2\rho}\int_{-\rho/2}^{+\rho/2} e^{-\xi^2}\,d\xi = \frac{c}{\rho}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\Phi\left(\frac{\rho}{2}\right);$$

où $\Phi(t)$ désigne la fonction bien connue $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-\xi^2}d\xi$. En prenant pour valeur de la constante c

$$c = \frac{2\rho}{\sqrt{\pi}\,\Phi\left(\frac{\rho}{2}\right)}$$

les integrales se réduisent donc bien à l'unité. La constante ρ reste arbitraire. Pour $t=0$ et $t=1$ on a $\varphi=0$, mais pour $t={}^1/_2$, φ prends la valeur

Remarquons que λ, μ et ν sont positives, que $\frac{\lambda}{\mu}$, et $\frac{\lambda}{\nu}$ sont plus petites que $b \div a$; ce que l'on voit tout de suite en se rappelant que $\varphi = e(t)(t-a) = e_1(t)(b-t)$ où e et e_1 sont des fonctions positives.

Si dans l'inégalité (1) on prend φ égale à une constante positive k_1 ou k_2 plus petite que l'unité, on a par exemple

(10) $$k_1 \int_{a_1}^{b_1} f(t)\,dt < \int_{a_1}^{a_1+k_1(b_1-a_1)} f(t)\,dt,$$

et également

(11) $$\int_{b_2-k_2(b_2-a_2)}^{b_2} f(t)\,dt < k_2 \int_{a_2}^{b_2} f(t)\,dt$$

si (a_1, b_1) et (a_2, b_2) sont compris dans (a, b). Choisissons en (10), $k_1 = \mu \leq 1$, $a_1 = a$, $b_1 = a + \frac{\lambda}{\mu}$, on trouve

(10)′ $$\mu \int_a^{a+\frac{\lambda}{\mu}} f(t)\,dt \leq \int_a^{a+\lambda} f(t)\,dt.$$

Prenons ensuite en (11), $k_2 = \nu \leq 1$, $b_2 = b$ et $a_2 = b - \frac{\lambda}{\nu}$, on aura

---

$$\frac{c}{4} = \frac{\rho}{2\sqrt{\pi}\,\Phi\left(\frac{\rho}{2}\right)}.$$

Ainsi, en choisissant pour ρ une valeur plus grande que celle définie par l'équation

$$\rho_1 = 2\sqrt{\pi}\,\Phi\left(\frac{\rho_1}{2}\right)$$

on peut rendre $\varphi(^1/_2)$ *aussi grand que l'on désire*, la limite de Φ etant égale à l'unité. La valeur de ρ_1 ne sera pas très différente de $2\sqrt{\pi}$, comme on le voit en consultant une table de la fonction Φ.

$$\int_{b-\lambda}^{b} f(t)\,dt \leq \nu \int_{b-\frac{\lambda}{\nu}}^{b} f(t)\,dt. \tag{11'}$$

Nous voyons donc que *si* $\varphi(t)$ *et* $f(t)$ *satisfont aux conditions dèja nommées sous (9), et que, si en outre*

$$\left.\begin{array}{l} \mu = \displaystyle\int_a^b \frac{\varphi(t)}{t-a}\,dt < 1 \\ \text{et} \\ \nu = \displaystyle\int_a^b \frac{\varphi(t)}{b-t}\,dt \leq 1 \end{array}\right\} \tag{12}$$

on a, en posant pour abréger l'écriture $\int_a^b f(t)\,\varphi(t)\,dt = \dot{I}$,

$$\int_{b-\lambda}^{b} f(t)\,dt < \nu \int_{b-\frac{\lambda}{\nu}}^{b} f(t)\,dt \leq \dot{I} < \mu \int_a^{a+\frac{\lambda}{\mu}} f(t)\,dt < \int_a^{a+\lambda} f(t)\,dt \tag{13}$$

et l'inégalité de M. Steffensen *a donc lieu, sauf pour le cas* $o < \varphi(t) \leq 1$, *aussi au cas où* φ *est définie par (12).*

Il est facile de transformer toutes ces inégalités pour le cas où l'on change le signe $\int$ par le signe $\sum$.

Nous sommes partis de l'inégalité (2)' pour trouver ces inégalités. Inversement nous verrons facilement que l'on peut déduire (2)' comme un cas particulier de l'inégalité de M. Steffensen.

Soit $e(\xi)$ une fonction positive; et choisissons pour $\varphi(t)$ la fonction positive et plus petite que l'unité en (a, b),

$$\varphi(t) = \frac{\int_t^b e(\xi)\,d\xi}{\int_a^b e(\xi)\,d\xi}.$$

En introduisant φ en (1) on trouve après multiplication avec $\int_a^b e(\xi)\,d\xi$

$$\int_a^b f(t)\int_t^b e(\xi)\,d\xi\,dt \leq \int_a^b e(\xi)\,d\xi \int_a^{a+\lambda_1} f(t)\,dt \tag{14}$$

où

$$a+\lambda_1 = a + \frac{\int_a^b \int_t^b e(\xi)\,d\xi\,dt}{\int_a^b e(\xi)\,d\xi} = a + \frac{\int_a^b e(\xi)\int_a^\xi dt\,d\xi}{\int_a^b e(\xi)\,d\xi} = a +$$

$$+ \frac{\int_a^b e(\xi)(\xi - a)\,d\xi}{\int_a^b e(\xi)\,d\xi} = \frac{\int_a^b e(\xi)\,\xi\,d\xi}{\int_a^b e(\xi)\,d\xi}.$$

Or, quand $f(t)$ et $e(t)$ sont finies en (a, b) on a d'après Dirichlet

$$\int_a^b f(t)\int_t^b e(\xi)\,d\xi\,dt = \int_a^b e(\xi)\int_a^\xi f(t)\,dt\,d\xi.$$

Si donc enfin on écrit $\int_a^\xi f(t)\,dt = \psi_1(\xi)$, (donc $f(\xi) = \psi'_1(\xi)$),

où ψ_1 sera — nous le rappelons — une fonction concave en (a, b), on trouve en introduisant dans (14)

$$\int_a^b e(\xi)\,\psi_1(\xi)\,d\xi < \int_a^b e(\xi)\,d\xi \,.\, \psi_1\left\{\frac{\int_a^b e(\xi)\,\xi\,d\xi}{\int_a^b e(\xi)\,d\xi}\right\}. \tag{15}$$

C'est bien la forme de l'inégalité (2)' au cas de concavité. La fonction ψ_1 est pourtant soumise à la restriction $\psi_1(a) = 0$. Or, en ajoutant à chaque membre de (15) la quantité $\int_a^b e(\xi)\,k\,d\xi$, k étant une constante quelconque, on voit que (15) reste encore valable pour la fonction concave $\psi_1(\xi) + k$. Prenons $k = \psi(a)$ et $f(\xi) = \psi'(\xi)$, alors cette fonction $\psi_1(\xi) + k$ devient égale à

$$\int_a^\xi \psi'(t)\,dt + \psi(a) = \psi(\xi) \tag{16}$$

et *l'inégalité (15) sera donc valable tout généralement pour une fonction concave quelconque $\psi(\xi)$ qui se laisse exprimer par (16)*, et dont la dérivée $\psi'(\xi)$ est finie en (a, b), ainsi que $e(\xi)$. Nous avons ainsi retrouvé l'inégalité (2)' de Jensen pour le cas de concavité. Pour avoir le cas de convexité on n'a qu'à prendre

$$\varphi_1 = \frac{\int_a^t e_1(\xi)\,d\xi}{\int_a^b e_1(\xi)\,d\xi}.$$

e_1 étant une nouvelle fonction positive. En introduisant cette fonction φ_1 dans la première partie de (1) on voit tout de suite, en procédant précisement comme au cas de concavité, que l'on est ramené à (2)' pour le cas de convexité.

Après avoir ainsi montré cette parenthé entre les inégalités (1) de M. Steffensen et (2)' de M. Jensen, nous allons nous occuper de quelques exemples d'application de (2) ou (2)'.[1]

Etant donné une intégrale $\int_a^b e(t)\alpha(t)\,dt$, où $e(t)$ est une fonction positive, ou bien $\sum_a^b e_t\alpha_t$, l'on peut évidemment s'arranger de différentes manières pour trouver une limite de cette expression à l'aide des inégalités (2).

Remarquons par exemple que l'on peut toujours pour $\alpha(t)$ écrire $\psi(\psi^{-1}(\alpha(t)))$ ou bien $\psi^{-1}(\psi(\alpha(t)))$, lorsque ψ et ψ^{-1} sont deux fonctions inverses, que l'on sache choisir telles que ψ ou ψ^{-1} soit concave ou convexe. Ce choix de ψ ou ψ^{-1} dépendra évidemment des circonstances particulières en chaque cas spécial. Comme les inégalités (2) tendent vers une égalité lorsque ψ s'approche à une droite, on tâchera de choisir pour ψ une fonction dont la courbure sera aussi petite que possible dans l'intervalle considéré. Mais aussi il faut avoir soin que la valeur de $\sum e_t\psi^{-1}(\alpha_t)$, ou bien de l'intégrale corréspondante, soit ou bien connue d'avance ou bien plus facile à calculer que la somme dont en est parti. Il faut également supposer que $\sum e_t$ soit connue ou facile à calculer; c'est en vérité à ces deux sommes, ou intégrales, que l'on est conduit par l'emploi de l'inégalité (2).

On pourrait aussi par exemple essayer d'écrire directement

$$e(t)\alpha(t) = \frac{e(t)\alpha(t)}{\psi(t)}\cdot\psi(t) = C(t)\,.\,\psi(t)$$

si l'on peut trouver une fonction $\psi(t)$ qui satisfait aux dites conditions, en même temps que $C(t)$ devient positive et que

[1] Nous ne nous occuperons pas ici des autres inégalités ecrites mais j'espère trouver une occasion de revenir sur ce sujet plus tard.

$\sum C_t$ et $\sum C_t t$ ou bien les intégrales correspondantes, soient faciles à calculer ou connues d'avance.

De ces deux manières examinons un exemple. Cherchons une valeur approximative, une limite inférieure ou supérieure, d'une rente viagère $a_x^1 = \sum v_1^t \frac{l_{x+t}}{l_x}$ pour un taux de la rente de i_1 %, lorsque l'on connait déja cette même rente viagère pour un taux de la rente de i %, $\therefore a_x = \sum v^t \frac{l_{x+t}}{l_x}$.

Prenons d'abord les deux fonctions inverses $\psi_t = t^{1+\varepsilon}$ et $\psi_t^{-1} = t^{\frac{1}{1+\varepsilon}}$, ou inversement. Alors on a par exemple $\psi(v^t) = v^{(1+\varepsilon)t} = v_1^t$ quand on met $v_1 = v^{1+\varepsilon}$, c'est-à-dire, $1 + \varepsilon = \frac{\log v_1}{\log v} = \frac{\delta_1}{\delta}$. Si i_1 n'est pas très différent de i, le rapport $\frac{\delta_1}{\delta}$ ne diffère que très peu de l'unité, ε sera petite, la courbure de ψ et de ψ^{-1} sera petite, comme elles s'approchent à la droite $\psi(t) = t$. On peut donc s'attendre à un résultat satisfaisant en calculant a_1 à l'aide de (2) Cette inégalité donne tout de suite, pour $i_1 > i$,

$$a_x^1 > \sum_1^\infty \frac{l_{x+t}}{l_x} \cdot \left(\frac{\sum_1^\infty v^t \frac{l_{x+t}}{l_x}}{\sum_1^\infty \frac{l_{x+t}}{l_x}} \right)^{\frac{\delta_1}{\delta}},$$

et nous retombons bien à $\sum v^t \frac{l_{x+t}}{l_x} = a_x$, et à $\sum \frac{l_{x+t}}{l_x} = e_x$. On a donc *pour* $i_1 > i$

$$\frac{a_x^1}{e_x} > \left(\frac{a_x}{e_x}\right)^{\frac{\delta_1}{\delta}} \tag{17}$$

pour $i_1 < i$ *le signe inverse.* En écrivant

$$a_x^1 = e_x \left(\frac{a_x}{e_x}\right)^{\frac{\delta_1}{\delta}} \tag{18}$$

ou si l'on veut

$$\left(\frac{a_x^1}{e_x}\right)^{\delta} = \left(\frac{a_x}{e_x}\right)^{\delta_1} \tag{19}$$

l'erreur ne sera pas très grande, comme on le voit sur le tableau suivant, Tab. I, où l'on a calculé quelques valeurs de a_x^1 en supposant connues les valeurs de a_x pour 4 %. Le résultat parait satisfaisant, vue la grande simplicité de la formule employée, qui ne nécessite point la connaissance des commutations ordinaires $D_x, N_x, \ldots$

Tab. I. — Formule (18).

a_x^1 Text-Book *HM*								
x	3 %	Δ	3 ½ %	Δ	4 ½ %	Δ	5 %	Δ
20	22,73	− 0,66	20,58	− 0,34	16,91	0,37	15,34	0,73
40	17,44	− 0,26	16,28	− 0,18	14,11	0,15	13,16	0,31
60	10,28	− 0,06	9,85	− 0,03	9,06	0,04	8,69	0,08

On pourrait probablement améliorer ce résultat en ajoutant à la valeur trouvée de a_x^1 un terme de correction en suivant la voie indiquée par M. Steffensen. Nous ne poursuiverons pas ce but; notre intention n'étant que de montrer avec quelle facilité on peut trouver des différentes formules d'approximation par un emploi *direct* des formules (2).

Reprenons ce même exemple en transformant la quantité sous le signe $\sum$ $\left(\text{ou } \int\right)$ de la deuxième manière indiquée plus haut. Cherchons à trouver non le rapport entre a_x^1 et e_x, (voir (19)), mais — ce qui sera plus naturel — entre $a^1{}_x$ et a_x. Comme e_x est la valeur de a_x^1 quand le taux de la rente est de 0 %, c'est-à-dire que le taux de la rente est de i_1 % plus petite que dans a_x^1, tandis que a_x correspond à une différence dans le taux de la rente de $h = (i_1 - i)$ % seulement, on devinerait

d'avance que nous devons trouver une meilleure approximation en comparant a_x^1 avec a_x au lieu de e_x, comme tout à l'heure. Ecrivons pour cela $v_1^t \frac{l_{x+t}}{l_x}$ dans la forme $v_1^t (1 + h v)^t (1 + h v)^{-t} \frac{l_{x+t}}{l_x} = v^t \frac{l_{x+t}}{l_x} \cdot (1 + h v)^{-t}$. Et, en écrivant

$$a_x^1 = \sum_1^{\infty} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x} (1 + h v)^{-t} \tag{20}$$

on n'a qu'à prendre $v^t \frac{l_{x+t}}{l_x}$ comme la fonction $C(t)$ et $(1 + hv)^{-t}$ comme $\psi(t)$ pour appliquer la formule (2)'. C'est précisement cette même forme pour a_x^1 que M. STEFFENSEN prend comme point de depart quand il cherche une valeur approximative de a_x^1 à l'aide de l'inégalité (1). Pour (1) h doit être positive; tandis que pour (2), on le voit, h peut être et positive et negative. Ce produit $C(t)\psi(t)$ satisfait pour $h > 0$ en même temps aux conditions exigées pour les inégalités (1) et (2)'. Cela peut évidemment arriver aussi en d'autres exemples analogues et l'on pourra dans ces cas appliquer l'une ou l'autre de ces deux inégalités.

Dans le cas présent, (2)' nous donne

$$a_x^1 > a_x (1 + h v)^{-\frac{\sum_1^{\infty} t D_{x+t}}{\sum_1^{\infty} D_{x+t}}}$$ [1]

c'est-à-dire

$$a_x^1 > a_x \lambda^{-\frac{S_x}{N_x}}, \qquad (\lambda = 1 + h v) \tag{21}$$

[1] Dans tout ce qui suit nous fairons usage de la notation adoptée pour les valeurs de N_x en Text-Book: $N_x = \sum_1^{\infty} D_{x+t}$ enfin de nous servir directement de ces valeurs dans les exemples numériques. Les formules que nous trouvons se laisseront tout de suite transformer lorsque l'on désire employer la notation qui est maintenant plus ordinaire, à savoir $N_x = \sum_0^{\infty} D_{x+t}$.

tandis que l'on déduit de (1)

$$a_x^1 < \sum_{1}^{a_x} \lambda^{-t}$$

qui est valable pour $\lambda > 1$.[1]

La formule approximative

$$a_x^1 = a_x \lambda^{-\frac{S_x}{N_x}} \tag{21)'$$

donne des valeurs très satisfaisantes, comme on le voit au tableau si dessous (Tab. II) où l'on a calculé a_x^1 pour 3 % et 4 % supposant connue la valeur de a_x pour 3 ½ %.

Tab. II. — Formule (21)'.

a_x^1. — Text-Book *HM*					
x	3 %	Δ	4 %	Δ	x
20	22,06	0,04	18,63	0,03	20
30	19,86	0,04	17,13	0,03	30
40	17,16	0,02	15,12	0.02	40
50	13,87	0,01	12,51	0,01	50
60	10,22	0,00	9,45	0,00	60
70	6,65	0,00	6,29	0,00	70
80	3,70	0,00	3.57	0,00	80

[1] Les valeurs numériques de cette inégalités, prise comme égalité, donnerait a_x^1 un peu moins exactement que l'inégalité (21). Ainsi pour $x = 20$ on trouve la valeur 19,24 pour a_x^1 en augmentant le taux de la rente de 3,5 % à 4 % ($h = 0{,}005$) — quand la valeur exacte est 18,66. L'erreur est donc $\Delta = -0{,}58$ tandis que l'autre inégalité (21) donne la valeur 18.63 avec l'erreur $\Delta = +0{,}03$. Pourtant, après une trantformation à laquelle nous avons fait allusion plus haut M. Steffensen, construit de cette inégalité une formule d'approximation d'une grande précision.

La plus part des formules ordinaires d'assurance sur la vie pouvant s'exprimer très simplement à l'aide de $\mathfrak{a}_{x\,\overline{n}|}$ il serait utile de construire des formules d'approximation $\mathfrak{a}^{1}_{x\,\overline{n}|}$ de cette quantité pour un changement de h % dans le taux de la rente. De (2)' nous trouvons comme plus haut

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{a}^{1}_{x\,\overline{n}|} > \mathfrak{a}_{x\,\overline{n}|}\,\lambda^{-k} \\ \text{où} \\ k = \dfrac{\sum\limits_{0}^{n} t\, D_{x+t}}{\sum\limits_{0}^{n} D_{x+t}} = \dfrac{S_x - S_{x+n} - n\, N_{x+n-1}}{N_{x-1} - N_{x+n-1}}. \end{array}\right\} \qquad (22)$$

Pour $n = 20$ les tableaux III et IV montrent pour quelques ages, respectivement les valeurs exactes de $\mathfrak{a}_{x\,\overline{n}|}$ pour 3 % et 4 % et celles calculées par la formule

$$\mathfrak{a}^{1}_{x\,\overline{n}|} = \mathfrak{a}_{x\,\overline{n}|}\,\lambda^{-k} \qquad (23)$$

supposant connue la valeur exacte pour $3\,^{1}/_{2}$ %.

Tab. III.

$\frac{N_{(x+1)} - N_{(x+1)+20}}{D_x}$; Text-Book $H M$			
x	3 %	4 %	x
20	14,444	13,354	20
40	13,732	12,725	40
60	10,604	9,953	60

Tab. IV. Formule (23).

$a^1_{x\,\overline{20}|}$. — Text-Book *H M*					
x	3 %	Δ	4 %	Δ	x
20	14,439	0,005	13,351	0,003	20
40	13,727	0,005	12,722	0,003	40
60	10,601	0,003	9,951	0,002	60

Pour la rente viagère, différée de m ans, temporaire de n ans ${}_{m|}a_{x\,\overline{n}|}$ la valeur de k sera également

$$\frac{\sum_{m}^{n-m} t\, D_{x+t}}{\sum_{m}^{n-m} D_{x+t}} = \frac{m\,(N_{x+m-1} \div N_{x+m+n-1}) + S_{x+m} - S_{x+m+n} - n\,N_{x+m+n-1}}{N_{x+m-1} - N_{x+m+n-1}}.$$

Si l'on veut on peut encore écrire le numérateur

$$(m-1)\,(N_{x+m-1} - N_{x+m+n-1}) + S_{x+m-1} - S_{x+m+n-1} - \\ - n\,N_{x+m+n-1}.$$

Il est évident que l'on peut encore déduire directement les commutations $N^1_x, M^1_x, \ldots$ de la même façon. On a par exemple

$$N^1_x = \sum_1^\infty D^1_{x+t} = \sum_1^\infty (1 + h\,v)^{-t}\, D_{x+t}$$

et l'on trouve de $(2)'$

$$N'_x > N_x\,\lambda^{-(x+1) - \frac{S_{x+1}}{N_x}}$$

o:

$$N^1_x > N_x\,\lambda^{-x - \frac{S_x}{N_x}} \tag{24}$$

ce que l'on aurait évidemment pu déduire directement de $(21)'$ en remarquant que $\frac{v^x}{v^x_1} = \lambda^x$.

En toutes ces formules on peut très bien développer $\lambda^{-k} = (1 + h\,v)^{-k}$ en serie procédant suivant les puissances de $h\,v$. En s'arrêtant au deuxième terme on trouve sensiblement les mêmes valeurs que par un calcul exact de λ^{-k} à l'aide de logarithmes.

Ainsi la formule (21), nous donne la formule connue, un peu moins exacte[1]

$$a_x^1 = a_x - h\,v\,\frac{S_x}{D_x}$$

tandis que (24) devient

$$N_x^1 = (1 - h\,v\,x)\,N_x - h\,v\,S_x .$$

On trouverait précisement de la même façon

$$M_x^1 > M_x\,\lambda^{-\left(x+1+\frac{R_x}{M_x}\right)} \qquad (25)$$

ou en développant,

$$M_x^1 = (1 - h\,v\,(x+1))\,M_x - h\,v\,R_x \qquad (25)'$$

. . . .

et ainsi de suite.

Remarquons que toutes les formules dont il a été question ici, gardent la même forme au cas de plusieures têtes.

En somme, ces quelques exemples que nous avons traité pour le cas d'une variation dans le taux de la rente sufissent pour nous montrer avec quelle facilité et avec quel avantage on peut se servir des inégalités de M. Jensen dans les calculs d'assurance sur la vie. Il sera possible de procèder d'une façon analogue au cas d'une variation de la mortalité; nous n'y insisterons pas.

Aussi ces inégalités de M. Jensen peuvent être très utiles quand il s'agit de reconnaitre la portée des approximations que souvent, nous jugeons avantageux à introduire dans des calculs divers, par exemple dans la théorie du risque.[2] Avec la remarquable inégalité de M. Steffensen ces inégalités (2) nous donnent un excellent remède pour nous passer de bien de calculs pénibles.

[1] Voir par exemple pag. 97 dans le mémoir déjà cité de M. Steffensen.

[2] Je m'en suis servi dans un mémoir »Sur la théorie du plein« présenté au congrès d'actuaires à Amsterdam 1912.

Zur Theorie der Stabilität statistischer Reihen.

Von

Al. A. Tschuprow.

Einleitung.

I.

Wie ist die auffallende Gesetzmässigkeit der auf Massenbeobachtungen beruhenden statistischen Zahlen zu erklären? Wie sind deren Schwankungen rationell zu deuten? Diese Fragen bilden den eigentlichen Kernpunkt jeder Theorie der Statistik, die mehr sein will, als ein buntes Nebeneinander von technischen Regeln über den Modus procedendi beim Sammeln und Ordnen der Massenbeobachtungen.

Das Verdienst, die Beantwortung dieser Fragen in richtige Bahnen gelenkt zu haben, gebührt den Vertretern der »stochastisch» orientierten Auffassung der statistischen Regelmässigkeiten, — um den trefflichen, von Prof. v. Bortkiewicz zu neuem Leben erweckten Bernoulli'schen Ausdruck zu gebrauchen.

Seitdem J. Bernoulli die grundlegenden Beziehungen zwischen den statistisch feststellbaren Häufigkeiten der Ereignisse und den ihnen zu Grunde liegenden mathematischen Wahrscheinlichkeiten aufgedeckt hat, sind zwei Jahrhunderte verflossen. Der geniale Gedanke fiel auf einen fruchtbaren Boden; er musste aber lange keimen, ehe er zu dem Grundpfeiler der wissenschaftlichen Weltbetrachtung wurde, als welchen wir ihn gegenwärtig je weiter, je mehr zu schätzen lernen. Er wurde zuerst von den Mathematikern aufgenom-

men. De Moivre und Laplace haben ihn innerhalb des ursprünglichen Bernoulli'schen Rahmens in grossartiger Weise ausgebaut. Poisson's »Recherches sur la probabilité des jugements» brachten einen neuen Zug in die Sache: man begann einzusehen, dass die Art des Zusammenhanges zwischen den Häufigkeiten und den ihnen zu Grunde liegenden Wahrscheinlichkeiten nicht immer die gleiche zu sein braucht. Diese folgenschwere Auffassung wurde von Cournot aufgenommen und namentlich von Bienaymé in einer, auch für die Nachwelt vorbildlichen, Weise ausgebaut. Ihre Tragweite wurde jedoch zunächst nicht erfasst. Verfolgt man z. B. den, in die 70-er Jahre des XIX. Jahrhunderts hinüberschlagenden literarischen Kreuzzug gegen die sogenannten »Queteletisten», deren Übertreibungen an der Hand des Poisson'schen Gedankenganges spielend leicht abzuweisen waren, so trifft man die richtige Nutzanwendung desselben bloss in einem Aufsatz von Cornwall Lewis in der Edinburgh Review für 1858. Sonst treten Forscher, wie G. Schmoller, — ja sogar wie G. Rümelin — mit Argumenten auf, die wohl für ihren edlen Sinn, keineswegs aber für ihr Sachverständnis ein Zeugnis ablegen. Am erstaunlichsten ist, dass Bienaymé, der für die Sache in abstracto das beste Verständnis aufweist, den konkreten statistischen Aufgaben ganz hilflos gegenübersteht: so hat er z. B. geglaubt, dass die Stabilität mancher Zahlen der Justizstatistik viel höher sei, als die des Geschlechtsverhältnisses der Geborenen!

Die Brücke zwischen den Konstruktionen der Mathematiker und den Aufgaben der Statistiker geschlagen zu haben, ist das Verdienst des französischen Versicherungsmathematikers Dormoy, einerseits, und W. Lexis', der fast gleichzeitig dieselben Wege eingeschlagen hat, andererseits. Dormoy hat die unbestrittene zeitliche Priorität. Da jedoch die betreffenden Gedanken erst durch Lexis systematisch entwickelt und der Wissenschaft zugeführt worden sind,[1] so ist es kein allzu grosses historisches Unrecht, wenn man gegenwärtig

[1] Soweit mir bekannt, hat Niemand, ausser J. Bertrand, den Grundgedanken von Dormoy unabhängig von Lexis unmittelbar den Schriften von Dormoy entnommen. Bezeichnend ist, dass in einer ausführlichen Besprechung des Werkes von Dormoy im Archivio di Statistica für 1878 die »théorie des écarts», laquale è un seguito del calcolo di probabilità», zwar erwähnt, aber ihre Bedeutung für die Statistik gar nicht erfasst wird.

von der LEXIS'schen Dispersionstheorie — anstatt, was richtiger wäre, von der DORMOY-LEXIS'schen — zu sprechen pflegt.

Auf der von LEXIS geschaffenen Grundlage wurde dann weiter gebaut. Namentlich hat sich Prof. v. BORTKIEWICZ um die Ausführung des von LEXIS begonnenen Baus verdient gemacht: die »LEXIS'sche» Dispersionstheorie hat ihm wesentliche Verfeinerungen des mathematischen Apparates, sowie wichtige Verallgemeinerungen der Problemstellung, zu verdanken.

Das imponierende Gebäude, welches sich jetzt dem Blicke eines verständnisvollen Zuschauers offenbart, weist jedoch deutliche Spuren des allmählichen Entstehens auf. Je nach der Laune der aufeinanderfolgenden Bauherren wurden Zu- und Umbauten vorgenommen. Ein einheitlicher architektonischer Plan war nicht vorhanden, für eine in sich geschlossene Fassade ist nicht gesorgt worden. Da greift nun wiederum die mathematische Wahrscheinlichkeitsrechnung hilfreich ein: den Arbeiten von A. A. MARKOFF, sowie der schönen Abhandlung, welche Prof. G. BOHLMANN dem internationalen Mathematikerkongress in Rom vorgelegt hat, lässt sich der Grundriss zu einem Einheitsbau entlehnen.

Diese Errungenschaften der rein mathematischen Forschung für den Ausbau der statistischen Dispersionstheorie zu verwerten, ist die Hauptaufgabe der ersten unter den nachfolgenden Abhandlungen. In der dritten Abhandlung wird der grundlegende Gedanke der LEXIS'schen Theorie der übernormalen Dispersion in einer verallgemeinerten Fassung aufgenommen und der Versuch gemacht, einen engeren Kontakt zwischen der LEXIS'schen und der PEARSON'schen Richtungen in der mathematischen Statistik anzubahnen. Was die zweite Abhandlung anbelangt, so werden darin wichtige Spezialprobleme der Theorie des Divergenzkoeffizienten behandelt, deren Lösung bisher ausgeblieben ist oder in einer Form vorliegt, welche strengeren Ansprüchen in bezug auf die mathematische Beweiskraft nicht voll Genüge leistet. Die konsequente Anwendung der von TCHEBYCHEFF und dessen Schule mit Vorliebe gepflegten Methode der mathematischen Erwartungen gestattet hierbei, die mathematische Beweisführung durchweg in elementare Formen zu kleiden, ohne

die erforderliche Schärfe der mathematischen Argumentation einbüssen zu müssen.

II.

Wenn eine Grösse x s verschiedene Werte — $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_s$ — annehmen kann, wobei dem Werte ξ_1 die Wahrscheinlichkeit p_1, dem Werte ξ_2 die Wahrscheinlichkeit p_2 u. s. w. zukommt und $p_1 + p_2 + \cdots + p_s = 1$ ist, so nenne ich die Gesamtheit der Werte $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_s$ und der ihnen zugeordneten Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots p_s$ »das Gesetz der Verteilung der Werte der zufälligen Variablen x« oder kürzer »das Verteilungsgesetz von x«. Die mathematische Erwartung wird im Folgenden mit Ex, bezw. mit $E\{x\}$, bezeichnet, so dass

$$Ex = E\{x\} = p_1\xi_1 + p_2\xi_2 + \cdots + p_s\xi_s.$$

Ich nenne die zufällige Variable y unabhängig von x, wenn das Verteilungsgesetz von y das gleiche bleibt, ungeachtet dessen, welchen unter ihren möglichen Werten die Variable x annimmt.[1] Es lässt sich nachweisen, dass, wenn y von x unabhängig ist, x gleichfalls von y unabhängig sein muss.

Sind die Variablen nicht unabhängig, so bezeichne ich mit $E^{(h)}y$ die »bedingte mathematische Erwartung« von y unter der Voraussetzung, dass x den Wert ξ_h angenommen hat. Man hat demnach offenbar:

$$Ey = \sum_{h=1}^{s} p_h E^{(h)} y.$$

Die mathematische Erwartung der Summe zweier (bezw. mehrerer) zufälligen Variablen ist bekanntlich der Summe der

[1] Diese Definition weicht nicht unwesentlich von der üblichen ab, die sich damit begnügt, zu fordern, dass Ey gleich gross bleibe ungeachtet, welchen Wert x annimmt. Um der obigen Definition zu genügen, muss der Wert von Ey^r für $r = 1, 2, 3 \ldots \infty$ die gleiche Grösse behalten bei allen Werten von x. Zwei Variablen können mithin unabhängig im üblichen Sinne und doch gegenseitig abhängig im obigen Sinne sein. Auf Gründe einzugehen, welche mich veranlassen, die strengere Definition vorzuziehen, würde mich zu weit vom eigentlichen Thema dieser Abhandlungen führen.

mathematischen Erwartungen der einzelnen Variablen gleich sowohl in dem Falle, wenn die Variablen gegenseitig unabhängig sind, wie auch in demjenigen, wenn zwischen ihnen beliebige Abhängigkeitsverhältnisse bestehen:

$$E\{x_1 + x_2 + \cdots + x_n\}$$

ist stets der Summe $Ex_1 + Ex_2 + \cdots + Ex_n$ gleich.

Sind die einzelnen Variablen gegenseitig unabhängig, so hat man gleichfalls

$$Ex_1 x_2 = Ex_1\, Ex_2 = \left[\sum_{h=1}^{s'} p'_h \xi'_h\right] \cdot \left[\sum_{h=1}^{s''} p''_h \xi''_h\right]$$

$$Ex_1 x_2 \ldots x_n = Ex_1\, Ex_2 \ldots Ex_n\,.$$

Sind hingegen die Variablen x_1 und x_2 gegenseitig abhängig, so bestehen diese Beziehungen nicht mehr. An ihrer Stelle hat man:

$$Ex_1 x_2 = \sum_{h=1}^{s'} p'_h \xi'_h E^{(h)} x_2\,.$$

ERSTE ABHANDLUNG.

Über den mittleren Fehler des Durchschnittes von gegenseitig nicht unabhängigen Grössen.

Erstes Kapitel.

I.

An n zufälligen Variablen — $x_1, x_2, \ldots x_n$ — werden n Versuche vorgenommen, — je ein Versuch an jeder derselben. Die Variablen mögen beliebigen Verteilungsgesetzen folgen und unter einander in beliebigen Abhängigkeitsbeziehungen

stehen, — stets hat man,[1] falls durch x'_h der Wert bezeichnet wird, welchen die Variable x_h bei dem betreffenden Versuch annimmt:

$$E(x'_1 + x'_2 + \cdots + x'_n) = E x_1 + E x_2 + \cdots + E x_n;$$

$$E[(x'_1 + x'_2 + \cdots + x'_n) - (E x_1 + E x_2 + \cdots + E x_n)]^2 =$$

$$= E\left[\sum_{h=1}^{n} x'_h\right]^2 - \left[\sum_{h=1}^{n} E x_h\right]^2 = \sum_{h=1}^{n} E[x'^2_h - (E x_h)^2] +$$

$$+ \sum_{h_1=1}^{n} \sum_{h_2 \neq h_1} [E x'_{h_1} x'_{h_2} - (E x_{h_1}) . (E x_{h_2})]$$

oder

$$E \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{n} x'_h = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{n} E x_h;$$

$$E\left[\frac{1}{n} \sum_{h=1}^{n} x'_h - \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{n} E x_h\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{h=1}^{n} E[x'^2_h - (E x_h)^2] + \frac{1}{n^2} \sum_{h_1=1}^{n} \sum_{h_2 \neq h_1} [E x'_{h_1} x'_{h_2} - (E x_{h_1})(E x_{h_2})] =$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{h=1}^{n} E[x'^2_h - (E x_h)^2] + \frac{2}{n^2} \sum_{h_1=1}^{n-1} \sum_{h_2=h_1+1}^{n} [E x'_{h_1} x'_{h_2} - (E x_{h_1})(E x_{h_2})] =$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{h=1}^{n} E[x'^2_h - (E x_h)^2] +$$

$$+ \frac{2}{n^2} \sum_{h=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-h} [E x'_h x'_{h+j} - (E x_h)(E x_{h+j})].$$

[1] Vgl. A. A. Markoff, Erweiterung des Gesetzes der grossen Zahlen auf von einander abhängige Grössen, Kazan, 1907 (Mitt. d. Phys. Math. Ges.; russisch). Markoff bezeichnet die Differenz $x_i - E x_i$ mit z_i und betrachtet die Summe:

$$E z_1^2 + E z_2^2 + \cdots + E z_n^2 + 2 E z_1 z_2 + 2 E z_1 z_3 + \cdots + 2 E z_{n-1} z_n.$$

Für die Zwecke der nachfolgenden Untersuchung eignet sich besser die oben im Text gewählte Form.

Führt man die Bezeichnungen ein:

$$E x_h = m_1^{(h)};$$

$$E x_h^2 = m_2^{(h)};$$

$$E[x_h - m_1^{(h)}]^2 = m_2^{(h)} - [m_1^{(h)}]^2 = \mu_2^{(h)};$$

$$\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n} m_1^{(h)} = m_{[1,n]};$$

$$\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n} x'_h = x_{(n)},$$

so gehen die obigen Beziehungen in

$$(1) \qquad E x_{(n)} = m_{[1,n]};$$

$$(2) \qquad E[x_{(n)} - m_{[1,n]}]^2 =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{h=1}^{n} \mu_2^{(h)} + \frac{1}{n^2}\sum_{h_1=1}^{n}\sum_{h_2 \neq h_1} [E x'_{h_1} x'_{h_2} - m_1^{(h_1)} m_1^{(h_2)}] =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{h=1}^{n} \mu_2^{(h)} + \frac{2}{n^2}\sum_{h_1=1}^{n-1}\sum_{h_2=h_1+1}^{n} [E x'_{h_1} x'_{h_2} - m_1^{(h_1)} m_1^{(h_2)}] =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{h=1}^{n} \mu_2^{(h)} + \frac{2}{n^2}\sum_{h=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-h} [E x'_h x'_{h+j} - m_1^{(h)} m_1^{(h+j)}]$$

über.

Man hat ferner:

$$(3) \qquad E x_{(n)}^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{h=1}^{n} m_2^{(h)} + \frac{1}{n^2}\sum_{h_1=1}^{n}\sum_{h_2 \neq h_1} E x'_{h_1} x'_{h_2} =$$

$$= \left[\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n} m_1^{(h)}\right]^2 + \frac{1}{n^2}\sum_{h=1}^{n} \mu_2^{(h)} +$$

$$+ \frac{1}{n^2}\sum_{h_1=1}^{n}\sum_{h_2 \neq h_1} [E x'_{h_1} x'_{h_2} - m_1^{(h_1)} m_1^{(h_2)}],$$

$$(4)\quad E\sum_{h=1}^{n}[x'_h - x_{(n)}]^2 = E\left[\sum_{h=1}^{n} x'^2_h - n\,x^2_{(n)}\right] =$$

$$= \frac{n-1}{n}\sum_{h=1}^{n} m_2^{(h)} - \frac{1}{n}\sum_{h_1=1}^{n}\sum_{h_2}\sum_{h_1} E\,x'_{h_1}x'_{h_2} =$$

$$= \sum_{h=1}^{n}[m_1^{(h)} - m_{[1,n]}]^2 + \frac{n-1}{n}\sum_{h=1}^{n}\mu_2^{(h)} -$$

$$- \frac{1}{n}\sum_{h_1=1}^{n}\sum_{h_2}\sum_{h_2}[E\,x'_{h_1}x'_{h_2} - m_1^{(h_1)}m_1^{(h_2)}].$$

In dem Falle, wenn das Verteilungsgesetz für alle n Variablen ein und dasselbe ist, so dass $m_1^{(h)} = m_1$, $m_2^{(h)} = m_2$, $\mu_2^{(h)} = \mu_2$ gesetzt werden kann, erhält man:

$$E\,x_{(n)} = m_1;$$

$$(5)\quad E[x_{(n)} - m_1]^2 = \frac{1}{n}\mu_2 + \frac{1}{n^2}\sum_{h_1=1}^{n}\sum_{h_2}\sum_{h_1}[E\,x'_{h_1}x'_{h_2} - m_1^2];$$

$$(6)\quad E\,x^2_{(n)} = \frac{1}{n}m_2 + \frac{1}{n^2}\sum_{h_1=1}^{n}\sum_{h_2}\sum_{h_1}E\,x'_{h_1}x'_{h_2} =$$

$$= m_1^2 + \frac{1}{n}\mu_2 + \frac{1}{n^2}\sum_{h_1=1}^{n}\sum_{h_2}\sum_{h_1}[E\,x'_{h_1}x'_{h_2} - m_1^{(h_1)}m_1^{(h_2)}];$$

$$(7)\quad E\sum_{h=1}^{n}[x'_h - x_{(n)}]^2 = (n-1)m_2 - \frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}\sum_{h_2}\sum_{h_1}E\,x'_{h_1}x'_{h_2} =$$

$$= (n-1)\mu_2 - \frac{1}{n}\sum_{h_1=1}^{n}\sum_{h_2}\sum_{k_1}[E\,x'_{h_1}x'_{h_2} - m_1^2].$$

II.

Sind alle n Variablen unabhängig von einander, so hat man für beliebige Werte von h_1 und h_2:

$$E x'_{h_1} x'_{h_2} = (E x_{h_1})(E x_{h_2}) = m_1^{(h_1)} m_1^{(h_2)}$$

und demnach

$$E\,[x_{(n)} - m_{[1,n]}]^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{h=1}^{n} \mu_2^{(h)}.$$

Der mittlere Fehler von $x_{(n)}$ strebt somit mit wachsendem n dem Grenzwerte 0 zu, falls $\frac{1}{n} \sum_{h=1}^{n} \mu_2^{(h)}$ bei beliebig grossem n endlich bleibt, d. h. der Durchschnitt der durch den Versuch festgestellten empirischen Werte der Variablen wiederspiegelt mit um so geringeren zufälligen Schwankungen die Grösse des Durchschnittes ihrer mathematischen Erwartungen, je grösser die Zahl der Beobachtungen ist. Durch die Vermehrung der Zahl der Beobachtungen lässt sich unter diesen Verhältnissen der Spielraum der zufälligen Schwankungen beliebig reduzieren und die Präzision der Bestimmung des Wertes von $m_{[1,n]}$ durch den Versuch nach Wunsch steigern.

Wenn die einzelnen Variablen so zusammenhängen, dass für beliebige Werte von h_1 und h_2

$$E x'_{h_1} x'_{h_2} < m_1^{(h_1)} m_1^{(h_2)}$$

ist, so ist

$$E[x_{(n)} - m_{[1,n]}]^2 < \frac{1}{n^2} \sum_{h=1}^{n} \mu_2^{(h)}.$$

Der mittlere Fehler von $x_{(n)}$ fällt also in diesem Falle geringer aus, als er sich stellen würde bei gegenseitiger Unabhängigkeit der Variablen unter der Voraussetzung derselben Verteilungsgesetze. Mit wachsendem n nähert er sich unter diesen Verhältnissen gleichfalls dem Grenzwerte 0, wenn $\mu_2^{(h)}$ eine endliche obere Grenze nicht überschreitet.

Hat man hingegen, bei beliebigen Werten von h_1 und h_2,

$$E x'_{h_1} x'_{h_2} > m_1^{(h_1)} m_1^{(h_2)},$$

so ist

$$E[x_{(n)} - m_{[1,n]}]^2 > \frac{1}{n^2} \sum_{h=1}^{n} \mu_2^{(h)}.$$

Der mittlere Fehler von $x_{(n)}$ ist mithin grösser, als im Falle der gegenseitigen Unabhängigkeit der Variablen unter der Voraussetzung derselben Verteilungsgesetze. Wenn hierbei die Differenz $Ex'_{h_1}x'_{h_2} - m_1^{(h_1)}m_1^{(h_2)}$ nie unter eine, noch so kleine, positive Grösse δ^2 heruntergeht, so strebt der mittlere Fehler von $x_{(n)}$ bei wachsendem n einem von 0 verschiedenen Grenzwerte zu, der grösser, als δ^2, ist. Durch die Vermehrung der Zahl der Beobachtungen lässt sich in diesem Falle die Präzision des Durchschnittes nicht ad infinitum steigern: das Gesetz der grossen Zahlen findet unter solchen Verhältnissen keine Anwendung.

Wenn einige der Differenzen $Ex'_{h_1}x'_{h_2} - m_1^{(h_1)}m_1^{(h_2)}$ positiv und andere negativ sind, so kann die Summe

$$\sum_{h_1=1}^{n-1}\sum_{h_2=h_1+1}^{n}[Ex'_{h_1}x'_{h_2} - m_1^{(h_1)}m_1^{(h_2)}]$$

sowohl >0, wie auch <0 sein; gelegentlich kann sie auch genau gleich 0 sein. Der mittlere Fehler von $x_{(n)}$ kann also unter solchen Umständen sowohl grösser wie kleiner sein, als in dem Falle der gegenseitigen Unabhängigkeit aller Variablen, und es kann auch vorkommen, dass er genau so gross ist, wie wenn die Variablen von einander unabhängig wären.[1] Wenn also der mittlere Fehler eines Durchschnittes genau die Grösse hat, welche er unter der Voraussetzung der Unabhängigkeit der einzelnen Versuche haben sollte, so kann dies nicht ohne weiteres als sicherer Beweis dafür gelten, dass die Versuche tatsächlich in keiner gegenseitigen Abhängigkeit stehen: die Möglichkeit ist an und für sich nicht ausgeschlossen, dass hier eben die besondere Art der gegenseitigen Abhängigkeit vorliegt, welche

$$\sum_{h_1=1}^{n-1}\sum_{h_2=h_1+1}^{n}[Ex'_{h_1}x'_{h_2} - m_1^{(h_1)}m_1^{(h_2)}]$$

ergibt.

---

[1] Cf. A. A. Markoff, Über einen Fall von Versuchen, die eine komplizierte zusammenhängende Kette bilden. Bull. de l'Acad. d. sciences, Petersburg, 1911 (russisch).

Ein spezielles Interesse bietet der Fall, wo die Grösse der Differenz $Ex'_h x'_{h+j} - m_1^{(h)} m_1^{(h+j)}$ von h unabhängig ist und bloss von j abhängt, wo also

$$Ex'_h x'_{h+j} - m_1^{(h)} m_1^{(h+j)} = r_j$$

gesetzt werden kann. In diesem Falle hat man:

$$E[x_{(n)} - m_{[1,n]}]^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{h=1}^{n} \mu_2^{(h)} + \frac{2}{n^2} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) r_j .$$

Der mittlere Fehler von $x_{(n)}$ kann also bei $n = \infty$ nur dann gleich 0 werden, wenn zwischen r_j und j ein Zusammenhang der Art besteht, dass $\frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) r_j$ mit wachsendem n dem Grenzwerte 0 zustrebt. Dies ist z. B. der Fall, wenn r_j in geometrischer Progression abnimmt. Wird nämlich $r_{j+1} = \gamma r_j$ gesetzt, so erhält man:

$$\sum_{j=1}^{n-1} (n-j) r_j = r_1 \left[\frac{n}{1-\gamma} - \frac{1-\gamma^n}{(1-\gamma)^2} \right];$$

$$E[x_{(n)} - m_{[1,n]}]^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{h=1}^{n} \mu_2^{(h)} + \frac{2 r_1}{n} \left[\frac{1}{1-\gamma} - \frac{1}{n} \frac{1-\gamma^n}{(1-\gamma)^2} \right];$$

falls $\gamma < 1$ ist, verschwindet $\frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) r_j$ bei $n = \infty$.

Ein anderer lehrreicher Fall ist der, wo die Differenz $Ex'_h x'_{h+j} - m_1^{(h)} m_1^{(h+j)}$ gleich 0 wird, wenn j einen bestimmten Wert, l, übersteigt.[1] In diesem Falle hat man:

$$E[x_{(n)} - m_{[1,n]}]^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{h=1}^{n} \mu_2^{(h)} + \\ + \frac{2}{n^2} \sum_{h=1}^{n-1} \sum_{j=h+1}^{h+l} [Ex'_h x'_{h+j} - m_1^{(h)} m_1^{(h+j)}];$$

[1] Cf. A. A. Markoff, Über zusammenhängende Grössen, die keine echte Kette bilden. Bull. de l'Acad. des sciences, Petersburg, 1911 (russisch).

ist l von n unabhängig, so verschwindet der mittlere Fehler von $x_{(n)}$ bei $n = \infty$.[1]

III.

Man nehme nunmehr an, dass die zufälligen Variablen $x_1, x_2, \ldots x_n$ nur die Werte 1 und 0 annehmen können und dass sie mit einem Ereignis A in der Weise zusammenhängen, dass A eintritt, falls eine der Variablen den Wert 1 erhält, und ausbleibt, falls die Variable gleich 0 wird. Bezeichnet man mit H die Häufigkeit von A unter den n Versuchen, durch p_h und $q_h = 1 - p_h$ die Wahrscheinlichkeiten

---

[1] Auf die bedeutsame Frage nach den Bedingungen, unter welchen das Verteilungsgesetz von $x_{(n)}$ bei $n = \infty$ die LAPLACE-GAUSS'sche Form annimmt, will ich in diesem Zusammenhange nicht eingehen. Falls die einzelnen Variablen von einander unabhängig sind, lässt sich leicht nachweisen, dass dies der Fall ist, wenn

$$\frac{\left[\sum_{h=1}^{n} \mu_r^{(h)}\right]^2}{\left[\sum_{h=1}^{n} \mu_2^{(h)}\right]^r}$$

bei $r = 3, 4, 5, \ldots$ mit wachsendem n dem Grenzwerte 0 zustrebt, wobei $\mu_r^{(h)} = E\left[x_h - m_1^{(h)}\right]^r$ ist. Schwieriger gestaltet sich der zuerst von LJAPOUNOFF erbrachte Nachweis, dass unter der Voraussetzung der gegenseitigen Unabhängigkeit der Variablen die Bedingung genügt, dass

$$\frac{\left[\sum_{h=1}^{n} d^{(h)}\right]^2}{\left[\sum_{h=1}^{n} \mu_2^{(h)}\right]^{2+\delta}}$$

bei irgend einem, noch so kleinen, positiven Werte von δ mit wachsendem n dem Grenzwerte 0 zustrebe, wobei mit $d^{(h)}$ die mathematische Erwartung der $2+\delta$-ten Potenz der positiv genommenen Differenz $x_h - m_1^{(h)}$ bezeichnet wird (LJAPOUNOFF, C. R., Paris, Vol. 132, p. 814; ausführlich in Mém. Ac. des Sciences, St. Petersburg, Serie VIII, Vol. 12; vgl. auch die dritte russische Auflage der Wahrscheinlichkeitsrechnung von A. A. MARKOFF, wo der LJAPOUNOFF'sche Satz auf eine andere, jedoch gleichfalls sehr umständliche, Weise bewiesen wird).

der Werte 1 und 0 beim h-ten Versuch, durch p_0 den arithmetischen Durchschnitt der Werte p_h $\left(p_0 = \frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n} p_h\right)$ und durch $p_{h_1 h_2}$ die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens von A sowohl beim h_1-ten, wie beim h_2-ten Versuch, so erhält man aus der Formel (2):

$$(8) \quad E[H - p_0]^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{h=1}^{n} p_h q_h + \frac{1}{n^2}\sum_{h_1=1}^{n}\sum_{h_2 \gtrless h_2} (p_{h_1 h_2} - p_{h_1} p_{h_2}).$$

Dies ist die bekannte BOHLMANN'sche Formel,[1] welche als ein Spezialfall in der allgemeinen Formel (2) enthalten ist.

ZWEITES KAPITEL.

An s zufälligen Variablen, deren jede ihrem Verteilungsgesetze folgt, werden m Versuchsserien von je k Versuchen vorgenommen. Alle Versuche derselben Serie werden an einer und derselben Variablen vorgenommen, welche jeweilig durch das Los bestimmt wird; die Wahrscheinlichkeit, dass das Los die Variable x_h treffe, ist gleich p_h, wobei $p_1 + p_2 + + p_3 + \cdots + p_s = 1$ ist. Die Grössen p_h bleiben während des Verlaufs des Experimentes konstant und die einzelnen Versuche innerhalb jeder Serie sind von einander unabhängig.

Setzt man

$$mk = n;$$

$$\sum_{h=1}^{s} p_h E x_h = m_1;$$

$$\sum_{h=1}^{s} p_h E x_h^2 = m_2;$$

[1] Vgl. G. BOHLMANN, Die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung in ihrer Anwendung auf die Lebensversicherung, Satz XIII* (Atti del IV. Congresso internazionale dei matematici, vol. III, p. 262, Roma, 1909). BOHLMANN erhält die Formel direkt, aber auf ziemlich umständliche Weise vermittelst der erzeugenden Funktionen. Auf dem Umwege über die allgemeine Formel (2) lässt sie sich in einer durchaus elementaren und einfachen Weise ableiten.

$$Ex_h^2 - (Ex_h)^2 = \mu_2^{(h)};$$

$$\sum_{h=1}^{s} p_h[Ex_h - m_1]^2 = \sum_{h=1}^{s} p_h(Ex_h)^2 - \left[\sum_{h=1}^{s} p_h Ex_h\right]^2 = \alpha^2,$$

so hat man identisch:

$$m_1^2 = \sum_{h=1}^{s} p_h(Ex_h)^2 - \alpha^2;$$

$$m_2 - m_1^2 = \sum_{h=1}^{s} p_h \mu_2^{(h)} + \alpha^2.$$ [1]

Man überzeugt sich ferner leicht, dass bei beliebigem i

$$Ex_i = m_1;$$

$$Ex_i^2 = m_2$$

ist.

Bezeichnet man mit x'_{ij} den Wert, welchen die durch das Los für die i-te Serie bestimmte Variable beim j-ten Versuch der betreffenden Serie annimmt, und durch $x_{(n)}$ den arithmetischen Durchschnitt aller n empirischen Werte der Variablen, wobei also

$$x_{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} x'_{ij}$$

ist, so hat man:

$$Ex_{(n)} = m_1;$$

$Ex'_{ij}x'_{hl} - (Ex_{ij})(Ex_{hl}) = 0$, falls $h \neq i$ ist,

und

$$Ex'_{ij}x'_{il} - (Ex_{ij})(Ex_{il}) = \sum_{h=1}^{s} p_h(Ex_h)^2 - \left[\sum_{h=1}^{s} p_h Ex_h\right]^2 = \alpha^2,$$

[1] Vgl. Bortkiewicz, Über die Zeitfolge zufälliger Ereignisse, S. 98 (Bull. Inst. Int. Stat., t. XX, Livr. 2).

woraus sich nach Formel (2) ergiebt

$$(9)\quad E[x_{(n)}-m_1]^2=\frac{m_2-m_1^2}{mk}+\frac{k-1}{mk}\alpha^2=\frac{m_2-m_1^2+(k-1)\alpha^2}{n}=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{s}p_h\mu_2^{(h)}+\frac{1}{m}\alpha^2.$$

Sind nun die Grössen $\sum_{h=1}^{s}p_h\mu_2^{(h)}$ und α^2 endlich, so strebt der mittlere Fehler von $x_{(n)}$ mit wachsender Serienzahl, m, dem Grenzwerte 0 zu, ungeachtet, wie gross die Zahl k sein mag. Bei endlichem m hingegen und unbegrenzt wachsendem k strebt der mittlere Fehler von $x_{(n)}$ dem, von 0 verschiedenen, Grenzwerte $\sqrt{\frac{1}{m}\alpha^2}$ zu.

Falls die s Variablen nur Werte 1 und 0 annehmen können und die Wahrscheinlichkeit für x_h, den Wert 1 anzunehmen, gleich c_h ist, so findet man, indem man

$$m_1=\sum_{h=1}^{s}p_hc_h=c_0$$

setzt:

$$m_2=c_0;$$

$$\alpha^2=\sum_{h=1}^{s}p_h[c_h-c_0]^2;$$

$$E[x_{(n)}-c_0]^2=\frac{c_0(1-c_0)}{mk}+\frac{k-1}{mk}\sum_{h=1}^{s}p_h[c_h-c_0]^2.$$

Wir erhalten somit auf diese Weise die bekannte Bienaymé-Bortkiewicz'sche Formel,[1] als einen Spezialfall der allgemeinen Formel (9).

Im Falle, wenn die Versuchszahl für die einzelnen Serien nicht die gleiche ist, sondern k_1 für die erste Serie be-

[1] Vgl. meine Abhandlungen zur Theorie der Statistik (2 Aufl.; russisch), S. 393—395.

trägt, k_2 für die zweite u. s. w., wobei $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$ ist, erhalten wir aus der Formel (2):

$$(10)\quad E[x_{(n)} - m_1]^2 = \frac{m_2 - m_1^2}{n} +$$

$$+ \frac{k_1(k_1 - 1) + k_2(k_2 - 1) + \cdots + k_m(k_m - 1)}{[k_1 + k_2 + \cdots + k_m]^2} \alpha^2 =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{s} p_h \mu_2^{(h)} + \frac{k_1^2 + k_2^2 + \cdots + k_m^2}{n^2} \alpha^2 .$$

Bei konstanten n und m fällt somit der mittlere Fehler von $x_{(n)}$ um so kleiner aus, je gleichmässiger die Gesamtzahl der Versuche auf die einzelnen Serien verteilt ist.

Falls $k = 1$ ist, sind alle Versuche gegenseitig unabhängig. Bleibt die Gesamtzahl der Versuche gleich n, so erhält man aus (9):

$$E[x_{(n)} - m_1]^2 = \frac{m_2 - m_1^2}{n} .$$

Bei $m = 1$ werden alle n Versuche an einer und derselben zufälligen Variablen vorgenommen, die durch das Los bestimmt wird. In diesem Falle erhalten wir aus (9):

$$(11)\qquad E[x_{(n)} - m_1]^2 = \frac{m_2 - m_1^2}{n} + \frac{n-1}{n} \alpha^2 .$$

Durch die Grösse $\alpha^2 = \sum_{h=1}^{s} p_h [E x_h - m_1]^2$ wird die Dispersion der mathematischen Erwartungen der zufälligen Variablen, an denen experimentiert wird, gemessen: dies ist die so genannte »wesentliche Schwankungskomponente». Der mittlere Fehler des Durchschnitts der empirischen Werte der Variablen setzt sich also unter diesen Verhältnissen aus zwei Teilen zusammen: aus dieser, mit $\frac{n-1}{n}$ multiplizierten, »wesentlichen Komponente» und aus der mit wachsendem n unbegrenzt abnehmenden »zufälligen Schwankungskomponente».

Wir erhalten hiermit in verallgemeinerter Form die bekannte LEXIS-BORTKIEWICZ'sche Formel, welche die Grundlage der LEXIS'schen Dispersionstheorie bildet.[1]

Man nehme nunmehr an, dass die n Versuche, wie oben, in m Serien zerfallen und dass alle Versuche jeder einzelnen Serie an einer und derselben Variablen vorgenommen werden, dass aber die Variablen nicht mehr durch das Los bestimmt, sondern eine nach der anderen in einer im voraus festgelegten Reihenfolge — $x_1, x_2, \ldots x_m$ — genommen werden. Unter diesen Verhältnissen, die dem Schema der »konstant zusammengesetzten Durchschnittswahrscheinlichkeit«[2] entsprechen, sind die einzelnen Versuche gegenseitig unabhängig. Nimmt man an, dass die erste Serie k_1 Versuche umfasst, die zweite Serie k_2 Versuche u. s. w. und setzt man ferner $\frac{k_h}{n} = g_h$, so erhält man aus (2):

$$E x_{(n)} = \sum_{h=1}^{m} g_h E x_h = m_1;$$

$$(12) \quad E[x_{(n)} - m_1]^2 = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{m} g_h [E x_h^2 - (E x_h)^2] = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{m} g_h \mu_2^{(h)}.$$

Hätte man an denselben m Variablen n Versuche in der Weise veranstaltet, dass die Wahl der Variablen für jeden einzelnen Versuch durch das Los neu zu bestimmen wäre, wobei die Wahrscheinlichkeit, die Variable x_h durch das Los zu treffen, gleich g_h geblieben wäre, so hätte man (vgl. oben S. 214) erhalten:

---

[1] LEXIS hat diese Formel für den speziellen Fall der empirischen Häufigkeiten in der theoretisch nicht ganz genauen Form aufgestellt, die $\frac{n-1}{n}$ gleich 1 setzt. BORTKIEWICZ hat dann die erforderliche Korrektur vorgenommen. (Vgl. meine Abhandlungen zur Theorie der Statistik, 2. Aufl., S. 335.) CHARLIER (Theorems of Poisson and Lexis, p. 15. Arkiv f. Mat., Astr. och Fysik, 1911) hat für das LEXIS'sche stochastische Schema auch die math. Erwartungen von $[x_{(n)} - m_1]^3$ und $[x_{(n)} - m_1]^4$ berechnet.

[2] Vgl. meine Abhandlungen zur Theorie der Statistik, 2 Aufl., S. 318—321.

$$E x_{(n)} = \sum_{h=1}^{m} g_h E x_h = m_1;$$

(13) $$E[x_{(n)} - m_1]^2 = \frac{m_2 - m_1^2}{n} = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{m} g_h \mu_2^{(h)} + \frac{1}{n} \alpha^2.$$

Vergleicht man die Formeln (12) und (13), so überzeugt man sich, dass die Anordnung des Experimentes nach dem Schema des »konstant zusammengesetzten Durchschnittes» den mittleren Fehler von $x_{(n)}$ um so mehr reduziert, je grösser α^2, d. h. die Dispersion der mathematischen Erwartungen der betreffenden Variablen, ist.

Drittes Kapitel.

Eine geschlossene Urne enthält n_1 Lose, die mit der Nummer ξ_1 markiert sind, n_2 Lose mit der Nummer ξ_2, u. s. w., n_k Lose mit der Nummer ξ_k. Die Gesamtzahl der Lose ist gleich $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = N$. Man zieht aus der Urne ν Lose heraus, ohne das jeweilig gezogene Los in die Urne zurückzulegen. Es sind die mathematische Erwartung des Durchschnitts der gezogenen Nummern und dessen mittlerer Fehler zu finden.

Man bezeichne mit x_i die Nummer, welche dasjenige Los trägt, das bei der i-ten Ziehung herauskommt, und führe ferner folgende Bezeichnungen ein:

$$E x_1 = \sum_{j=1}^{k} \frac{n_j}{N} \xi_j = m_1;$$

$$E x_1^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{n_j}{N} \xi_j^2 = m_2;$$

$$m_2 - m_1^2 = \mu_2.$$

Es lässt sich leicht nachweisen, dass

$$E x_i = E x_1 = m_1$$

ist. Man hat nämlich:

$$Ex_2 = \frac{n_1}{N}\frac{(n_1-1)\xi_1 + n_2\xi_2 + \cdots + n_k\xi_k}{N-1} +$$
$$+ \frac{n_2}{N}\frac{n_1\xi_1 + (n_2-1)\xi_2 + \cdots + n_k\xi_k}{N-1} + \cdots +$$
$$+ \frac{n_k}{N}\frac{n_1\xi_1 + n_2\xi_2 + \cdots + (n_k-1)\xi_k}{N-1} =$$
$$= \frac{n_1\xi_1 + n_2\xi_2 + \cdots + n_k\xi_k}{N} = m_1.$$

Es sei nun p_h die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nach den ersten $i-1$ Ziehungen die in der Urne gebliebenen $N-i+1$ Lose sich in einer bestimmten Weise auf die einzelnen Nummern verteilen, und $E^{(h)}x_i$ die sich aus der betreffenden Verteilung ergebende mathematische Erwartung von x_i. Bezeichnet man die Gesamtzahl der verschiedenen möglichen Verteilungsweisen mit t, so hat man:

$$Ex_i = \sum_{h=1}^{t} p_h E^{(h)} x_i.$$

Bezeichnet man ferner mit $E^{(h)}x_{i+1}$ die bedingte mathematische Erwartung von x_{i+1} unter der Voraussetzung, dass nach den ersten $i-1$ Ziehungen die h-te der t möglichen Verteilungsweisen der übrig bleibenden $N-i+1$ Lose zustande kommt, so hat man:

$$Ex_{i+1} = \sum_{h=1}^{t} p_h E^{(h)} x_{i+1}.$$

Wir haben aber bereits gesehen, dass

$$E^{(h)}x_{i+1} = E^{(h)}x_i$$

ist. Folglich ist

$$Ex_{i+1} = Ex_i = Ex_1 = m_1. \tag{14}$$

In gleicher Weise findet man:

$$(15) \qquad E x_i^2 = E x_1^2 = m_2$$

und, bei beliebigem l,

$$E x_i^l = E x_1^l .$$

Anderseits hat man

$$E x_1 x_2 = \frac{n_1}{N} \xi_1 \frac{(n_1 - 1)\xi_1 + n_2 \xi_2 + \cdots + n_k \xi_k}{N - 1} +$$

$$+ \frac{n_2}{N} \xi_2 \frac{n_1 \xi_1 + (n_2 - 1)\xi_2 + \cdots + n_k \xi_k}{N - 1} + \cdots +$$

$$+ \frac{n_k}{N} \xi_k \frac{n_1 \xi_1 + n_2 \xi_2 + \cdots + (n_k - 1)\xi_k}{N - 1} =$$

$$= \frac{1}{N(N-1)} \{ [n_1 \xi_1 + n_2 \xi_2 + \cdots + n_k \xi_k]^2 -$$

$$- [n_1 \xi_1^2 + n_2 \xi_2^2 + \cdots + n_k \xi_k^2] \} = \frac{N}{N-1} m_1^2 - \frac{1}{N-1} m_2$$

und

$$E x_1 x_2 - E x_1 E x_2 = - \frac{1}{N-1} \mu_2 .$$

In ähnlicher weise findet man leicht:

$$E x_2 x_3 = E x_1 x_2 .$$

Bezeichnet man nun mit $E^{(h)} x_i x_{i+1}$ und $E^{(h)} x_{i+1} x_{i+2}$ die bedingten mathematischen Erwartungen von $x_i x_{i+1}$ und $x_{i+1} x_{i+2}$ unter der Voraussetzung, dass nach den ersten i Ziehungen die h-te der t möglichen Verteilungsweisen zu stande kommt, so hat man:

$$E^{(h)} x_{i+1} x_{i+2} = E^{(h)} x_i x_{i+1} ;$$

$$E x_{i+1} x_{i+2} = \sum_{h=1}^{t} p_h E^{(h)} x_{i+1} x_{i+2} =$$

$$= \sum_{h=1}^{t} p_h E^{(h)} x_i x_{i+1} = E x_i x_{i+1} = E x_1 x_2 .$$

Bezeichnet man ferner mit $E^{(j)} x_i$ und $E^{(j)} x_{i+1}$ die bedingten mathematischen Erwartungen von x_i und von x_{i+1} unter der Voraussetzung, dass bei der ersten Ziehung das mit der Nummer ξ_j markierte Los gezogen wird, so findet man:

$$E x_1 x_i = \sum_{j=1}^{k} \frac{n_j}{N} \xi_j E^{(j)} x_i ;$$

$$E x_1 x_{i+1} = \sum_{j=1}^{k} \frac{n_j}{N} \xi_i E^{(j)} x_{i+1} = E x_1 x_i = E x_1 x_3 .$$

In gleicher Weise findet man dann schliesslich:

$$E x_i x_j = E x_1 x_2 .$$

Es ist also, bei allen möglichen Werten von h_1 und h_2,

$$(16) \qquad E x_{h_1} x_{h_2} - (E x_{h_1})(E x_{h_2}) = - \frac{1}{N-1} \mu_2 .$$

Setzt man die Werte aus (14), (15) und (16) in (1) und (2) ein, so erhält man:

$$E x_{(n)} = m_1 ,$$

$$(17) \qquad E[x_{(n)} - m_1]^2 = \frac{\mu_2}{\nu} - \frac{\nu-1}{\nu} \frac{\mu_2}{N-1} =$$

$$= \frac{1}{\nu} \mu_2 \left\{ 1 - \frac{\nu-1}{N-1} \right\} = \frac{N-\nu}{N-1} \frac{1}{\nu} \mu_2 .$$

Hätte man das Experiment in anderer Weise angeordnet und das jeweilig gezogene Los in die Urne vor der nächsten Ziehung zurückgelegt, so wäre bekanntlich

$$E x_{(n)} = m_1;$$

$$E[x_{(n)} - m_1]^2 = \frac{1}{\nu}\mu_2$$

gewesen. Dadurch, dass das gezogene Los in die Urne nicht zurückgelegt wird, wird also der mittlere Fehler des Durchschnittes der gezogenen Nummern im Verhältnisse von $\sqrt{\frac{N-\nu}{N-1}} : 1$ reduziert, — ein Ergebnis, das von erheblichem Werte für die praktische Anwendung der Stichprobenmethode ist.[1]

Setzt man nun $k = 2$, $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 0$, $\frac{n_1}{N} = p$, $1 - p = q$, so wird $x_{(n)}$ zur Häufigkeit des Erscheinens der mit 1 markierten Lose und man erhält aus (17) die bekannte Formel:[2]

$$E[x_{(n)} - p]^2 = \frac{N-\nu}{N-1}\frac{1}{\nu}pq.$$

Überblickt man die oben betrachteten Fälle in ihrer Gesamtheit, so überzeugt man sich, dass die Formel (2) alle stochastischen Schemata in nuce enthält, die zur theoretischen Beleuchtung der Stabilität statistischer Zahlen je herangezogen worden sind, bezw. herangezogen werden können. Das ihr zu Grunde liegende Schema ist eben das allgemeinste, das sich denken lässt: es setzt nur voraus, dass an zufälligen Variablen Versuche vorgenommen werden, ohne die Art der

[1] Vgl. St. Kohn, Über die Anwendung der Stichprobenmethode bei der Aufbereitung der landwirtschaftlichen Zählungen, Petrograd, 1917 russisch; eine von einem Schüler von mir, dem ich die obige Formel mitgeteilt habe, verfasste amtliche Denkschrift des Landwirtschaftsministeriums).

[2] Cf. K. Pearson, On certain properties of the hypergeometrical Series Phil. Mag., vol. XLVII, 1899) Auf dem Umwege über die allgemeine Formel erhält man auch in diesem Falle die Lösung des spezielleren Problems in einer durchaus elementaren Weise. Bei E. Czuber (Wahrscheinlichkeitsrechnung, 2. Aufl., Bd I, S. 163—164) wird die Grösse des mittleren Fehlers für den Fall der nicht zurückgelegten Kugeln nicht ganz genau mit $\sqrt{\frac{1}{\nu}pq\left(1-\frac{\nu}{N}\right)}$ $\left(\text{anstatt } \sqrt{\frac{1}{\nu}pq\left(1-\frac{\nu-1}{N-1}\right)}\right)$ angegeben; er interprätiert auch die Formel nicht richtig (vgl. meine Abhandlungen zur Theorie der Statistik, 2. Aufl., S. 316, Anmerkung).

Versuche und die Verteilungsgesetze, denen die Variablen folgen, näher zu bestimmen. Durch geeignete weitere Annahmen lässt es sich mühelos zu jedem beliebigen speziellen Schema umgestalten. Das BOHLMANN'sche Schema erreicht denselben Grad der Allgemeinheit, was die Art der Versuche anbelangt, schliesst sich aber an ein bestimmtes Verteilungsgesetz an. Die BOHLMANN'sche Formel bildet demnach, wie wir gesehen haben, einen Spezialfall der Formel (2).

ZWEITE ABHANDLUNG.

Über die mathematische Erwartung und den mittleren Fehler des Divergenzcoeffizienten.

ERSTES KAPITEL.

I.

An der zufälligen Variablen x werden r Serien von je n Versuchen vorgenommen; das Verteilungsgesetz von x bleibt während des ganzen Verlaufs des Experimentes das gleiche, die einzelnen Versuche sind gegenseitig unabhängig. Man bezeichne mit x_{ij} den Wert, welchen die Variable beim j-ten Versuch der i-ten Serie annimmt, und setze

$$x_{i,(n)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$

$$x_{(nr)} = \frac{1}{nr} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} x_{i,(n)};$$

man kann auch $x_{(nr)}$ durch

$$x_{(nr)} = \frac{1}{nr} \sum_{h=1}^{nr} x_h$$

definieren, indem man alle Versuche fortlaufend numeriert denkt, um auf diese Weise die doppelte Summe durch eine einfache zu ersetzen.

Man führe ausserdem die Bezeichnungen ein

$$E\,x^k = m_k$$
$$E\,[x - m_1]^k = \mu_k.$$

Betrachtet man alle nr Versuche als ein ganzes, so hat man bekanntlich:

$$\mu_2 = \frac{1}{nr-1}\,E\sum_{h=1}^{nr}[x_h - x_{(nr)}]^2.$$

Anderseits erhält man für μ_2, wenn man von den Durchschnittswerten für die einzelnen Serien ausgeht, den Wert:

$$\mu_2 = \frac{n}{r-1}\,E\sum_{i=1}^{r}[x_{i,(n)} - x_{(nr)}]^2.$$

Man hat demnach:

$$E\,\frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r}[x_{i,(n)} - x_{(nr)}]^2 = E\,\frac{1}{n(nr-1)}\sum_{h=1}^{nr}[x_h - x_{(nr)}]^2.$$

Die Grösse

$$\sqrt{\frac{\dfrac{1}{r-1}\sum\limits_{i=1}^{r}[x_{i,(n)} - x_{(nr)}]^2}{\dfrac{1}{n(nr-1)}\sum\limits_{h=1}^{nr}[x_h - x_{(nr)}]^2}},$$

die man mit Q zu bezeichnen pflegt, wird bekanntlich Divergenzkoëffizient (coefficient de divergence) genannt. Sowohl Dormoy, wie Lexis, haben angenommen, dass der numerische Wert von Q, abgesehen von zufälligen Schwankungen, gleich 1 sein müsse. Prof. v. Bortkiewicz hat darauf aufmerksam gemacht, dass nicht gleichzeitig EQ und EQ^2 gleich 1 sein können und dass $EQ < 1$ sein müsse, falls man $EQ^2 = 1$

setzt. Dass $EQ^2 = 1$ sei, blieb jedoch bis vor kurzem unbewiesen, denn daraus, dass die mathematische Erwartung des Zählers der des Nenners gleich ist, lässt sich der Schluss nicht ziehen, dass die mathematische Erwartung des Bruches gleich 1 sei. Wäre der Schluss zulässig, so hätte man aus $Ex = Ey$ sowohl $E\frac{x}{y} = 1$, wie auch $E\frac{y}{x} = 1$ folgern können; es kann aber $E\frac{y}{x}$ nicht gleich 1 sein, wenn $E\frac{x}{y} = 1$ ist, denn aus $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2 + \frac{(x-y)^2}{xy}$ folgt:

$$E\frac{x}{y} + E\frac{y}{x} > 2,$$

falls x und y beide positiv sind, wie im Falle des Divergenzcoeffizienten. Die Differenz zwischen $E\frac{x}{y}$ und $\frac{Ex}{Ey}$ kann sowohl positiv, wie negativ, und zwar beliebig gross, sein.

Dass im Falle der Divergenzcoeffizienten die Voraussetzungen erfüllt sind, unter welchen $E\frac{x}{y} = \frac{Ex}{Ey}$ ist, und dass demzufolge EQ^2 thatsächlich gleich 1 ist, ist zuerst von mir nachgewiesen worden für den speziellen Fall von r für r Serien von je n Versuchen empirisch festgestellten Häufigkeiten eines Ereignisses mit konstanter Wahrscheinlichkeit. Meine ursprüngliche Beweisführung stützt sich auf ein Lemma des Inhaltes, dass $E\frac{x}{y} = 1$ sei, falls $Exy^k = Ey^{k+1}$ bei $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ ist, und ist ziemlich kompliziert.[1] A. Markoff, dem ich das Ergebnis mitgeteilt habe, hat dann einen direkteren und einfacheren Beweis geliefert, der auch den Fall umfasst, wo die Versuchszahlen der einzelnen Serien verschieden sind.[2] Später ist es mir gelungen, einen ganz allgemeinen und sehr einfachen Beweis[3] zu finden, den ich,

---

[1] Cf. meine Untersuchung »Über die mathematischen Grundlagen der Theorie der Stabilität statistischer Reihen», zweite Abhandlung (Mitt. des Polytechn. Inst. in Petrograd, im Druck, russisch).

[2] A. A. Markoff, Ueber den Divergenzcoeffizienten (Bull. de l'Acad. d. Sc., Petrograd, 1916; russisch).

[3] A. Tchouproff, Ueber die mathematische Erwartung des Divergenzcoeffizienten (Bull. Ac. d. Sc., 1916; russisch).

des Zusammenhanges halber, unten in aller kürze folgen lasse Neulich hat auch Prof. v. BORTKIEWICZ einen Beweis, ohne nähere Angaben über dessen Gang, angekündigt.[1]

II.

Man setze

$$\frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r}[x_{i.(n)}-x_{(nr)}]^2 = z$$

$$\frac{1}{n(nr-1)}\sum_{h=1}^{nr}[x_h-x_{(nr)}]^2 = y$$

und lege dem Quotienten $\frac{z}{y}$ den Wert 1 bei, wenn sowohl z, wie y, gleich 0 werden. Es lässt sich leicht zeigen, dass $Ezy^k = Ey^{k+1}$ sowohl, wenn $k > 0$, wie auch, wenn $k < 0$ ist.

Man hat nämlich:

$$\sum_{h=1}^{nr}[x_h-x_{(nr)}]^2 = \sum_{h=1}^{nr}[x_h-m_1]^2 - nr[x_{(nr)}-m_1]^2$$

und folglich

$$Ey^{k+1} = \frac{1}{n(nr-1)}E\left\{y^k\sum_{h=1}^{nr}[x_h-x_{(nr)}]^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{n(nr-1)}\{nr\,Ey^k[x_h-m_1]^2 - nr\,Ey^k[x_{(nr)}-m_1]^2\}.$$

Da nun aber

$$Ey^k[x_{(nr)}-m_1]^2 = \frac{1}{n^2r^2}E\left\{y^k\left[\sum_{h=1}^{nr}[x_h-m_1]\right]^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{nr}Ey^k[x_h-m_1]^2 + \frac{nr-1}{nr}Ey^k[x_h-m_1][x_j-m_1]$$

[1] v. BORTKIEWICZ, Die Iterationen, S. 195 (Berlin, 1917).

ist, so hat man schliesslich:

$$E y^{k+1} = \frac{1}{n} \{E y^k [x_h - m_1]^2 - E y^k [x_h - m_1][x_j - m_1]\}.$$

Anderseits hat man

$$\sum_{i=1}^{r} [x_{i,(n)} - x_{(nr)}]^2 = \sum_{i=1}^{r} [x_{i,(n)} - m_1]^2 - r [x_{(nr)} - m_1]^2,$$

woraus

$$E z y^k = \frac{1}{r-1} E \left\{ y^k \sum_{i=1}^{r} [x_{i,(n)} - x_{(nr)}]^2 \right\} =$$

$$= \frac{1}{r-1} \{ r E y^k [x_{i,(n)} - m_1]^2 - r E y^k [x_{(nr)} - m_1]^2 \} =$$

$$= \frac{r}{r-1} \left\{ \frac{1}{n} E y^k [x_h - m_1]^2 + \frac{n-1}{n} E y^k [x_h - m_1][x_j - m_1] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{nr} E y^k [x_h - m_1]^2 - \frac{nr-1}{nr} E y^k [x_h - m_1][x_j - m_1] \right\} =$$

$$= \frac{1}{n} \{ E y^k [x_h - m_1]^2 - E y^k [x_h - m_1][x_j - m_1] \} = E y^{k+1}.$$

Setzt man nun $k = -1$, so erhält man:

$$E \frac{z}{y} = E Q^2 = 1.$$ [1]

[1] Der obige Beweis geht davon aus, dass

$$E y^k [x_h - m_1]^2 = E y^k [x_j - m_1]^2$$

und

$$E y^k [x_h - m_1][x_j - m_1] = E y^k [x_f - m_1][x_g - m_1]$$

ist. Unter den Voraussetzungen, die wir als geltend angenommen haben, bedürfen diese Sätze keines Beweises. Was die mathematische Erwartung von $\frac{y}{z}$ anbelangt, so lässt sie sich nicht auf gleichem Wege finden, da $E z^k [x_h - m_1][x_j - m_1]$ nicht denselben Wert hat in dem Falle, wenn x_h und x_j zu gleicher Versuchsserie gehören, und in demjenigen, wenn sie verschiedenen Serien entnommen werden.

III.

Die obige Beweisführung lässt sich mutatis mutandis auch auf den Fall anwenden, wo die Versuchszahlen der einzelnen Serien verschieden sind. Es sei s_i die Zahl der Versuche der i-ten Serie und $s_1 + s_2 + \cdots + s_r = s$. Man setze:

$$x_{(s)} = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s_i} x_{ij} = \frac{1}{s} \sum_{h=1}^{s} x_h ,$$

$$\frac{1}{s_i} \sum_{j=1}^{s_i} x_{i,j} = z_i ,$$

$$\frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} z_i = z_{(r)} ,$$

$$\frac{1}{s-1} \sum_{h=1}^{s} [x_h - x_{(s)}]^2 = y ,$$

$$\frac{1}{r-1} \sum_{i=1}^{r} s_i [z_i - x_{(s)}]^2 = w ,$$

$$\frac{r}{r-1} \frac{1}{\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{s_i}} \sum_{i=1}^{r} [z_i - z_{(r)}]^2 = u ,$$

$$\frac{1}{\left[\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{s_i} - \frac{r}{s-1}\right]} \sum_{i=1}^{r} [z_i - x_{(s)}]^2 = v ,$$

$$\frac{1}{r - 2 + \frac{s}{r^2} \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{s_i}} \sum_{i=1}^{r} s_i [z_i - z_{(r)}]^2 = t .$$

Unter der Voraussetzung eines unabänderlichen Verteilungsgesetzes von x und gegenseitiger Unabhängigkeit aller Einzelversuche hat man:

$$E y = E w = E u = E v = E t = \mu_2 .$$

Setzt man nun

$$Q^2 = \frac{w}{y},$$

$$Q'^2 = \frac{u}{y},$$

$$Q''^2 = \frac{v}{y},$$

$$Q'''^2 = \frac{t}{y},$$

so lässt sich in einer der obigen analogen Weise mühelos zeigen,[1] dass

$$EQ^2 = EQ'^2 = EQ''^2 = EQ'''^2 = 1$$

ist.

IV.

Bestimmt man nun das Verteilungsgesetz von x in der Weise, dass x nur die Werte 1 und 0 mit den Wahrscheinlichkeiten p und $1 - p = q$ annimmt, und lässt dann, wie oben (Erste Abhandlung, S. 210) ein Ereignis A so mit x zusammenhängen, dass A eintritt, falls $x = 1$ wird, und ausbleibt, falls x den Wert 0 erhält, so wird durch z_i die Häufigkeit von A für die i-te Versuchsserie und durch $x_{(s)}$ die Gesammthäufigkeit von A für die r Serien ausgedrückt.

Da ferner bei einem derartigen Verteilungsgesetze x_h^2 stets gleich x_h ist, so ist

$$\sum_{h=1}^{s} [x_h - x_{(s)}]^2 = \sum_{h=1}^{s} x_h^2 - s x_{(s)}^2 = \sum_{h=1}^{s} x_h - s x_{(s)}^2 = s x_{(s)} [1 - x_{(s)}]$$

und folglich

---

[1] Vgl. meine oben zitierte Abhandlung: »Ueber die mathematische Erwartung der Divergenzcoeffizienten». Die Variante Q''^2, die dort nicht erwähnt wird, lässt sich in gleicher Weise behandeln.

$$Q^2 = \frac{\frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r} s_i\left[z_i - x_{(s)}\right]^2}{\frac{s}{s-1}\, x_{(s)}\left[1 - x_{(s)}\right]},$$

$$Q'^2 = \frac{\frac{r}{r-1}\,\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{r}\frac{1}{s_i}}\sum_{i=1}^{r}\left[z_i - z_{(r)}\right]^2}{\frac{s}{s-1}\, x_{(s)}\left[1 - x_{(s)}\right]},$$

$$Q''^2 = \frac{\frac{1}{\left[\sum\limits_{i=1}^{r}\frac{1}{s_i} - \frac{r}{s}\right]}\sum_{i=1}^{r}\left[z_i - x_{(s)}\right]^2}{\frac{s}{s-1}\, x_{(s)}\left[1 - x_{(s)}\right]},$$

$$Q'''^2 = \frac{\frac{1}{r - 2 + \frac{s}{r^2}\sum\limits_{i=1}^{r}\frac{1}{s_i}}\sum_{i=1}^{r} s_i\left[z_i - z_{(r)}\right]^2}{\frac{s}{s-1}\, x_{(s)}\left[1 - x_{(s)}\right]}.$$

Setzt man

$$s_1 = s_2 = \cdots = s_r = n,$$

so reduzieren sich alle vier Varianten auf eine und dieselbe Form:

$$Q^2 = \frac{\frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r}\left[z_i - x_{(nr)}\right]^2}{\frac{1}{n - \frac{1}{r}}\, x_{(nr)}\left[1 - x_{(nr)}\right]}.$$

Wie oben nachgewiesen wurde, hat man:

$$EQ^2 = EQ'^2 = EQ''^2 = EQ'''^2 = 1.$$

Zweites Kapitel.

I.

Das Verdienst, die Frage nach dem mittleren Fehler des Divergenzcoeffizienten gestellt zu haben, gebührt Prof. v. Bortkiewicz.[1] Von ihm stammt auch der erste Versuch, die Grösse des mittleren Fehlers zu bestimmen. Bortkiewicz gelangt zu dem Ergebnis, dass, falls man den Divergenzcoeffizienten für r Serien von je n Versuchen berechnet, der mittlere Fehler desselben näherungsweise gleich $\sqrt{\frac{2}{r}}$ zu setzen sei. Obgleich die Beweisführung die erwünschte Strenge vermissen lässt[2] und über das Maass der Annäherung kein sicheres Urteil gestattet, — es lässt sich nicht einmal feststellen, ob der erhaltene Näherungswert eine obere oder eine untere Grenze des zu bestimmenden mittleren Fehlers darstellt, — war dies immerhin eine hoch zu schätzende Leistung, und die Bortkiewicz'sche Formel hat lange Zeit

---

[1] L. v. Bortkiewicz, Über den Präcisionsgrad des Divergenzcoeffizienten (Mitt. d. Verbandes der öst. u. ung. Vers.-Techn.; Wien, 1906).

[2] Das von Bortkiewicz angewandte Verfahren beruht auf der Vernachlässigung im Zähler und im Nenner des Bruches, dessen mathematische Erwartung berechnet werden soll, von Gliedern, welche den Faktor $\frac{1}{n}$ enthalten. Da die statistische Praxis meistens mit kleinen r, aber verhältnissmässig grossen n zu tun hat, ist dieses Verfahren an sich gewiss nicht unzulässig, falls man die erforderliche Vorsicht walten lässt und den hierbei begangenen Fehler einigermassen sicher abschätzt, — namentlich dessen Vorzeichen feststellt. Die Vertreter der englischen Schule, die zu solchen Näherungsverfahren eine besondere Vorliebe aufweisen und dieselben in ihrer Anwendung auf statistisch-mathematische Probleme systematisch ausgebildet, aber gelegentlich recht unkritisch angewandt haben, sind auch in letzter Zeit vorsichtiger geworden und widmen jetzt mehr Aufmerksamkeit der Schätzung der erzielten Annäherung.

Zu den Gliedern, die Bortkiewicz vernachlässigt, gehören solche, die die Form $\frac{1}{nrpq}$ bezw. $\frac{(q-p)^2}{nrpq}$ haben. Falls p oder q sehr klein sind, können diese Glieder derselben Grössenordnung sein, wie die übrig bleibenden. Unter solchen Verhältnissen wird die Beweisführung ganz hinfällig. Namentlich ist das der Fall im Bereiche des sogenannten »Gesetzes der kleinen Zahlen« — um mich an den Sinn des m. E. nicht sehr glücklich gewählten und bereits vieldeutig gewordenen Ausdrucks zu halten, welchen Bortkiewicz ihm in »La legge dei piccoli numeri«, p. 12, 13 (Giornale Degli Economisti, 1908) beilegt, wo er das bekannte von Poisson für den Grenzfall von $n = \infty$ und $(np)_{n=\infty} = m$ abgeleitete Verteilungsgesetz damit bezeichnet. (Vgl. meine Abhandlungen zur Theorie der Statistik, 2. Aufl., S. 398—400.)

die einzige Grundlage für die Schätzung des Spielraums der zufälligen Schwankungen des Divergenzcoeffizienten gebildet. Später hat Prof. v. BORTKIEWICZ seine ursprüngliche Formel modifiziert, indem er den mittleren Fehler des Divergenzcoeffizienten nunmehr gleich $\sqrt{\frac{2}{r-1}\,\frac{n-1}{n}}$ setzt. In der oben zitierten Abhandlung von A. MARKOFF »Ueber den Divergenzcoeffizienten« wurde das von BORTKIEWICZ gestellte Problem einwandfrei gelöst: es ist nämlich MARKOFF gelungen nachzuweisen, dass

$$E[Q^2-1]^2 =$$

$$\frac{2r^2n(n-1)}{(r-1)(nr-2)(nr-3)}\sum_{m=1}^{nr-1}\frac{m-1}{m}\,\frac{nr-m-1}{nr-m}\,\frac{1.2.3\ldots(nr)}{1.2\ldots m.1.2\ldots(nr-m)}p^m q^{nr-m}$$

ist, woraus

$$E[Q^2-1]^2 < \frac{2r^2n(n-1)}{(r-1)(nr-2)(nr-3)}$$

folgt. Aus diesen Formeln hat MARKOFF den Schluss gezogen, dass, bei $r > 5$, $\frac{2}{r-1}$ die obere Grenze von $E[Q^2-1]^2$ darstellt, zu welcher $E[Q^2-1]^2$ sich mit wachsendem nr unbegrenzt annähert. Ersetzt man in der obigen Formel

$$\frac{m-1}{m}\,\frac{nr-m-1}{nr-m} \text{ durch } 1-\frac{nr-1}{m(nr-m)},$$

so überzeugt man sich leicht, dass

$$E[Q^2-1]^2 < \frac{2}{r-1}\,\frac{n}{n-1}\,\frac{nr-2}{nr-3}$$

ist, da $m(nr-m) \leq \frac{n^2r^2}{4}$ ist. Der mittlere Fehler von Q^2 ist also geringer, als $\sqrt{\frac{2}{r-1}}$, wenn $r > 1+\frac{2}{n}$, d. h. in allen in Betracht kommenden Fällen, denn für eine einzelne Ver-

suchsserie, sowie auch für zwei Serien, die aus je einem Versuch bestehen, lässt sich der Divergenzcoeffizient nicht berechnen.

Was die Behauptung anbelangt, dass $E[Q^2-1]^2$ mit wachsendem nr dem Grenzwerte $\frac{2}{r-1}$ zustrebe, so begründet sie Markoff mit dem Hinweis darauf, dass bei grossem nr diejenigen Werte von m, für welche

$$\frac{1.2.3\ldots(nr)}{1.2\ldots m.1.2\ldots(nr-m)}p^m q^{nr-m}$$

nicht verschwindend klein ist, den Wert von $\frac{m-1}{m}\frac{nr-m-1}{nr-m}$ um so näher an 1 bringen, je grösser nr ist. Diese Argumentation ist offenbar nur dann zwingend, wenn weder p noch q so klein sind, dass np (bezw. nq) mit wachsendem n einem endlichen Grenzwert zustrebt. Auf den Fall des »Gesetzes der kleinen Zahlen» (vgl. oben die Anmerkung zu S. 229) ist die obige Argumentation nicht anwendbar.[1]

Die oben für die Berechnung von EQ^2 angewandte Methode gestattet, in einer ebenso allgemeinen, wie einfachen Weise die Grenzen festzustellen, innerhalb derer der mittlere Fehler von Q^2 liegt, sowie einen Begriff von der Form des Verteilungsgesetzes der Q^2-Werte zu bilden.

[1] C. V. L. Charlier gibt in seinen Contributions to the mathematica theory of statistics (Nr. 4, The statistical series in homograd statistics p. 23, Anmerkung; Arkiv f. Mat., Astr. och Fysik, Bd. VIII, 1912) den mittleren Fehler von Q, als gleich $\frac{Q}{\sqrt{2r}}\sqrt{1+\frac{(p_0-q_0)^2}{2np_0q_0}Q^2}$, an, wobei mit p_0 die Durchschnittshäufigkeit des Ereignisses bezeichnet wird; er theilt aber nicht mit, wie diese Formel abgeleitet worden ist.

Gleichfalls ohne Beweis wird in der 1917 erschienenen Untersuchung von Bortkiewicz über die Iterationen auf S. 195 eine, in meinen Bezeichnungen als $E[Q^2-1]^2 = \frac{2(n-1)n^2r^2[nr-m-1][m-1]}{n(r-1)(nr-2)(nr-3)(nr-m)m}$ zuschreibende, Formel mitgeteilt, wobei m die Wiederholungszahl des Ereignisses für die nr Versuche bezeichnet. Diese Formel entspricht, wie ich von Prof. v. Bortkiewicz erfahre, einer veränderten Problemstellung, welche sich im wesentlichen mit der ersten Stufe der Markoff'schen Beweisführung deckt.

II.

Unter Beibehaltung der Voraussetzungen und der Bezeichnungen der §§ I und II des ersten Kapitels erhält man leicht folgende, für alle Werte von k gültige, Beziehungen:

$$
\begin{aligned}
E z^2 y^k = \frac{1}{r n^3} \{ & E y^k (x_1 - m_1)^4 - 4 E y^k (x_1 - m_1)^3 (x_2 - m_1) - \\
& - 3 E y^k (x_1 - m_1)^2 (x_2 - m_1)^2 + \\
& + 12 E y^k (x_1 - m_1)^2 (x_2 - m_1)(x_3 - m_1) - \\
(1) \qquad & - 6 E y^k (x_1 - m_1)(x_2 - m_1)(x_3 - m_1)(x_4 - m_1) \} + \\
& + \frac{r+1}{(r-1) n^2} \{ E y^k (x_1 - m_1)^2 (x_2 - m_1)^2 - \\
& - 2 E y^k (x_1 - m_1)^2 (x_2 - m_1)(x_3 - m_1) + \\
& + E y^k (x_1 - m_1)(x_2 - m_1)(x_3 - m_1)(x_4 - m_1) \} .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E y^{k+2} = \frac{1}{r n^3} \{ & E y^k (x_1 - m_1)^4 - 4 E y^k (x_1 - m_1)^3 (x_2 - m_1) - \\
& - 3 E y^k (x_1 - m_1)^2 (x_2 - m_1)^2 + \\
& + 12 E y^k (x_1 - m_1)^2 (x_2 - m_1)(x_3 - m_1) - \\
(2) \qquad & - 6 E y^k (x_1 - m_1)(x_2 - m_1)(x_3 - m_1)(x_4 - m_1) \} + \\
& + \frac{n r + 1}{(n r - 1) n^2} \{ E y^k (x_1 - m_1)^2 (x_2 - m_1)^2 - \\
& - 2 E y^k (x_1 - m_1)^2 (x_2 - m_1)(x_3 - m_1) + \\
& + E y^k (x_1 - m_1)(x_2 - m_1)(x_3 - m_1)(x_4 - m_1) \} .
\end{aligned}
$$

Führt man nun die Bezeichnungen

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n^2} E & \frac{(x_1 - m_1)^2 (x_2 - m_1)^2 - 2 (x_1 - m_1)^2 (x_2 - m_1)(x_3 - m_1) +}{y^2} \\
& \frac{+ (x_1 - m_1)(x_2 - m_1)(x_3 - m_1)(x_4 - m_1)}{y^2} = A
\end{aligned}
$$

$$\frac{1}{n^2} E \frac{(x_1-m_1)^4-4(x_1-m_1)^3(x_2-m_1)-3(x_1-m_1)^2(x_2-m_1)^2+}{y^2}$$

$$\frac{12(x_1-m_1)^2(x_2-m_1)(x_3-m_1)-6(x_1-m_1)(x_2-m_1)(x_3-m_1)(x_4-m_1)}{y^2} = B$$

ein und setzt dann $k = -2$ in (1) und (2), so erhält man:

$$E\frac{z^2}{y^2} = EQ^4 = \frac{1}{nr} B + \frac{r+1}{r-1} A,$$

$$1 = \frac{1}{nr} B + \frac{nr+1}{nr-1} A,$$

woraus

$$(3)\quad EQ^4 = 1 + \frac{2}{r-1}\,\frac{r(n-1)}{nr-1} A = 1 + \frac{2}{r-1}\,\frac{r(n-1)}{nr+1}\left[1 - \frac{1}{nr} B\right]$$

folgt.

Setzt man ferner

$$\frac{1}{n^2} E \frac{(x_1-m_1)^4 - 4(x_1-m_1)^3(x_2-m_1) + 3(x_1-m_1)^2(x_2-m_1)^2}{y^2} = C,$$

so hat man:

$$B = C - 6A$$

und

$$(4)\qquad EQ^4 = 1 + \frac{2}{r-1}\,\frac{r(n-1)nr}{(nr-2)(nr-3)}\left[1 - \frac{1}{nr} C\right].$$

Die Aufgabe reduziert sich demnach auf die Bestimmung des Wertes einer der Grössen A, B oder C, die sich auch in folgender Form darstellen lassen:

$$(5)\qquad A = (nr-1)^2 E \frac{x_1^2 x_2^2 - 2x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 x_4}{\left[\sum_{h=1}^{nr} (x_h - x_{(nr)})^2\right]^2}$$

$$B = (nr-1)^2 \, E \frac{x_1^4 - 4\,x_1^3 x_2 - 3\,x_1^2 x_2^2 + 12\,x_1^2 x_2 x_3 - 6\,x_1 x_2 x_3 x_4}{\left[\sum\limits_{h=1}^{nr} (x_h - x_{(nr)})^2\right]^2}$$

$$C = (nr-1)^2 \, E \frac{x_1^4 - 4\,x_1^3 x_2 + 3\,x_1^2 x_2^2}{\left[\sum\limits_{h=1}^{nr} (x_h - x_{(nr)})^2\right]^2} .$$

III.

Die exakte Grösse von A, B und C und folglich auch von EQ^4 hängt vom Verteilungsgesetze von x ab. Es lassen sich aber für A, B und C gewisse Grenzen angeben, die vom Verteilungsgesetze von x unabhängig sind.

Um die obere Grenze von EQ^4 bezw. $E[Q^2-1]^2$ zu finden, bietet die grösse C die passendste Handhabe.

1) Aus

$$E \frac{x_1^4 - 4\,x_1^3 x_2 + 3\,x_1^2 x_2^2}{\left[\sum\limits_{h=1}^{nr} (x_h - x_{(nr)})^2\right]^2} = E \frac{x_2^4 - 4\,x_1 x_2^3 + 3\,x_1^2 x_2^2}{\left[\sum\limits_{h=1}^{nr} (x_h - x_{(nr)})^2\right]^2}$$

folgt unmittelbar:

$$C = \frac{(nr-1)^2}{2} \, E \frac{(x_1 - x_2)^4}{\left[\sum\limits_{h=1}^{nr} (x_h - x_{(nr)})^2\right]^2} .$$

Die Grösse C ist demnach stets positiv und folglich, laut (4),

$$EQ^4 < 1 + \frac{2}{r-1} \frac{r(n-1)\,nr}{(nr-2)(nr-3)} .$$

Bei $r > 5$ ist also $EQ^4 < 1 + \frac{2}{r-1}$ und $E[Q^2-1]^2 < \frac{2}{r-1}$ (Vgl. oben S. 230.)

2) Aus

$$\sum_{h=1}^{nr}(x_h - x_{(nr)})^2 = \frac{1}{nr}\sum_{i=1}^{nr-1}\sum_{j=i+1}^{nr}(x_i - x_j)^2$$

folgt:

$$C = \frac{n^2 r^2 (nr-1)^2}{2} E \frac{(x_1 - x_2)^4}{\left[\sum_{i=1}^{nr-1}\sum_{j=i+1}^{nr}(x_i - x_j)^2\right]^2}$$

und

$$C > \frac{n^2 r^2 (nr-1)^2}{2}\left[E \frac{(x_1 - x_2)^2}{\sum_{i=1}^{nr-1}\sum_{j=i+1}^{nr}(x_i - x_j)^2}\right]^2.$$

Da nun aber

$$E \frac{(x_1 - x_2)^2}{\sum_{i=1}^{nr-1}\sum_{j=i+1}^{nr}(x_i - x_j)^2} = \frac{2}{nr(nr-1)} E \frac{\sum_{i=1}^{nr-1}\sum_{j=i+1}^{nr}(x_i - x_j)^2}{\sum_{i=1}^{nr-1}\sum_{j=i+1}^{nr}(x_i - x_j)^2} = \frac{2}{nr(nr-1)}$$

ist, so ist

$$C > 2 \text{ und } 1 - \frac{1}{nr} C < \frac{nr-2}{nr}.$$

Man erhält mithin aus (4)

$$EQ^4 < 1 + \frac{2}{r-1}\frac{r(n-1)}{nr-3},$$

woraus bei $r > 3$

$$EQ^4 < 1 + \frac{2}{r-1} \text{ und } E[Q^2 - 1]^2 < \frac{2}{r-1}$$

folgt.

3) Aus

$$E\,\frac{(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2}{\left[\sum\limits_{h=1}^{nr}(x_h-x_{(nr)})^2\right]^2}=E\,\frac{x_1^4-4x_1^3x_2+3x_1^2x_2^2}{\left[\sum\limits_{h=1}^{nr}(x_h-x_{(nr)})^2\right]^2}$$

folgt

$$C=(nr-1)^2\,E\,\frac{(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2}{\left[\sum\limits_{h=1}^{nr}(x_h-x_{(nr)})^2\right]^2}=$$

$$=n^2r^2(nr-1)^2\,E\,\frac{(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2}{\left[\sum\limits_{i=1}^{nr-1}\sum\limits_{j=i+1}^{nr}(x_i-x_j)^2\right]^2}.$$

Man hat demnach

$$n^2r^2(nr-1)^2\,E\,\frac{[(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+\cdots+(x_1-x_{nr})^2]^2}{\left[\sum\limits_{i=1}^{nr-1}\sum\limits_{j=i+1}^{nr}(x_i-x_j)^2\right]^2}=$$

$$=2(nr-1)C+(nr-1)(nr-2)C=nr(nr-1)C.$$

Da nun aber

$$E\,\frac{[(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+\cdots+(x_1-x_{nr})^2]^2}{\left[\sum\limits_{i=1}^{nr-1}\sum\limits_{j=i+1}^{nr}(x_i-x_j)^2\right]^2}>$$

$$>\left[E\,\frac{(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+\cdots+(x_1-x_{nr})^2}{\sum\limits_{i=1}^{nr-1}\sum\limits_{j=i+1}^{nr}(x_i-x_j)^2}\right]^2>\frac{4}{n^2r^2}$$

ist, so ist

$$C>4\,\frac{nr-1}{nr}\quad\text{und}\quad 1-\frac{1}{nr}\,C<\frac{(nr-2)^2}{n^2r^2}.$$

Folglich ist

$$EQ^4<1-\frac{2}{r-1}\,\frac{n-1}{n}\,\frac{nr-2}{nr-3} \tag{6}$$

und

$$E[Q^2-1]^2 < \frac{2}{r-1}\,\frac{n-1}{n}\,\frac{nr-2}{nr-3}$$

oder

$$E[Q^2-1]^2 < \frac{2}{r-1}, \text{ falls } r > 1 + \frac{2}{n} \text{ ist.}$$

Da aber weder n, noch $r < 2$ sein können, so folgt hieraus (vgl. oben S. 230), dass der mittlere Fehler des Divergenzcoeffizienten im Falle, wenn die Versuchszahlen der einzelnen Serien untereinander gleich sind, stets kleiner, als $\sqrt{\frac{2}{r-1}}$ ist.

IV.

1) Eine vom Verteilungsgesetze der Variablen x unabhängige untere Grenze von EQ^4 lässt sich nicht feststellen, wenn man von der Ungleichheit $EQ^4 > 1$ absieht, welche sich aus $EQ^4 > [EQ^2]^2$ unmittelbar ergiebt, sowie auch aus leicht zu beweisenden Beziehungen

$$A > 0,$$

$$\frac{1}{nr} C < 1$$

folgt.

Im Falle, wenn die Variable x nur die Werte 1 und 0 mit den Wahrscheinlichkeiten p und $1-p=q$ annehmen kann, lässt sich leicht eine untere Grenze von EQ^4 feststellen, welche für $p=q=\frac{1}{2}$ eine gute Annäherung liefert.

Aus

$$E\frac{x_1^2x_2^2-2x_1^2x_2x_3+x_1x_2x_3x_4}{\left[\sum_{h=1}^{nr}(x_h-x_{(nr)})^2\right]^2} = \frac{1}{4}E\frac{(x_1-x_2)^2(x_3-x_4)^2}{\left[\sum_{h=1}^{nr}(x_h-x_{(nr)})^2\right]^2},$$

folgt, bei beliebigem Verteilungsgesetz,

$$A = \frac{(nr-1)^2}{4} E \frac{(x_1-x_2)^2(x_3-x_4)^2}{\left[\sum_{h=1}^{nr}(x_h - x_{(nr)})^2\right]^2}$$

$$= \frac{n^2 r^2 (nr-1)^2}{4} E \frac{(x_1-x_2)^2(x_3-x_4)^2}{\left[\sum_{i=1}^{nr-1}\sum_{j=i+1}^{nr}(x_i-x_j)^2\right]^2}.$$

Da nun $(x_i - x_j)^2$ nur 1 und 0 gleich sein kann, falls x entweder 1 oder 0 sein muss, so ist

$$\sum_{i=1}^{nr-1}\sum_{j=i+1}^{nr}(x_i-x_j)^2 < \frac{n^2 r^2}{4}.$$

Folglich ist

$$A > \frac{4(nr-1)^2}{n^2 r^2} E(x_1-x_2)^2(x_3-x_4)^2$$

oder

$$A > \frac{(nr-1)^2}{n^2 r^2} 16\, p^2 q^2$$

und

(7) $$EQ^4 > 1 + \frac{2}{r-1}\,\frac{n-1}{n}\,\frac{nr-1}{nr}\,16\, p^2 q^2.$$

Wenn $p = q = \frac{1}{2}$ ist, ist

$$A > \left(\frac{nr-1}{nr}\right)^2$$

und

(8) $$EQ^4 > 1 + \frac{2}{r-1}\,\frac{n-1}{n}\,\frac{nr-1}{nr}.$$

Da anderseits

$$EQ^4 < 1 + \frac{2}{r-1}\,\frac{n-1}{n}\,\frac{nr-2}{nr-3}$$

ist, so schliessen die beiden Ungleichheiten die Grösse EQ^4 in hinreichend enge Grenzen ein.

In dem Falle hingegen, wo p und q von $\frac{1}{2}$ stark abweichen, erhält man aus (7) eine unverhältnissmässig niedrige untere Grenze: der Spielraum, in welchen der Wert von EQ^4 eingeschlossen wird, bleibt für praktische Zwecke nicht genügend eng.

2) Eine vom Verteilungsgesetz der Variablen x abhängige untere Grenze von EQ^4 lässt sich in ganz allgemeiner Form in folgender Weise feststellen.

Von der Identität

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} - \frac{a-b}{ab}$$

ausgehend, erhält man für beliebige zufällige Variablen identisch:[1]

$$(9) \qquad E\frac{\alpha}{\beta} = \frac{E\alpha}{E\beta} - \frac{1}{E\beta} E\frac{\alpha[\beta - E\beta]}{\beta} =$$

$$= \frac{E\alpha}{E\beta} - \frac{1}{[E\beta]^2} E\alpha[\beta - E\beta] + \frac{1}{[E\beta]^2} E\frac{\alpha[\beta - E\beta]^2}{\beta} \text{ u. s. w.}$$

Falls die Werte, welche die Variablen α und β annehmen, stets dasselbe Vorzeichen haben, so dass $\frac{\alpha}{\beta}$ nie < 0 wird, folgt aus (9):

$$(10) \qquad E\frac{\alpha}{\beta} > \frac{E\alpha}{E\beta} - \frac{1}{[E\beta]^2}\{E\alpha\beta - [E\alpha].[E\beta]\}.$$

oder

$$E\frac{\alpha}{\beta} > \frac{E\alpha}{E\beta} -$$

$$- \frac{1}{[E\beta]^2}\{E[\alpha - E\alpha].[\beta - E\beta] - (E[\alpha - E\alpha]).(E[\beta - E\beta])\}$$

[1] Vgl. meine oben zitierte Untersuchung »Über die mathematischen Grundlagen der Theorie der Stabilität statistischer Reihen», zweite Abhandlung.

oder auch

$$E\frac{\alpha}{\beta} > \frac{E\alpha}{E\beta}\left\{1 - \frac{E[\alpha - E\alpha].[\beta - E\beta]}{[E\alpha].[E\beta]}\right\}.^{1}$$

Aus diesen Ungleichheiten folgt, dass, unter der obigen Voraussetzung, $E\frac{\alpha}{\beta} > \frac{E\alpha}{E\beta}$ ist, wenn $E\alpha\beta - E\alpha . E\beta < 0$ ist. Und in dem Falle, wenn $E\alpha\beta - E\alpha . E\beta > 0$ ist, hat man in diesen Ungleichheiten eine sichere Handhabe zur Bestimmung einer unteren Grenze von $E\frac{\alpha}{\beta}$.

Erscheint die Annäherung, die man durch Anwendung von (10) erzielt, nicht hinreichend, so braucht man bloss, das Verfahren, welches zur Formel (10) führt, zu wiederholen.

3) Um die Formel (10) auf den Fall von EQ^4 anzuwenden, hat man

$$\alpha = z^2 = \frac{1}{(r-1)^2}\left[\sum_{i=1}^{r}(x_{i,(n)} - x_{(nr)})^2\right]^2,$$

$$\beta = y^2 = \frac{1}{n^2(nr-1)^2}\left[\sum_{h=1}^{nr}(x_h - x_{(nr)})^2\right]^2$$

zu setzen, woraus

$$E\alpha = \frac{1}{n^2}\mu_2^2 + \frac{2}{n^2(r-1)}\mu_2^2 + \frac{1}{n^3 r}[\mu_4 - 3\mu_2^2],$$

[1] Diese Ungleichheiten haben den Vorzug vor der bekannten PEARSON'schen Näherungsformel, die in meinen Bezeichungen

$$E\frac{\alpha}{\beta} = \frac{E\alpha}{E\beta}\left\{\frac{E\beta^2}{[E\beta]^2} - \frac{E[\alpha - E\alpha].[\beta - E\beta]}{[E\alpha].[E\beta]}\right\}$$

lauten würde (cf. PEARSON, On a form of spurious correlation which may arise when indices are used in the measurement of organs; Proc. R. Soc., vol. LX, 1897), dass man mit Sicherheit weiss, dass der erhaltene Näherungswert eine untere Grenze von $E\frac{\alpha}{\beta}$ darstellt. Setzt man in den PEARSON'schen Näherungsformeln $x_1 = 1$, so erhält man, als einen Spezialfall, die Formeln, welche Prof. v. BORTKIEWICZ auf S. 38—39 seiner Untersuchung über die Iterationen — offenbar, ohne die PEARSON'sche Abhandlung zu kennen, — ableitet.

$$E\beta = \frac{1}{n^2}\mu_2^2 + \frac{2}{n^2(nr-1)}\mu_2^2 + \frac{1}{n^3 r}[\mu_4 - 3\mu_2^2],$$

$$\frac{E\alpha}{E\beta} = 1 + \frac{2}{r-1}\frac{r(n-1)}{nr-1}\frac{1}{1 + \frac{2}{nr-1} + \frac{1}{nr}\left[\frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3\right]}$$

folgt.

Unvergleichlich beschwerlicher würde sich die Berechnung von $E\alpha\beta$ gestalten. Die Sache lässt sich dadurch vereinfachen, dass man nach (10) die untere Grenze von A bestimmt und den erhaltenen Wert in (3) einsetzt, anstatt die untere Grenze von EQ^1 unmittelbar nach (10) zu berechnen.

Setzt man

$$\frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2 (x_3 - x_4)^2 = \alpha',$$

$$\frac{1}{n^2 r^2 (nr-1)^2}\left[\sum_{i=1}^{nr-1}\sum_{j=i+1}^{nr}(x_i - x_j)^2\right]^2 = \beta',$$

so hat man:

$$A = \frac{\alpha'}{\beta'},$$

$$E\alpha' = \mu_2^2,$$

$$E\beta' = \mu_2^2 + \frac{2}{nr-1}\mu_2^2 + \frac{1}{nr}(\mu_4 - 3\mu_2^2),$$

$$\frac{E\alpha'}{E\beta'} = \frac{1}{1 + \frac{2}{nr-1} + \frac{1}{nr}\left[\frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3\right]}.$$

Den Wert von $E\alpha'\beta'$ kann man auf verschiedene Weisen berechnen. Man kann z. B. von der Identität

$$\left[\sum_{i=1}^{nr-1}\sum_{j=i+1}^{nr}(x_i - x_j)^2\right]^2 = \left[\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=i+1}^{nr}(x_i - x_j)^2\right]^2 +$$

$$+ 2\left[\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=i+1}^{nr}(x_i - x_j)^2\right]\cdot\left[\sum_{i=5}^{nr-1}\sum_{j=i+1}^{nr}(x_i - x_j)^2\right] + \left[\sum_{i=5}^{nr-1}\sum_{j=i+1}^{nr}(x_i - x_j)^2\right]^2$$

ausgehen, woraus man, nach langwierigen,[1] aber keine Schwierigkeit bietenden Rechnungen,

$$E\alpha'\beta' = \frac{1}{n^2r^2(nr-1)^2}\{2(nr-1)^2\mu_6\mu_2 - 8(nr-1)\mu_5\mu_3 +$$
$$+ 2(n^2r^2 - 2nr + 3)\mu_4^2 +$$
$$+ (5n^3r^3 - 20n^2r^2 + 53nr - 50)\mu_4\mu_2^2 -$$
$$- 4(4n^2r^2 - 18nr + 29)\mu_3^2\mu_2 +$$
$$+ (n^4r^4 - 7n^3r^3 + 27n^2r^2 - 71nr + 98)\mu_2^4\}$$

$$E\alpha'\beta' - E\alpha' E\beta' = \frac{1}{n^2r^2(nr-1)^2}\{2(nr-1)^2\mu_6\mu_2 - 8(nr-1)\mu_5\mu_3 +$$
$$+ 2(n^2r^2 - 2nr + 3)\mu_4^2 +$$
$$+ (4n^3r^3 - 18n^2r^2 + 52nr - 50)\mu_4\mu_2^2 -$$
$$- 4(4n^2r^2 - 18nr + 29)\mu_3^2\mu_2 -$$
$$- (4n^3r^3 - 22n^2r^2 + 68nr - 98)\mu_2^4\}$$

$$\frac{E\alpha'\beta' - E\alpha' E\beta'}{[E\beta']^2} =$$

$$= \frac{2(nr-1)^2\mu_6\mu_2 - 8(nr-1)\mu_5\mu_3 + 2(n^2r^2 - 2nr + 3)\mu_4^2 + (4n^3r^3 - 18n^2r^2 + 52nr -}{[(nr-1)\mu_4 + (n^2r^2 - 2nr + 3)\mu_2^2]^2}$$

$$\frac{-50)\mu_4\mu_2^2 - 4(4n^2r^2 - 18nr + 29)\mu_3^2\mu_2 - (4n^3r^3 - 22n^2r^2 + 68nr - 98)\mu}{[(nr-1)\mu_4 + (n^2r^2 - 2nr + 3)\mu_2^2]^2}$$

erhält.

Man hat demnach

$$(11)\quad A > \frac{(n^4r^4 + n^3r^3 - 17n^2r^2 + 65nr - 98)\mu_2^4 + 4(4n^2r^2 - 18nr + 29)\mu_3^2\mu_2 - (3n^3r^3 -}{[(nr-1)\mu_4 + (n^2r^2 - 2nr + 3)\mu_2^2]^2}$$

$$\frac{-16n^2r^2 + 51nr - 50)\mu_4\mu_2^2 - 2(n^2r^2 - 2nr + 3)\mu_4^2 + 8(nr-1)\mu_5\mu_3 - 2(nr-1)^2\mu_6\mu_2}{[(nr-1)\mu_4 + (n^2r^2 - 2nr + 3)\mu_2^2]^2}$$

[1] Im Anhang sind einige, sowohl in diesem Falle, wie auch vielfach sonst nützliche Formeln zusammengestellt, welche die Berechnung von $E\alpha'\beta'$ wesentlich erleichtern.

Bei nicht zu kleinen Werten von nr ergiebt diese Ungleichheit eine hinreichend hohe untere Grenze von EQ^4. Der Spielraum, in welchen EQ^4 eingeschlossen wird, hängt hierbei vom Verteilungsgesetze der Variablen x ab. Im Falle, wenn x dem GAUSS'schen Verteilungsgesetze folgt, hat man:

$$A > \frac{n^4r^4 - 8n^3r^3 - 17n^2r^2 + 8nr - 32}{n^2r^2(nr+1)^2}$$

und

$$(12)\quad 1 + \frac{2}{r-1}\frac{n-1}{n}\frac{nr-2}{nr-3} > EQ^4 > 1 +$$
$$+ \frac{2}{r-1}\frac{n-1}{n}\frac{n^4r^4 - 8n^3r^3 - 17n^2r^2 + 8nr - 32}{(nr+1)^2 nr(nr-1)};$$

bei $nr = 10$ erhält man hieraus:

$$1 + \frac{2}{r-1}\frac{n-1}{n}\left(1 + \frac{1}{7}\right) > EQ^4 > 1 + \frac{2}{r-1}\frac{n-1}{n}\left(1 - \frac{10542}{10890}\right),$$

aber bei $nr = 100$ bereits

$$1 + \frac{2}{r-1}\frac{n-1}{n}\left(1 + \frac{1}{97}\right) > EQ^4 > 1 + \frac{2}{r-1}\frac{n-1}{n}\left(1 - \frac{9\,150\,132}{100\,989\,900}\right).$$

Falls x mit gleicher Wahrscheinlichkeit Werte 1 und 0 annehmen kann, ist $\mu_3 = \mu_5 = 0$, $\mu_4 = \mu_2^2$, $\mu_6 = \mu_2^3$ und demnach (vgl. oben S. 238)

$$A > \frac{n^4r^4 - 2n^3r^3 - 5n^2r^2 + 22nr - 56}{[n^2r^2 - nr + 2]^2},$$

$$(13)\quad EQ^4 > 1 + \frac{2}{r-1}\frac{n-1}{n}\frac{nr}{nr-1}\frac{n^4r^4 - 2n^3r^3 - 5n^2r^2 + 22nr - 56}{[n^2r^2 - nr + 2]^2};$$

bei $nr = 10$ erhält man hieraus:

$$1 + \frac{2}{r-1}\frac{n-1}{n}\left(1 + \frac{1}{7}\right) > EQ^4 > 1 + \frac{2}{r-1}\frac{n-1}{n}\left(1 - \frac{800}{8464}\right).$$

Falls die Grössen $\frac{1}{nr}\frac{\mu_4}{\mu_2^2}$, $\frac{1}{n^2r^2}\frac{\mu_6}{\mu_2^3}$, $\frac{1}{n^2r^2}\frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$ und $\frac{1}{n^3r^3}\frac{\mu_5\mu_3}{\mu_2^4}$ mit wachsendem n dem Grenzwerte 0 zustreben, strebt $\frac{E\alpha'\beta' - E\alpha' E\beta'}{[E\beta']^2}$ gleichzeitig dem Grenzwerte 0 und $E\frac{\alpha'}{\beta'}$ dem Grenzwerte $\left(\frac{E\alpha'}{E\beta'}\right)_{n=\infty} = 1$ zu. Unter diesen Voraussetzungen fallen die obere und die untere Grenze von EQ^4 bei $n = \infty$ zusammen; EQ^4 wird also bei $n = \infty$ gleich $1 + \frac{2}{r-1}$ und $E[Q^2 - 1]^2 = \frac{2}{r-1}$.

Sind hingegen die obigen Bedingungen nicht erfüllt, so wird dieser Schluss hinfällig. Man betrachte etwa den Fall von $\mu_2 = pq$, $\mu_k = pq[q^{k-1} + (-1)^k p^{k-1}]$, setze $p = \frac{m}{n}$ und lasse dann n unbegrenzt zunehmen; $\frac{1}{nr}\frac{\mu_4}{\mu_2^2}$ strebt unter diesen Verhältnissen dem Grenzwerte $\frac{1}{mr}$ und $\frac{1}{n^2r^2}\frac{\mu_6}{\mu_2^3}$ — dem Grenzwerte $\frac{1}{m^2r^2}$ zu; was die untere Grenze von A anbelangt, so erhält man aus (11), bei $n = \infty$,

$$A > \frac{1 - \frac{3}{mr} - \frac{4}{m^2r^2}}{\left[1 + \frac{1}{mr}\right]^2}$$

oder $A > 1 - \frac{5}{mr+1}$ und nicht $A > 1$. Man hat somit in diesem Falle, bei $n = \infty$,

$$\frac{2}{r-1} > E[Q^2 - 1]^2 > \frac{2}{r-1}\left(1 - \frac{5}{mr+1}\right).$$

Im Falle des Gesetzes der kleinen Zahlen versagt also auch die obige Methode (vgl. oben S. 231): es lässt sich mit ihrer Hilfe der mittlere Fehler von Q^2 selbst für $n = \infty$ nicht genau bestimmen, und die Frage, ob er mit wachsendem n

der Grenze $\sqrt{\frac{2}{r-1}}$, oder einem anderen, niedrigeren Grenzwerte zustrebt, bleibt unentschieden. Unter der, an sich plausiblen, aber in obiger Weise nicht zu beweisenden Annahme, dass auch unter diesen Voraussetzungen, bei $n = \infty$, $EQ^4 = E\frac{z^2}{y^2} = \frac{Ez^2}{Ey^2}$ wird, würde man, bei $n = \infty$,

$$E[Q^2 - 1]^2 = \frac{2}{r-1}\frac{rm}{rm+1}$$

erhalten.

V.

In gleicher Weise, wie oben, lässt sich die Grösse von EQ^4 auch in dem Falle bestimmen, wenn die Versuchszahlen von einer Serie zur anderen wechseln. Ohne auf die Analyse aller denkbaren Varianten des Divergenzkoeffizienten (vgl. Erstes Kapitel, § III) einzugehen, will ich bloss die oben mit Q^2 bezeichnete Abart näher ins Auge fassen. Hält man sich an die Bezeichnungen des § III des ersten Kapitels, so findet man in gleicher Weise, wie oben im § II dieses Kapitels, unter Beibehaltung der Bezeichnungen A, B und C:

$$EQ^4 = E\frac{w^2}{y^2} = \frac{1}{(r-1)^2}\left[\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{s_i} - \frac{r}{s} - \frac{r-1}{s}\right]B + \frac{r+1}{r-1}A,$$

$$1 = \frac{1}{s}B + \frac{s+1}{s-1}A$$

und hieraus

$$(14)\quad EQ^4 = 1 + \frac{2}{r-1}\frac{s-r}{s-1}A - \frac{s}{(r-1)^2}\left[\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{s_i} - \frac{r^2}{s}\right]\left[\frac{s+1}{s-1}A - 1\right].$$

Sind die Grössen s_i einander gleich, so ist $\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{s_i} - \frac{r^2}{s} = 0$ und wir kehren zur Formel (3) zurück. Sind die Grössen s_i

verschieden, so ist $\sum_{i=0}^{r} \frac{1}{s_i} - \frac{r^2}{s} > 0$: das Vorzeichen der Differenz der mittleren Fehler von Q^2 laut (14) und laut (3) hängt somit vom Vorzeichen der Differenz $\frac{s+1}{s-1} A - 1$ ab. Ist $\frac{s+1}{s-1} A - 1 < 0$, so stellt sich der mittlere Fehler von Q^2 um so grösser, je ungleichmässiger die einzelnen Versuche auf die Serien verteilt sind. Ist $\frac{s+1}{s-1} A - 1 > 0$, so wird im Gegenteil der mittlere Fehler von Q^2 durch die ungleichmässige Verteilung der Versuche auf die Serien reduziert. Schliesslich bleibt er durch die Verteilung unbeeinflusst, wenn $\frac{s+1}{s-1} A - 1 = 0$ ist.

Falls die Variable x mit gleichen Wahrscheinlichkeiten die Werte 1 und 0 annehmen kann, erhalten wir aus (13), bei $s > 5$, $\frac{s+1}{s-1} A - 1 > 0$. In diesem Falle ist somit der mittlere Fehler des Divergenzcoeffizienten um so geringer, je ungleichmässiger sich die Versuche auf die einzelnen Serien verteilen. Im Falle der GAUSS'schen Verteilung gestatten die oben festgestellten Grenzen für A kein sicheres Urteil über das Vorzeichen der Differenz $\frac{s+1}{s-1} A - 1$.

Wenn mit wachsendem s alle Grössen s_i in der Weise zunehmen, dass $\frac{s_i}{s}$, bei $s = \infty$, gleich einer endlichen Grösse γ_i wird, so strebt $E[Q^2 - 1]^2$ dem Grenzwerte $\frac{2}{r-1}$ zu, falls A, bei $s = \infty$, gleich 1 wird. Nimmt A hingegen bei $s = \infty$ einen von 1 verschiedenen Wert an, so strebt $E[Q^2 - 1]^2$ mit wachsendem s einem von $\frac{2}{r-1}$ verschiedenen Grenzwerte zu. Wird etwa A, bei $s = \infty$, gleich $\frac{rm}{rm+1}$ (vgl. oben S. 245), so wird gleichzeitig

$$E[Q^2 - 1]^2 = \frac{2}{r-1} \frac{rm}{rm+1} \left\{ 1 + \frac{1}{2rm} \frac{1}{r-1} \left[\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\gamma_i} - r^2 \right] \right\}.$$

Der mittlere Fehler von Q^2 ist unter diesen Voraussetzungen um so grösser, je ungleichmässiger die Verteilung der Versuche auf die einzelnen Serien ist. Er kann, je nachdem, ob $\frac{1}{r-1}\left[\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\gamma_i}-r^2\right]>2, =2,$ oder <2 ist, sowohl kleiner, als $\sqrt{\frac{2}{r-1}}$, wie gleich $\sqrt{\frac{2}{r-1}}$, wie namentlich auch grösser als $\sqrt{\frac{2}{r-1}}$ sein.

Drittes Kapitel.

1.

Die Frage nach dem Verteilungsgesetze der Q^2-Werte ist in der statistischen Litteratur nur gelegentlich gestreift worden. Man hat in der Regel mit der Bortkiewicz'schen Formel $\left(E[Q^2-1]^2=\frac{2}{r}\right)$ in der Weise operiert, als ob die Verteilung eine Gauss'sche wäre, ohne diese Annahme irgendwie zu begründen. Prof. v. Bortkiewicz hat zwar neuerdings zur Begründung darauf hingewiesen, dass Q^2 »einen arithmetischen Durchschnitt darstellt»,[1] ein solcher Hinweis ist jedoch nicht hinreichend. Selbst in dem Falle, wenn die Grössen $x_1, x_2, \ldots x_s$, deren arithmetischer Durchschnitt — $x_{(s)}$ — in Betracht gezogen wird, von einander unabhängig sind, strebt bekanntlich das Verteilungsgesetz von $x_{(s)}$ mit wachsendem s der Laplace-Gauss'schen Form bloss unter gewissen Voraussetzungen zu. Was aber Q^2 anbelangt, so kommt noch die Komplication hinzu, dass Q^2 einen arithmetischen Durchschnitt von gegenseitig abhängigen Grössen darstellt. Unter solchen Umständen müssen nicht nur gewisse Bedingungen in Bezug auf die Verteilungsgesetze der Summanden, sondern auch Bedingungen in Bezug auf die Art der gegenseitigen Abhängigkeit zwischen denselben erfüllt

[1] Bortkiewicz, Realismus und Formalismus in der mathematischen Statistik, S. 234 (Allg. Stat. Archiv, Bd. IX; München, 1915); cf. Bortkiewicz, Die Iterationen, S. 196 (Berlin, 1917).

sein, damit das Verteilungsgesetz von $x_{(s)}$ sich mit wachsendem s der GAUSS'schen Form nähere.

Wenn die Grössen $\frac{n\,\mu_h}{[n\,\mu_2]^{h/2}}$ bei beliebigen ganzzahligen positiven h mit wachsendem n dem Grenzwerte 0 zustreben, lässt sich die Frage für $n = \infty$ ohne Schwierigkeit in der Weise lösen, dass man nach (10) die untere Grenze von $EQ^{2k} = E\frac{z^k}{y^k}$ $(k = 3, 4, 5, \ldots)$ bestimmt. Berücksichtigt man nämlich, dass in dem Falle, wenn $\alpha = f(\beta) + \gamma$ ist, wo γ mit β nicht zusammenhängt, $E\alpha\beta - E\alpha \, . \, E\beta = Ef(\beta)\beta - Ef(\beta)\,E\beta$ ist, so überzeugt man sich leicht, dass mit wachsendem n $\frac{Ez^k y^k - Ez^k\, Ey^k}{[Ey^k]^2}$ dem Grenzwerte 0 zustrebt und folglich, laut (10), bei $n = \infty$

$$EQ^{2k} > \left(\frac{Ez^k}{Ey^k}\right)_{n=\infty} \quad \text{oder}$$

$$EQ^{2k} > \left\{\frac{n^k(nr-1)^k}{(r-1)^k} \frac{E\left[\sum_{i=1}^{r}(x_{i,(n)} - x_{(nr)})^2\right]^k}{E\left[\sum_{h=1}^{nr}(x_h - x_{(nr)})^2\right]^k}\right\}_{h=\infty}$$

ist.

Nun ist aber bekanntlich im Falle, wenn die Variable z dem GAUSS'schen Verteilungsgesetze folgt,

$$E\left[\sum_{j=1}^{s}(z_j - z_{(s)})^2\right]^k = (s-1)(s+1)(s+3)\cdots(s+2k-3)\,\nu_2^k,$$

wobei durch z_j der Wert, den z beim j-ten Versuche erhält, durch $z_{(s)}$ der arithmetische Durchschnitt aller s empirischen Werte von z $\left(z_{(s)} = \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s} z_j\right)$ und durch ν_2 die Grösse $E[z - Ez]^2$ bezeichnet werden. Da das Verteilungsgesetz von $x_{i,(n)}$ unter obigen Voraussetzungen sich mit wachsendem n der GAUSS'schen Form nähert, so ist

$$\left(E\left[\sum_{i=1}^{r}(x_{i,(n)}-x_{(nr)})^2\right]^k\right)_{n=\infty}=(r-1)(r+1)(r+3)\cdots(r+2k-3)\frac{\mu_2^k}{n^k}$$

und

$$\left(E\frac{n^k}{(r-1)^k}\left[\sum_{i=1}^{r}(x_{i,(n)}-x_{(nr)})^2\right]^k\right)_{n=\infty}=$$

$$=\left(1+\frac{2}{r-1}\right)\left(1+\frac{4}{r-1}\right)\cdots\left(1+\frac{2(k-1)}{r-1}\right)\mu_2^k.$$

Da anderseits

$$\left(\frac{1}{(nr-1)^k}E\left[\sum_{h=1}^{nr}(x_h-x_{(nr)})^2\right]^k\right)_{n=\infty}=\mu_2^k$$

ist, so ist demnach, bei $n=\infty$,

$$(15)\qquad EQ^{2k}>\left(1+\frac{2}{r-1}\right)\left(1+\frac{4}{r-1}\right)\cdots\left(1+\frac{2(k-1)}{r-1}\right).$$

Bei $k=3$ und $k=4$ findet man aus (15):

$$(16)\qquad EQ^6>1+\frac{6}{r-1}+\frac{8}{(r-1)^2},$$

$$(17)\qquad EQ^8>1+\frac{12}{r-1}+\frac{44}{(r-1)^2}+\frac{48}{(r-1)^3}.$$

Diese Ungleichheiten lassen deutlich erkennen, dass das Verteilungsgesetz von Q^2 bei wachsendem n einer Form zustrebt, die von der GAUSS'schen wesentlich verschieden ist. Wäre das Verteilungsgesetz von Q^2 symmetrisch, so würde man, aus $E[Q^2-1]^3=0$, $EQ^6=1+\frac{6}{r-1}$, anstatt $EQ^6>1+\frac{6}{r-1}+\frac{8}{(r-1)^2}$ erhalten. Wäre das Verteilungsgesetz von Q^2 das GAUSS'sche, so hätte man $EQ^8=1+$ $+\frac{12}{r-1}+\frac{12}{(r-1)^2}$ haben müssen.

Bei mässigen Werten von r, wie sie in der statistischen Praxis vorzukommen pflegen,[1] bleibt somit das Verteilungsgesetz der Q^2-Werte selbst bei $n = \infty$ und unter der Voraussetzung, dass $\left(\frac{n'\mu_h}{[n'\mu_2]^{h/2}}\right)_{n=\infty} = 0$ ist, merklich asymmetrisch:[2] der häufigste Wert (die Mode) von Q^2, sowie die Mediane, sind < 1; negative Werte von $Q^2 - 1$ kommen zahlreicher vor, als positive; ihre Durchschnittsgrösse ist aber entsprechend geringer.

II.

1) Die Frage nach dem Werte von EQ ist mathematisch interessant, bietet aber kein grösseres statistisches Interesse, seit man eingesehen hat, dass die Berechnung von Q^2 sowohl aus principiellen, wie aus kalkulatorischen Gründen, der früher üblichen Berechnung von Q vorzuziehen ist. Wie die meisten der auf den Ausbauder mathematischen Theorie des Divergenzcoeffizienten sich beziehenden Fragen, wurde auch diese Frage von Prof. v. BORTKIEWICZ gestellt,[3] von dem auch die erste Lösung stammt: $EQ = 1 - \frac{1}{4r}$. Die Beweisführung, welche zu dieser Lösung führt, ist jedoch nicht hinreichend streng. BORTKIEWICZ geht von den Annahmen aus, dass $EQ^2 = 1$ und $EQ^4 = 1 + \frac{2}{r}$ sind. Die erste dieser Annahmen ist, wie von mir nachgewiesen worden ist, unter allen Verhältnissen, bei jedweden n und r und beliebigem Verteilungsgesetz von x, richtig. Was die zweite Annahme anbelangt, so ist sie unbewiesen und in allgemeiner Form nachweisbar unrichtig. Will man sich an den Grenzfall von $n = \infty$ halten, so wäre sie unter den oben mehrmals formu-

[1] In der oben zitierten Abhandlung von BORTKIEWICZ (Realismus und Formalismus, S. 234) werden z. B. Fälle betrachtet, wo $r = 9$ und $r = 14$ ist; über 25 geht r in keinem der da behandelten Beispiele hinaus.

[2] Die Behauptung von Prof. v. BORTKIEWICZ, dass man verlangen könne, »dass bei einer grösseren Anzahl von Beobachtungsreihen q und n ungefähr gleich oft positiv wie negativ ausfallen« (Realismus und Formalismus, S. 231), beruht auf der Annahme der GAUSS'schen Verteilung der Q^2-Werte und fällt mit derselben

[3] L. v. BORTKIEWICZ, Der wahrscheinlichkeitstheoretische Standpunkt im Lebensversicherungswesen (Oesterreichische Revue, Wien. 1906).

lierten Voraussetzungen (vgl. S. 244) durch $EQ^4 = 1 + \frac{2}{r-1}$ zu ersetzen.

Die für EQ^2 und EQ^4 angenommenen Werte werden von BORTKIEWICZ in die annähernd gelten sollende Beziehung

$$EQ = 1 - \frac{1}{8} E[Q^2 - 1]^2$$

eingesetzt, woraus sich eben $EQ = 1 - \frac{1}{4r}$ $\left(\text{bezw. } EQ = 1 - \frac{1}{4(r-1)}\right)$ ergiebt. Die Ableitung dieser Beziehung ist jedoch gleichfalls nicht einwandfrei. Man setze: $z = Ez^2 - A$ und bezeichne EA mit α. Man findet leicht: $z^2 = [Ez^2]^2 - 2AEz^2 + A^2$, woraus $EA^2 = (1 + 2\alpha) Ez^2 - [Ez^2]^2$ folgt. In gleicher Weise findet man

$$Ez^4 = [Ez^2]^4 - 4[Ez^2]^3\alpha + 6[Ez^2]^2 . EA^2 - 4Ez^2 . EA^3 + EA^4.$$

Ersetzt man hier EA^2 durch $(1 + 2\alpha)Ez^2 - [Ez^2]^2$ und streicht die Glieder, welche EA^3 und EA^4 enthalten, so entsteht eine Gleichung ersten Grades, aus der α bestimmt werden kann. Bei $Ez^2 = 1$ ergiebt diese Gleichung: $\alpha = \frac{1}{8} E[z^2 - 1]^2$.

Die Anwendbarkeit des von BORTKIEWICZ vorgeschlagenen Verfahrens zur Bestimmung von Ez auf Grund der bekannten Werte von Ez^2 und Ez^4 hängt von der Berechtigung ab, EA^3 und EA^4 zu vernachlässigen. Gerade in dem Falle des Divergenzcoeffizienten erscheint die Berechtigung hierzu eher zweifelhaft. Bei $Ez^2 = 1$ ist nämlich $EA^2 = 2\alpha$. Da nun $EA^4 > [EA^2]^2$ ist, so ist $EA^4 > 4\alpha^2$ oder, wenn man von $EQ = 1 - \frac{1}{4r}$ ausgehen will, $EA^4 > \frac{1}{4r^2}$. In der Gleichung $EQ^4 = 1 + 8\alpha - 4EA^3 + EA^4$ ist also das letzte, zu streichende, Glied schwerlich als verschwindend klein in Vergleich zu α anzusehen. Um das Verfahren zu rechtfertigen, hätte man nachweisen müssen, dass $EA^4 - 4EA^3$ verschwindend klein im Vergleich zu 8α sei. Ein solcher Nachweis lässt sich kaum liefern. Nicht einmal das Vorzeichen von $EA^4 - 4EA^3$ lässt sich mit Sicherheit bestimmen.

Berechnet man also EQ nach der Formel: $EQ = 1 - \frac{1}{8} E[Q^2 - 1]^2$, so begeht man einen Fehler, über dessen Grösse man gar nichts weiss, und erhält einen Wert von EQ, der sowohl grösser, wie kleiner, als der wahre Wert sein kann.

2) Eine sichere Handhabe, um einen Begriff von der Grösse von EQ auf Grundlage der Werte von EQ^2 und EQ^4 zu gewinnen, hat man in dem bekannten LJAPOUNOFF'schen Lemma: Wenn x keine negativen Werte annehmen kann und $l > m > n > 0$ ist, so ist

$$[Ex^m]^{l-n} < [Ex^n]^{l-m} . [Ex^l]^{m-n} .$$ [1]

Aus $(EQ) . (EQ^3) > [EQ^2]^2$ erhält man $EQ > \frac{1}{EQ^3}$ und aus $(EQ^2) . (EQ^4) > [EQ^3]^2$ erhält man $EQ^3 < \sqrt{\frac{r+1}{r-1}}$, woraus $EQ > \sqrt{\frac{r-1}{r+1}}$ folgt. Da anderseits $EQ^2 > [EQ]^2$ ist, so ist

$$\sqrt{1 - \frac{2}{r+1}} < EQ < 1 .$$

Diese Ungleichheiten gelten unter allen Verhältnissen, bei jedem r und jedem n, sowie bei beliebigem Verteilungsgesetz von x. Unter Zugrundelegung eines bestimmten Verteilungsgesetzes von Q^2 liesse sich EQ, selbstverständlich, genauer bestimmen.

Die oben erzielten mathematischen Ergebnisse berechtigen zu gewissen Schlüssen, die für die statistische Praxis von Belang sind.

Der theoretische Wert von $E[Q^2 - 1]^2$ findet in der statistischen Praxis eine dreifache Verwendung:

[1] Man kann gleichfalls von den Ungleichheiten von STIELTJES ausgehen, die dem LJAPOUNOFF'schen Lemma aequivalent sind, vgl. STIELTJES, Recherches sur les fractions continues, p. 49 (Annales de la faculté de Toulouse, vol. VII).

1) Am mittleren Fehler von Q^2 werden die Abweichungen der empirisch festgestellten Q^2-Werte gemessen mit der Absicht, ein Urteil über die Wahrscheinlichkeit zu bilden, dass die betreffende Abweichung innerhalb des Spielraumes der zufälligen Schwankungen liegt;

2) Der mittlere Fehler einer Reihe empirischer Q^2-Werte wird mit dessen mathematischer Erwartung verglichen;

3) Unter der Annahme des GAUSS'schen Verteilungsgesetzes wird die faktische Verteilung einer Reihe empirischer Q^2-Werte mit der erwartungsmässigen verglichen.

Die Annahme der GAUSS'schen Verteilung lässt sich, wie wir gesehen haben, in keiner Weise rechtfertigen: selbst bei $n = \infty$ und unter der, dazugünstigsten, Voraussetzung, dass $\left(\frac{n\,\mu_h}{[n\,\mu_2]^{h/2}}\right)_{n=\infty} = 0$ ist, bleibt die Verteilung der Q^2-Werte ausgesprochen asymmetrisch. Mit wachsendem r verringert sich allerdings die Asymmetrie, und die Gestalt der Verteilungskurve nähert sich einigermassen der GAUSS'schen Form; bei den in der Regel vorkommenden Werten von r weicht jedoch die Verteilung merklich von der GAUSS'schen ab, so dass der Vergleich der faktischen Verteilung mit der GAUSS'schen wenig Sinn hat. Von erheblichem Interesse könnte hingegen der Vergleich mit derjenigen PEARSON'schen asymmetrischen Verteilungskurve sein, welche für die Momente die durch (15) gegebenen Werte ergiebt. (Cf. unten, Dritte Abhandlung, Zweites Kapitel, § III.)

Aus gleichen Gründen ist Vorsicht geboten bei der Schätzung der Wahrscheinlichkeit, dass die beobachtete Abweichung eines empirischen Q^2-Wertes von 1 die Grenzen des Zufälligen nicht überschreitet. Legt man der Schätzung die Annahme der LAPLACE-GAUSS'schen Verteilung zu Grunde, so werden die negativen Abweichungen, — namentlich wenn sie grösser ausfallen, — unterschätzt, die positiven hingegen überschätzt. Bei nicht zu kleinen r-Werten dürfte jedoch der Schätzungsfehler kaum so erheblich sein, dass die Schätzung als wertlos anzusehen wäre: in der Regel wird man sich wohl an die KRAMP'sche Tafel des LAPLACE'schen Integrals halten dürfen um eine ungefähre Vorstellung von der Grössenordnung der betreffenden Wahrscheinlichkeit in jedem Einzelfalle zu bilden.

Was die Grösse des mittleren Fehlers von Q^2 anbelangt, von der man auszugehen hat, so wird man in der Praxis im Falle, wenn $\left(\frac{n\,\mu_h}{[n\,\mu_2]^{h/2}}\right)_{n=\infty} = 0$ ist, unbesorgt $E[Q^2-1]^2 = \frac{2}{r-1}$ annehmen dürfen: der Fehler, der hierbei begangen wird, wird in der Regel unerheblich sein; mit Hilfe der oben abgeleiteten Ungleichheiten lässt er sich erforderlichenfalls roh abschätzen. Sind die Versuchszahlen der einzelnen Serien einander gleich, so wird der mittlere Fehler von Q^2 stets zu hoch gegriffen, wenn man $E[Q^2-1]^2 = \frac{2}{r-1}$ setzt. Sind sie hingegen von einander sehr verschieden, so scheint es nicht ausgeschlossen zu sein, dass er hierdurch gelegentlich unterschätzt wird.

Von der Beziehung $E[Q^2-1]^2 = \frac{2}{r-1}$ wird man unter der Voraussetzung, dass $\left(\frac{n\,\mu_h}{[n\,\mu_2]^{h/2}}\right)_{n=\infty} = 0$, in der Regel auch bei unmittelbaren Vergleichen zwischen den empirisch festgestellten Werten des mittleren Fehlers von Q^2 und dessen erwartungsmässiger Grösse ausgehen dürfen. Bloss darf man hierbei nicht übersehen, dass der mittlere Febler der empirischen Bestimmung des mittleren Fehlers von Q^2 sehr gross ist. Nimmt man etwa an, dass $EQ^6 = 1 + \frac{6}{r-1} + \frac{8}{(r-1)^2}$ und $EQ^8 = 1 + \frac{12}{r-1} + \frac{44}{(r-1)^2} + \frac{48}{(r-1)^3}$, so erhält man ja:

$$E\left\{[Q^2-1]^2 - \frac{2}{r-1}\right\}^2 = \frac{8}{(r-1)^2} + \frac{48}{(r-1)^3}.$$

Unter der Voraussetzung, dass $\left(\frac{n\,\mu_h}{[n\,\mu_2]^{h/2}}\right)_{n=\infty} = 0$ ist, lässt sich also die übliche statistische Praxis im wesentlichen aufrechterhalten, — man soll bloss von Vergleichen der faktischen Verteilung der Q^2-Werte mit der Gauss'schen absehen. In den Fällen hingegen, wo die obige Bedingung nichterfüllt wird (also namentlich im Bereiche des »Gesetzes der kleinen Zahlen»), lässt sich über die Grösse des mittleren Fehlers des Divergenzcoeffizienten gegenwärtig mit Sicherheit

nur behaupten, dass $E[Q^2-1]^2 < \frac{2}{r-1}$ ist, wenn die Versuchszahlen der einzelnen Serien untereinander gleich sind. Die Grösse der Differenz $E[Q^2-1]^2 - \frac{2}{r-1}$ lässt sich vorläufig nicht abschätzen und es bleibt sogar fraglich, ob sie bei wachsendem n dem Grenzwerte 0 zustrebt: es sieht vielmehr so aus, als ob sie selbst bei $n=\infty$ negativ wäre.

Noch weniger weiss man über die Grösse des mittleren Fehlers der Divergenzcoeffiziente, die im Bereiche des »Gesetzes der kleinen Zahlen» auf Grundlage von Versuchsserien mit von einander verschiedenen Versuchszahlen berechnet werden: unter solchen Verhältnissen kann der mittlere Fehler von Q^2 sowohl kleiner, wie auch grösser, als $\sqrt{\frac{2}{r-1}}$, sein, und die Unterschiede in den Versuchszahlen brauchen, wie es scheint, nicht einmal auffällig gross zu sein, damit $E[Q^2-1]^2 > \frac{2}{r-1}$ wird.

Alle auf die Beziehung $E[Q^2-1]^2 = \frac{2}{r-1}$ sich gründenden Schlüsse im Bereiche des »Gesetzes der kleinen Zahlen» müssen mithin bis auf weiteres, als in der Luft schwebend, gelten. Man hätte eigentlich auf die Berechnung des Divergenzcoeffizienten in diesen Fällen lieber verzichten sollen, bis man der mathematischen Schwierigkeiten des Problems Herr wird, — das Opfer wäre ja kein schwerwiegendes, da man in der Berechnung der »wesentlichen Komponente» (vgl. die unten folgende Abhandlung) ein zweckmässigeres und inhaltreicheres Forschungsverfahren zur Hand hat, welches zweifellos dazuberufen ist, die Berechnung des Divergenzcoeffizienten aus der statistischen Praxis überhaupt allmählich zu verdrängen.

Anhang.

$E(x_i-x_j)^2=2\mu_2,$

$E(x_i-x_j)^4=2\mu_4+6\mu_2^2,$

$E(x_i-x_j)^6=2\mu_6+30\mu_4\mu_2-20\mu_3^2,$

$E(x_i-x_j)^8=2\mu_8+56\mu_6\mu_2-112\mu_5\mu_3+70\mu_4^2,$

$E(x_i-x_j)^2(x_i-x_h)^2=\mu_4+3\mu_2^2,$

$E(x_i-x_j)^4(x_i-x_h)^2=\mu_6+9\mu_4\mu_2-4\mu_3^2+6\mu_2^3,$

$E(x_i-x_j)^2(x_i-x_h)^2(x_i-x_f)^2=\mu_6+3\mu_4\mu_2+4\mu_2^3,$

$E(x_i-x_j)^2(x_i-x_h)^2(x_f-x_h)^2=4\mu_4\mu_2-2\mu_3^2+4\mu_2^3,$

$E(x_i-x_j)^2(x_i-x_h)^2(x_j-x_h)^2=6\mu_4\mu_2-6\mu_3^2-6\mu_2^3,$

$E(x_i-x_j)^4(x_i-x_f)^2(x_j-x_h)^2=4\mu_6\mu_2-8\mu_5\mu_3+6\mu_4^2+16\mu_4\mu_2^2-$
$-8\mu_3^2\mu_2+6\mu_2^4,$

$E(x_i-x_j)^4(x_i-x_f)^2(x_f-x_h)^2=2\mu_6\mu_2-2\mu_5\mu_3+2\mu_4^2+22\mu_4\mu_2^2-$
$-12\mu_3^2\mu_2+6\mu_2^4,$

$E(x_i-x_j)^2(x_i-x_f)^2(x_i-x_h)^2(x_j-x_g)^2=2\mu_6\mu_2-2\mu_5\mu_3+\mu_4^2+$
$+8\mu_4\mu_2^2-4\mu_3^2\mu_2+5\mu_2^4,$

$E(x_i-x_j)^2(x_i-x_f)^2(x_i-x_h)^2(x_j-x_f)^2=2\mu_6\mu_2-4\mu_5\mu_3+2\mu_4^2+$
$+2\mu_4\mu_2^2-4\mu_3^2\mu_2-6\mu_2^4,$

$E(x_i-x_j)^2(x_i-x_f)^2(x_j-x_h)^2(x_f-x_g)^2=\mu_4^2+10\mu_4\mu_2^2-4\mu_3^2\mu_2+$
$+5\mu_2^4,$

$E(x_i-x_j)^2(x_i-x_f)^2(x_f-x_h)^2(x_h-x_g)^2=\mu_4^2+10\mu_4\mu_2^2-4\mu_3^2\mu_2+$
$+5\mu_2^4,$

$E(x_i-x_j)^2(x_i-x_f)^2(x_i-x_h)^2(x_g-x_l)^2=2\mu_6\mu_2+6\mu_4\mu_2^2+8\mu_2^4,$

$E(x_i-x_j)^2(x_i-x_f)^2(x_h-x_g)^2(x_l-x_r)^2=4\mu_4\mu_2^2+12\mu_2^4,$

$E(x_i-x_j)^2(x_i-x_f)^2(x_j-x_h)^2(x_f-x_h)^2=2\mu_4^2+12\mu_4\mu_2^2+18\mu_2^4.$

(Fortsetzung folgt)

Litteratur.

L. v. Bortkiewicz. *Die Iterationen.* Ein Beitrag zur Wahrscheinlichkeitstheorie. Verlag von Julius Springer. Berlin 1917.

Bei einem Vergleich zwischen den Voraussagungen der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Erfahrung geht man in der Regel von dem sog. Bernoullischen Theorem oder einer der wohlbekannten Verallgemeinerungen desselben aus. Gewöhnlich pflegt man dabei, sei es dass die Erfahrung aus unter möglichst »idealen» Bedingungen ausgeführten Experimenten (mit Karten, Würfeln o. dergl.) gewonnen oder durch statistische Beobachtungen an den Erscheinungen des menschlichen Lebens gesammelt ist, die Häufigkeit, mit welcher ein gewisses Ereignis auftritt, in einer Anzahl Versuchsreihen bezw. Populationen zu bestimmen und dann zu untersuchen, ob die Art, in welcher sich die so gewonnenen Häufigkeitszahlen um ihren erwarteten Wert bezw. ihren Mittelwert gruppieren, mit dem theoretischen Schema in Übereinstimmung steht. Das Prinzip besteht also hier darin, dass man die Anzahl Vorkommnisse eines gewissen Ereignisses in Betracht zieht, ohne die *Reihenfolge*, in welcher dieses sich wiederholt, zu berücksichtigen. Will man indessen, um den Vergleich zu vertiefen, die Untersuchung auch auf die Reihenfolge der Ereignisse erstrecken, so liegt es nahe zu prüfen, wie oft es geschieht, dass das betreffende Ereignis sich nacheinander wiederholt, ein, zwei, drei usw. Male, und im Gegensatz hierzu, wie oft es sich ereignet, dass es ausbleibt, ein, zwei, drei usw. Male hintereinander. Solche Wiederholungen einer gewissen »Länge» nennt Bortkiewicz Iterationen. (Auf Deutsch heissen sie oft »reine Gruppen», auf Englisch »runs».)

Betrachtungen über Iterationen trifft man schon bei Multatuli (dem holländischen Verfasser E. D. Dekker, 1820—1887) und bei Pearson (1897). Den Anlass, dass das Problem auf die Tagesordnung kam, gab aber in erster Reihe der würzburgische Psychologieprofessor Karl Marbe. In einer Arbeit mit dem Titel »Naturphilosophische Untersuchungen zur Wahrscheinlichkeitslehre», Leipzig 1899, hatte dieser auf Grund mehrerer vorzugsweise vom Roulett in Monte Carlo entnommener Beispiele beobachten zu können geglaubt, dass Iterationen, von »rouge» und »noir», sobald sie eine gewisse Länge überstiegen, in Wirklichkeit seltener vorkommen, als theoretisch zu erwarten war. Die Marbeschen Beispiele und seine Erklärung derselben (die übrigens nicht einmal originell ist, da man in derselben den mit dem Namen D'Alembert verknüpften in der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsberechnung so wohlbekannten Standpunkt sehr wohl erkennt) regten sehr umfassende Erörterungen an, in denen sich sehr verschiedene Ansichten geltend machten, die aber doch beinahe einstimmig auf eine Zurückweisung der Marbeschen Konklusionen aus-

gingen. In einer späteren Arbeit (Die Gleichförmigkeit in der Welt, München 1916) fand dieser auch Veranlassung, seine Formeln nicht unbedeutend zu berichtigen, während er jedoch betreffs seiner, nun mit einem teilweise neuen, zum Teil der Statistik über das Geschlecht der geborenen Kinder entnommenen Material illustrierten Schlüsse in wesentlichen Punkten auf seiner ursprünglichen Auffassung verharren zu können meinte.

H. Bruns hatte das Iterationsproblem schon einer eingehenden mathematischen Behandlung unterzogen, als Bortkiewicz die Frage aufnahm. Während die Bruns'sche Darstellung sich weit avanzierter mathematischer Methoden bedient und sich ausschliesslich an Mathematiker von Fach wendet, hat Bortkiewicz sich die Aufgabe gestellt, eine auf die niedere Algebra und die einfachere Wahrscheinlichkeitsrechnung gestützte Entwicklung der Theorie der Iterationen zu geben. Und man muss Bortkiewicz dies und die in stilistischer und methodologischer Beziehung meisterhafte Weise, in der dieser Plan in allen Teilen durchgeführt ist, zu Danke wissen. Überhaupt dürfte man sagen können, dass die Iterationen durch die Bortkiewicz'sche Arbeit eine wirklich vollendete Theorie erhalten haben, obwohl Übertreibung darin liegen dürfte, wenn er sagt, dass die Bruns'sche Behandlungsweise sich im Verhältnis zu seiner ungefähr wie eine Auflösung der Gleichung $2x - 3 = 5$ mit Hilfe von Determinanten ausnimmt. Ein Zugeständnis in dieser Richtung macht auch der Verf., indem er in Frage stellt, ob die Bruns'sche Theorie sich nicht bei der Behandlung verwickelterer Probleme innerhalb der »Iteratorik» als zweckmässig erweisen kann.

Dem Inhalte nach zerfallen »Die Iterationen» in drei in gewisser Beziehung freistehende Abteilungen. Die erste Abteilung beschäftigt sich einleitungsweise mit Definitionen und begriffsmässigen Ermittelungen. Auch wird eine auf diesem Gebiete lange vermisste Terminologie eingeführt. Die zweite Abteilung wird durch eine vorbereitende Darstellung gewisser Hauptsätze der Wahrscheinlichkeitslehre eingeleitet, und im Anschlusse hieran folgt dann die an die Wahrscheinlichkeitstheorie orientierte Lehre des Verf:s über die Iterationen. Die dritte Abteilung endlich ist der Anwendung und Vergleichen mit mathematischen und statistischen Zahlenreihen gewidmet und ausserdem zum grossen Teil mit einer eingehenden kritischen Prüfung der verschiedenen in der Literatur zum Vorschein gekommenen Anschauungen angefüllt. Kritische Betrachtungen sind übrigens überall in den Text und in zahlreiche Fussnoten eingeflochten. An einigen Stellen ist diese Kritik dazu recht temperamentvoll und oft in das Gewand beissenden Sarkasmus gekleidet. Obschon Verf. für seine Ansichten selbst die Verantwortung zu tragen hat, kann Rezensent indessen nicht finden, dass die Grenzen einer objektiven Kritik irgendwo überschritten worden sind. Um der Darstellung selbst willen wäre es jedoch wünschenswert gewesen, wenn verschiedene Anmerkungen gegen reine Kleinigkeiten ausgeschlossen worden wären.

Die in der ersten Abteilung des Buches gemachten systematisierenden Aufteilungen und theoretischen Distinktionen verdienen die

grösste Aufmerksamkeit. Sie schliessen sich innig an die früheren, um die theoretische und mathematische Statistik äusserst verdienstvollen Arbeiten des Verfassers an. Verf. beginnt seine Darstellung mit einer allgemeinen Definition des Begriffes Statistik. »Fasst man» — sagt er —» beliebige Erscheinungen, die unter einen gemeinsamen Begriff fallen . . . gedanklich zusammen, so kommt ein Ganzes zustande, das man als eine *empirische Vielheit* bezeichnen kann. Dadurch dass man die Elemente (Einzelfälle), aus denen sich eine empirische Vielheit zusammensetzt, als solche der Beobachtung unterwirft und die so gewonnenen Beobachtungsresultate summiert, macht man die betreffende empirische Vielheit zum Gegenstand der *Statistik.*» Die Statistik wird also hier als eine immer mit einer konkreten Massenbeobachtung verbundene Summierung empirischer Daten aufgefasst.

In gewissem Sinne unterschieden von der Statistik selbst kann man die allgemeine Zusammenfassung des betreffs der empirischen Vielheit jeweils begrifflich Gegebenen betrachten. Diese Zusammenfassung wird vom Verf. »Sylleptik» genannt. Es handelt sich also hier um die *Vorbereitung* zu einer statistischen Summierung, die notwendig ist, wenn diese nicht bloss »Selbstzweck» werden, sondern den Charakter einer ihrer wissenschaftlichen Aufgabe bewussten Forschung erhalten soll. Um einige gerade in diesem Zusammenhang treffende Ausdrücke von Prof. Fahlbeck (aus einem Briefe an den Rezensenten) anzuwenden, dürfte man sagen können, dass die Sylleptik die »Begriffsanalyse ohne Ziffern» ist, durch die man sich dafür bestimmt, »wo und wie die zahlenmässige Behandlung einzusetzen ist, um eine klare Einsicht in die behandelte Sache zu erhalten».

Der Sylleptik nebengeordnet und in gleicher Weise von Bedeutung für die statistische Wissenschaft ist die vom Verf. mit dem Namen »Stochastik» — ein schon von Jacob Bernoulli angewendeter Ausdruck — bezeichnete, an die Wahrscheinlichkeitstheorie orientierte Lehre von den rein numerischen Eigenschaften der statistischen Masszahlen. »Die Stochastik ist nicht sowohl Wahrscheinlichkeitstheorie schlechthin, als vielmehr Wahrscheinliehkeitstheorie in ihrer Anwendung, sei es auf empirische Vielheiten überhaupt, sei es auf empirische Vielheiten einer bestimmten Art.» Mit Stochastik meint man also die Theorie der mathematischen Statistik zum Unterschied von ihrer Methodenlehre. Von Interesse kann es sein, hier folgenden Ausspruch anzuführen, dem wir uns voll und ganz anschliessen, »dass erst die Durchdringung der Statistik mit der stochastischen Auffassungsweise ihr nicht nur einen höheren theoretischen Wert, sondern auch eine grössere praktische Bedeutung verleiht».

Eine endliche Anzahl, N, Elemente, die mit den Nummern $1, 2, 3 \ldots N$ versehen sind, sei gegeben. Eine Anzahl beliebig diesem »Vorrat» entnommener Elemente, jedes durch seine Nummer gekennzeichnet, nennt Verf. eine »Masse». Zu dem Begriff Masse gehört indessen nicht, dass alle die darin enthaltenen Elemente verschieden sind; ein und dasselbe Element kann vielmehr mehrmals in derselben Masse enthalten sein. Besteht eine Masse aus lauter verschiedenen Elementen (verschiedenen Nummern), heisst sie eine »Gruppe».

Bei seiner weiteren Behandlung bedient sich der Verf. der, wie man es nennen könnte, *zyklischen* Betrachtungsweise. Unser Vorrat an N in Nummerfolge geordneten Elementen wird nämlich nicht als eine Reihe mit freiliegenden Enden, sondern als auf eine Kreisperipherie eingeführt gedacht, so dass das Element Nr. N und das Element Nr. 1 nebeneinander kommen. *Jedes* Element des Vorrates ist somit von zwei »Nachbarelementen«, einem »vorgeordneten« und einem »nachgeordneten« umgeben. Besteht eine »Gruppe« aus n Elementen in *ununterbrochener* Reihenfolge, so heisst sie eine »Sequenz« der Länge n.

Sind die Elemente, ausser durch ihre Nummer, durch zwei oder mehrere alternative Eigenschaften charakterisiert (wenn wir uns auf zwei Eigenschaften beschränken, können wir sie A und B nennen), so kommt man zu dem Iterationsbegriffe. Die »A-Elemente« und »B-Elemente« können nämlich in einer gegebenen Sequenz entweder einander unaufhörlich »ablösen«, oder es kommen dort längere oder kürzere Folgen von einzig A-Elementen oder einzig B-Elementen vor. Diese Folgen sind natürlich selbst Sequenzen, d. h. sie bestehen aus einer laufenden Folge von Nummern. *Eine Iteration ist somit eine aus lauter A-Elementen oder lauter B-Elementen bestehende Sequenz.* Verf. unterscheidet hier auch zwischen verschiedenen Arten von Iterationen. Die wichtigsten sind die »vollständigen« Iterationen und die »unvollständigen« Iterationen. Besteht eine Iteration aus den Elementen Nr. $a, a+1, a+2 \ldots a+n-1$ (sie heisst dann eine Iteration der Länge n) und sind im Gesamtvorrat die Elemente $a-1$ und $a+n$ beide *anderer* Art als die in der Iteration enthaltenen, so ist diese »vollständig«. Ist dagegen eines dieser Elemente oder beide von derselben Art wie die Elemente der Iteration, so ist diese »unvollständig«. Für den Begriff vollständige Iteration ist es also von Bedeutung, dass man alle Elemente, die in einer Iteration von gleicher Art sind, mitnimmt, während eine unvollständige Iteration stets nur ein Teil einer vollständigen ist. Die vollständigen Iterationen werden auch an gewissen Stellen in der Literatur zum Unterschied von »übergreifenden Gruppen«, womit unvollständige Iterationen gemeint sind, »reine Gruppen« genannt. Ein in den Bemerkungen z. B. gegen MARBES erste Arbeit vorherrschendes Thema war, dass er seine Betrachtung, anstatt auf die vollständigen Iterationen, auf die unvollständigen Iterationen eingerichtet hatte.

Das eigentliche Iterationsproblem ensteht, wenn man sich denkt, dass der Zufall für jedes besondere Element entscheidet, ob es zu der Art A oder zu der Art B gehört. Dem Iterationsproblem in seiner *allgemeinsten* Form kann die folgende Fassung gegeben werden: Es ist ein Vorrat von N Elementen derartig gebildet, dass für jedes Element für sich die Wahrscheinlichkeit, dass es die Eigenschaft A hat, p ist und dafür, dass es die Eigenschaft B hat, q ($q = 1 - p$) ist: wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich darin eine im voraus angegebene Anzahl x und nicht mehrere Iterationen der Länge n finden? Wenn, um ein Beispiel zu geben, ein Geldstück 100 mal geworfen wird, mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man erwarten,

dass in gerade x und nicht in mehr Fällen »Kopf» auf »Kopf» und »Schrift» auf »Schrift» n mal nacheinander folgen? Offenbar hat das Problem verschiedene Lösungen, je nachdem es sich um vollständige oder unvollständige Iterationen handelt.

In dieser allgemeinen Form wird das Problem indessen von Bortkiewicz nicht aufgestellt, und ich glaube auch nicht, dass es jemals behandelt worden ist, sondern folgendes spezielles Problem wird von ihm zu beantworten gesucht: Wenn ein Vorrat von N Elementen auf die obenangegebene Weise gebildet wird, wie vielmal kann man *erwarten*, dass Iterationen der Länge n vorkommen; und von welcher Grössenordnung sind die Abweichungen zwischen der beobachteten Anzahl und der erwarteten Anzahl, die in der Regel zu befürchten sind? An Stelle der Fehlerfunktion selbst werden somit zwei quantitative Eigenschaften desselben, d. h. der *Durchschnitt* und das *Verbreitungsmass*, gesucht. Unter der erwarteten Anzahl versteht Bortkiewicz nämlich immer den *Mittelwert* in der theoretischer Fehlerfunktion (er wendet hierfür den Namen »die mathematische Erwartung» an), und die Grösse der beobachteten Abweichungen wird auf Grund des s. g. *mittleren Fehlers* (= die mittelquadratische Abweichung in der theoretischen Fehlerfunktion) beurteilt. Ist also die in dem »allgemeinen» Problem gesuchte Wahrscheinliehkeit für x Iterationen der Länge n mit $W_n(x)$ bezeichnet, so ist die mathematische Erwartung von x

$$E_n(x) = \sum x\, W_n(x)$$

und der mittlere Fehler in x

$$M_n(x) = \sqrt{\Sigma(x - E_n(x))^2\, W_n(x)}.$$

Das Bemerkenswerte ist hier, dass es Bortkiewicz gelingt, $E_n(x)$ und $M_n(x)$ zu bestimmen, *ohne* erst die Fehlerfunktion $W_n(x)$ abzuleiten oder überhaupt zu erwähnen.

An und für sich ist der »erwartete Wert» ein recht vieldeutiger Begriff. Man kann nämlich darunter je nach den Umständen ausser dem *Mittelwert* (der mathematischen Erwartung) sowohl den *wahrscheinlichsten Wert* (die »Mode» der Fehlerfunktion) als auch den *wahrscheinlichen Wert* (die »Mediane» der Fehlerfunktion) verstehen. Da Bortkiewicz konsequent den erwarteten Wert mit dem theoretischen Mittelwert identifiziert, so liegt die Bedeutung und der Vorteil dieser Betrachtungsweise wesentlich gerade darin, dass dasselbe, so aufgefasst, bestimmt werden kann, ohne dass die Fehlerfunktion bekannt zu sein braucht. Diesen Vorteil hat man *nicht*, wenn es gilt, den wahrscheinlichsten Wert oder den wahrscheinlichen Wert zu bestimmen. Auf ähnliche Weise verhält es sich mit dem Verbreitungsmass. Abweichungen von dem wahrscheinlichsten Werte und dem wahrscheinlichen Werte lassen sich quantitativ nicht beurteilen, ohne dass man noch einmal auf die Fehlerfunktion selbst zurückgreift. Etwas anderes ist es indessen, ob die mittelquadratische Abweichung vom Mittelwert immer eine adäquate Bedeutung als Verbreitungsmass hat, wenn die

Fehlerfunktion nicht gleichzeitig beachtet wird. Es ist ja übrigens natürlich, dass der Vorteil der vereinfachten Problemstellung auf irgendeine Weise auf Kosten der Allgemeingültigkeit des Resultates erkauft werden muss.

In dem dritten angewandten Teil des Buches prüft Verf. seine Formeln u. a. auf das Vorkommen von Iterationen in dem Geschlechte der geborenen Kinder, wobei die Wahrscheinlichkeiten p und q erst aus den empirischen Daten bestimmt werden. Die Reihenfolge zwischen den Kindern wird hierbei nach der Reihe, in welcher sie in die Standesamtsregister eingetragen sind, festgestellt. Eine in allem wesentlichen befriedigende Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung wird nachgewiesen.

In den kritischen Betrachtungen zu Marbes Arbeiten und den hierdurch hervorgerufenen Forschungen über Iterationen kommt Verf. zu dem in gewisser Beziehung überraschenden Resultate, dass Marbes, zwar auf statistische Reihen über das Geschlecht der geborenen Kinder und auf Spielresultate fussende, aber sonst wider alle gesunde Vernunft streitende Auffassung sich nicht, wie von vielen geltend gemacht worden ist, auf die Anwendung falscher Formeln gründet. Marbes Formeln seien zwar nicht einwandfrei, sie könnten aber doch als approximative Formeln angesehen werden, die in dem vorliegenden Falle (p und q beinahe gleichgross) einen genügend genauen Näherungswert geben. »Ihm« — sagt Bortkiewicz — »der in seinen Konstruktionen den 'Zufall' . . . nicht gelten lassen will, ist der Zufall gnädig gewesen.» Wenn Bortkiewicz indessen, wie er selbst sagt, Marbe weniger »gnädig« ist und, so weit wir sehen können, dessen ganzes Lehrgebäude in Stücke zerstrümmert, so beruht dies auf einer von Marbes ganz abweichender Auffassung über die richtige Deutung der behaupteten Unübereinstimmungen. Erstens ist die Korrespondenz zwischen Theorie und Erfahrung nicht so schlecht, wie Marbe geltend machen will, und es ist etwas daran, dass Marbe sich einer in gewisser Beziehung tendentiösen Deutung seiner Zahlen schuldig gemacht hat. Zweitens können die Unübereinstimmungen, wo solche wirklich vorhanden sind, der, objektiv gesehen, weniger befriedigenden Beschaffenheit des Materials zugeschrieben werden. Vor allem gilt dies für die vom Roulettspiel entnommenen Zahlen, die ziemlich trüben Quellen entstammen. Aber auch betreffs der Reihenfolge zwischen den in die Standesamtsregister eingetragenen Geburten ist es nicht ausgeschlossen, dass mit einer gewissen Anordnung nach Geschlechtern unter den während desselben Tages eingetragenen Geburten zu rechnen sein kann. In Bortkiewicz' eigenem, sorgfältiger gewähltem Beispiel ist die Übereinstimmung untadelhaft.

Ausser den von Bortkiewicz gegen Marbe gerichteten Bemerkungen scheint sich noch eine zu finden, die von wenigstens prinzipieller Bedeutung ist. So weit wir finden können, streitet nämlich das Verhältnis, dass längere Iterationen ihrer Anzahl nach etwas hinter der mathematischen Erwartung zurückbleiben, an und für sich nicht gegen die Wahrscheinlichkeitstheorie. Dass die Abweichungen in dem vor-

liegenden Falle so gross sind, dass man eine besondere Erklärung hierfür zu suchen gezwungen ist (und da die von BORTKIEWICZ gegebene), ist eine Sache, allein MARBE selbst zeigt eine Neigung, ein grösseres Gewicht auf die *Zeichen* der Abweichungen, als auf ihre Grösse zu legen. Seine Auffassung gründet sich grossenteils darauf, dass negative Abweichungen von der mathematischen Erwartung bei Iterationen von bedeutenderer Länge dominieren. Unserer Auffassung nach sind indessen gerade bei Iterationen von grösserer Länge negative Abweichungen *wahrscheinlicher* als positive. Die mathematische Erwartung ist nämlich nicht so definiert, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Abweichung nach oben ebenso gross ist, wie für eine Abweichung nach unten.

Nennen wir die Wahrscheinlichkeit, in einer gegebenen Versuchsreihe von N Versuchen v_n Iterationen der Länge n zu finden, $W_n(v_n)$, so erfüllt die mathematische Erwartung die Bedingung

$$E(v_n) = 1 \,.\, W_n(1) + 2\, W_n(2) + 3\, W_n(3) + \cdots$$

oder, was auf eins herauskommt

$$(1.)\quad (E(v_n) - 0)\, W_n(0) + (E(v_n) - 1)\, W_n(1) + (E(v_n) - 2)\, W_n(2) + \\ + \cdots + (E(v_n) - e)\, W_n(e) = (e + 1 - E(v_n)\, W_n(e+1) + \\ + (e + 2 - E(v_n))\, W_n(e+2) + \cdots \text{ usw.}$$

wo e die nächst unter $E(v_n)$ liegende ganze Zahl ist.

Sehen wir von dem seltenen Sonderfall ab, dass $E(v_n)$ eine ganze Zahl ist, so ist die Wahrscheinlichkeit für eine negative Abweichung $(v_n < E(v_n))$

$$W_n(-) = W_n(0) + W_n(1) + W_n(2) + \cdots + W_n(e),$$

und die Wahrscheinlichkeit für eine positive

$$W_n(+) = W_n(e+1) + W_n(e+2) + W_n(e+3) + \cdots \text{ usw.}$$

Aus der Gleichung (1) folgt natürlich nicht, dass $W_n(-) = W_n(+)$.

Mit wachsendem n wird $E(v_n)$ immer kleiner. Betrachten wir vorläufig nur solche n Werte, dass $E(v_n) < 0.5$, so bekommt die Gleichung (1) folgendes Aussehen

$$E(v_n) \,.\, W_n(0) = (1 - E(v_n))\, W_n(1) + (2 - E(v_n))\, W_n(2) + \text{ usw.}$$

Ebenso haben wir

$$W_n(-) = W_n(0) \text{ und } W_n(+) = W_n(1) + W_n(2) + \text{ usw.}$$

Nach dem sog. ersten Mittelwertsatz folgt nun, dass

$$E(v_n)\, W_n(-) = k_n\, W_n(+),$$

wo k_n die Bedingung

$$k_n > 1 - E(v_n) \text{ erfüllt.}$$

Da indessen, laut Voraussetzung, $E(v_n) < 0.5$, so folgt hieraus, dass

$$W_n(-) > W_n(+).$$

Für den Fall, dass $E(r_n) > 0{,}5$ kann diese Ungleichung nicht bewiesen werden, wenn man nicht die Form der Funktion $W_n(r_n)$ kennt. Wie vorher nachgewiesen ist, gibt BORTKIEWICZ' Buch keine Aufklärung über diese Funktion. Es lässt sich indessen mit ziemlicher Sicherheit annehmen, dass r_n für grössere Werte von n dem von BORTKIEWICZ an anderen Stellen aufgestellten sog. *Gesetz der kleinen Zahlen* unterworfen ist. Auf Seite 84 in »Die Iterationen» ist nämlich gezeigt, dass der Mittelfehler $M(r_n) = \sqrt{E(r_n)}$, welches gerade eine wichtige Eigenschaft in dem Gesetze der kleinen Zahlen ist. Unter dieser Voraussetzung hat man nun[1]

$$W_n(r_n) = \frac{e^{-E(r_n)} \cdot E(r_n)^{r_n}}{\lfloor r_n}.$$

Infolgedessen lässt sich folgende kleine Tabelle aufstellen:

$E(r_n)$	4,5	3,5	2,5	1,5	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
$W_n(-)$ . .	0,532	0,537	0,544	0,558	0,606	0,670	0,741	0,819	0,905
$W_n(+)$ . .	0,468	0,463	0,456	0,442	0,394	0,330	0,259	0,181	0,095

Es folgt also (für so grosse n, dass $E(r_n)$ eine ziemlich kleine Zahl ist), dass

$$W_n(-) > W_n(+).$$

Es kann somit nicht überraschen, wenn die Anzahl Iterationen der Länge n in der Regel etwas unter der mathematischen Erwartung ist. Diese Zahlen sind allerdings nicht unabhängig voneinander, da sie an die Bedingung

$$\sum_{n=1}^{N} n \cdot r_n = N$$

gebunden sind. Da gleichzeitig auch

$$\sum_{n=1}^{N} n \cdot E(r_n) = N$$

so müssen negative Abweichungen von $E(r_n)$ irgendwo durch positive aufgewogen werden. Dieses hindert indessen nicht, dass für grosse Werte von n die Minuszeichen dominieren können, da dort eine positive Abweichung genug ist, um mehrere negative aufzuwägen.

Ob das oben dargelegte Verhältnis von irgendwelcher praktischer Bedeutung für die Beurteilung der MARBESchen Zahlen ist, wollen wir dahingestellt sein lassen. Eine prinzipielle Bedeutung lässt sich unserer Bemerkung jedenfalls nicht absprechen.

[1] In Wirklichkeit hat B. diese Formel in einem ähnlichen Falle selbst angewendet, siehe Fussnote S. 185.

S. D. Wicksell.

SKANDINAVISK AKTUARIETIDSKRIFT

UTGIVEN AV

FORENINGEN AF DANSKE AKTUARER,
DEN NORSKE AKTUARFORENING OCH
SVENSKA AKTUARIEFÖRENINGEN

REDAKTÖR OCH ANSVARIG UTGIVARE:

FIL. D:r N. V. E. NORDENMARK

MEDREDAKTÖRER:
FÖR DANMARK: DR. PHIL. J. F. STEFFENSEN
FÖR NORGE: AKTUAR IVAR HESSELBERG
FÖR SVERIGE: 1:STE AKTUARIEN G. STOLTZ

ÅRGANG II—1919



UPPSALA 1919
ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.

INNEHÅLL 1919.

Avhandlingar:

Litteratur:

Der Begriff der statistischen Funktion.

Von **K.-G. Hagström.**

INHALTSÜBERSICHT.

§ 1. Einleitung. Der Begriff der statistischen Variablen.

Die mathematische Statistik ist, nach der Meinung des Verfassers, **die Wissenschaft gewisser Schemata**, welche geschaffen werden, um den Phänomenen zu entsprechen, die die praktische Statistik behandelt.

Nach Muster der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung, — von der nach dieser Auffassung die mathematische Statistik nur ein Teil ist — hat diese ziemlich junge Wissenschaft sich auf die Schemata spezialisiert, welche als Glücksspiele bezeichnet werden. In ihrer einfachsten Form sind diese Schemata

sog. Urnenschemata. Das wichtigste von ihnen ist das BERNOULLI'sche Urnenschema. Von diesem Schema wird bekanntlich die »Fehlerfunktion» hergeleitet.

Die betreffenden Schemata leiden sämtlich an einem wesentlichen Fehler: sie sind zu allgemein, zu abstrakt. Wenn es uns gelungen ist, einen deutlichen Parallelismus zwischen zwei solchen Erscheinungen aufzuweisen, wie z. B. die Anzahl weisser Kugeln einer gewissen Ziehung einerseits, und andererseits die Anzahl Pflanzen von einer bestimmten Eigenschaft, so scheint damit für das wirkliche Verstehen der Erscheinung nicht viel gewonnen zu sein. Es zeigt sich auch, dass die vom Statistiker gezogenen Schlüsse oft ziemlich unbestimmt und interesselos sind. In einem Fall haben jedoch seine Resultate beim ersten Blick den Anschein, sehr wertvoll zu sein, nämlich wenn es sich darum handelt, den Zusammenhang der Erscheinungen zu entdecken. Wir werden im folgenden die betreffende Methode — die Korrelationstheorie — etwas näher untersuchen. Zuerst nur noch einige Worte über die übrigen Teile der mathematischen Statistik.

Der Begriff einer statistischen Veränderlichen wird folgendermassen bestimmt. Es sei

$$p(x)$$

eine positive Funktion von der Eigenschaft, dass

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx$$

existiert und $= 1$ ist. Ich sage, dass ξ eine statistische Veränderliche mit der Verteilungsfunktion $p(x)$ ist, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass ξ ins Intervall $a_1 < x < a_2$ fällt, durch das Integral

$$\int_{a_1}^{a_2} p(x)\,dx$$

ausgedrückt wird.

Es sei bemerkt, dass dieser Funktionsbegriff als eine direkte Verallgemeinerung des Begriffs der reellen Veränderlichen angesehen werden kann. Man sagt, dass ξ in einer gewissen Punktmenge der x-Achse variiert, wenn es alle Werte dieser Menge annehmen kann. Was hier zukommt, ist für jeden Punkt x der Menge eine Zahl $p(x)$. Wenn $p(x)$ ausser der Menge $= 0$ und in der Menge konstant und folglich

$$= \frac{1}{mE}$$

ist, wo mE das Mass der Menge bezeichnet, so hat man eine Bildung, die mit der sogenannten charakteristischen Funktion der Menge verwandt ist.

Das Studium der Verteilungsfunktionen spielt in der mathematischen Statistik eine wesentliche Rolle. Eine Eigentümlichkeit, die von grossem Interesse ist, in der modernen Literatur aber durch unwesentlichere Dinge beseitigt worden ist, ist das reichliche Vorkommen in der Natur der speziellen Verteilungsfunktion, die wir schon oben erwähnt haben, nämlich

$$p(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}.$$

Nun kommt es aber oft vor, dass man eine Abweichung von dieser Form beobachtet. Eine bedeutende Arbeit ist von vielen Forschern darauf verwandt worden, analytische Entwicklungen solcher anormalen Funktionen aufzustellen. Man hat zweifellos diesem Problem eine Bedeutung zuerteilt, die ihm nicht zukommt. Gelehrte Streite sind darüber geführt worden, ob die eine oder die andere Entwicklung vorzuziehen wäre. Wir haben in diesem Zusammenhange keinen Grund, näher hierauf einzugehen.

Wir wollen aber noch einmal den Wert davon betonen, dass konkretere Schemata aufgestellt werden als die klassischen Urnenschemata, welche jetzt das Fundament der Theorie bilden. Die mathematische Statistik sollte sich den Gebieten der Mathematik nähern, welche den Namen mathematische Physik führen. Die Potentialtheorie ist nichts

anders als ein abstraktes Schema der Mathematik, nach dem gewisse Naturerscheinungen, Gravitation und elektrische Phänomene, mit grosser Annäherung vor sich gehen. Aber dieses Schema hat feste Wurzeln in der Wirklichkeit, schmiegt sich der Naturerscheinung nach, und ist darum wertvoll. Auf dieselbe Weise sollten konkrete Schemata in allen Wissenschaften ausgearbeitet werden, wo die mathematische Statistik Verwendung findet: in der Astronomie, der Botanik, der Erblichkeitslehre, der Bevölkerungskunde usw. Der Verfasser dieses Aufsatzes hat in einer früheren Arbeit[1] ein Schema gegeben, das in dieser Hinsicht vielleicht für die biologischen Wissenschaften nützlich werden kann.

§ 2. Die statistische Funktion.

Wir haben oben den Begriff der statistischen Veränderlichen definiert. Wenn $p(x)$ die Verteilungsfunktion der Veränderlichen ξ bezeichnet, so ist

$$\int_{a_1}^{a_2} p(x)dx$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ξ ins Intervall $a_1 < x < a_2$ fällt. Es sei nun η eine neue statistische Variable mit der Verteilungsfunktion $q(y)$. $F(x,y)$ sei eine positive Funktion, für welche

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)dxdy$$

existiert und $= 1$ ist. Die Funktion $F(x,y)$ wird als Korrelationsfunktion der Veränderlichen ξ und η bezeichnet, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass gleichzeitig ξ ins Intervall $a_1 < x < a_2$, η ins Intervall $b_1 < y < b_2$ fällt, durch das Integral

[1] Ein erblichkeitstheoretisches Grenzproblem. Svenska Aktuarieföreningens Tidskrift. S. 162 ff. 1917.

$$\int_{b_1}^{b_2}\int_{a_1}^{a_2} F(x,y)\,dx\,dy$$

ausgedrückt wird. Wenn die Funktion $F(x,y)$ bekannt ist, können $p(x)$ und $q(y)$ berechnet werden. Man hat

$$p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)\,dy,$$

$$q(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)\,dx.$$

Betrachten wir nämlich das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{a_1}^{a_2} F(x,y)\,dx\,dy,$$

so finden wir nach der Definition, dass es die Wahrscheinlichkeit dafür bedeutet, dass ξ zwischen a_1 und a_2, η irgendwo ins unendliche Intervall $-\infty \cdots +\infty$ fällt, und somit gleich

$$\int_{a_1}^{a_2} p(x)\,dx$$

ist. Die Integralzeichen des Doppelintegrals dürfen umgetauscht werden.

Wir führen jetzt zwei neue Funktionen ein,

$$\alpha(x,y) \text{ und } \beta(y,x),$$

die wir die generierenden Funktionen von η mit Beziehung auf ξ und von ξ mit Beziehung auf η nennen. Diese Funktionen werden durch folgende Gleichungen definiert:

$$F(x,y) = p(x)\,\alpha(x,y) = q(y)\,\beta(y,x).$$

Man hat

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x,y)\,dy = 1\,,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \beta(y,x)\,dx = 1\,.$$

Wir werden bei diesen Voraussetzungen auch sagen, dass η eine statistische Funktion von ξ ist, bestimmt durch die generierende Funktion $\alpha(x,y)$, und vice versa.

Um diesen Funktionsbegriff näher zu untersuchen, wollen wir die folgende Konstruktion machen.

Wir wählen auf den x- und y-Achsen zwei grosse Intervalle und teilen sie in kleinere Intervalle

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3 \ldots \delta_l,$$

bzw.

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_m.$$

In jedem Intervall δ_λ wird eine Zahl x_λ gewählt, in jedem ε_μ eine Zahl y_μ. Nun kann man annähernd die Wahrscheinlichkeit, dass ξ in δ_λ fällt,

$$= p(x_\lambda)\,\delta_\lambda$$

setzen, die Wahrscheinlichkeit, dass η in ε_μ fällt, ebenso

$$= q(y_\mu)\,\varepsilon_\mu\,,$$

und die Wahrscheinlichkeit, dass gleichzeitig ξ in δ_λ und η in ε_μ fällt,

$$= F(x_\lambda, y_\mu)\,\delta_\lambda\,\varepsilon_\mu\,.$$

Wir suchen die Wahrscheinlichkeit, dass **wenn** ξ in δ_λ fällt, η in ε_μ fallen wird. Die Wahrscheinlichkeit, dass ξ in δ_λ und η in ε_μ fällt, ist = die gesuchte Wahrscheinlichkeit mal die Wahrscheinlichkeit, dass ξ in δ_λ fällt. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist folglich

$$= \frac{F(x_\lambda, y_\mu)\,\delta_\lambda\,\varepsilon_\mu}{p(x_\lambda)\,\delta_\lambda}$$

oder nach der Definition von $\alpha(x,y)$

$$= \alpha(x_\lambda, y_\mu)\,\varepsilon_\mu .$$

Die Bedeutung der Funktion $\alpha(x, y)$ ist somit klar: Die Wahrscheinlichkeit, dass **wenn** ξ in den Punkt x fällt, η ins Intervall $b_1 \leq y \leq b_2$ fallen wird, ist

$$= \int_{b_1}^{b_2} \alpha(x,y)\,dy .$$

§ 3. Zwei statistische Funktionen einer unabhängigen Variablen.

Sei τ eine statistische Veränderliche mit der Verteilungsfunktion $\varpi(t)$. $P(t,x)$ und $Q(t,y)$ seien die generierenden Funktionen der statistischen Funktionen ξ und η von τ. Wir wählen auf der t-Achse ein grosses Intervall und teilen es in kleine Intervalle

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \dots \gamma_k .$$

In jedem Intervall $\gamma_\varkappa$ wird eine Zahl $t_\varkappa$ gewählt.

Die Wahrscheinlichkeiten, dass **wenn** τ in $\gamma_\varkappa$ fällt, einerseits ξ in x_λ, andererseits η in y_μ fallen werden, sind bzw.

$$P(t_\varkappa, x_\lambda)\,\delta_\lambda \text{ und } Q(t_\varkappa, y_\mu)\,\varepsilon_\mu .$$

Wir machen jetzt von ξ und η die Voraussetzung, dass sie, abgesehen von τ, gewissermassen von einander unabhängig sind, nämlich dass wenn τ in $\gamma_\varkappa$ fällt, die Wahrscheinlichkeit, dass ξ in δ_λ und gleichzeitig η in ε_μ fallen wird, durch

$$P(t_\varkappa, x_\lambda)\,Q(t_\varkappa, y_\mu)\,\delta_\lambda\,\varepsilon_\mu$$

ausgedrückt wird.

Unter dieser Voraussetzung wird die Wahrscheinlichkeit,

dass gleichzeitig τ in $\gamma_\varkappa$, ξ in δ_λ und η in ε_μ fällt,

$$= P(t_\varkappa, x_\lambda)\, Q(t_\varkappa, y_\mu)\, \varpi(t_\varkappa)\, \delta_\lambda\, \varepsilon_\mu\, \gamma_\varkappa .$$

Summiert man für $\varkappa$ von 1 bis k, so erhält man die Wahrscheinlichkeit, dass ξ in δ_λ und η in ε_μ fällt, während τ irgendwo ins grosse Intervall

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \cdots + \gamma_k$$

fällt. Man sieht also, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ξ ins Intervall $a_1 < x < a_2$, η gleichzeitig ins Intervall $b_1 < y < b_2$ fällt, durch das Integral

$$\int\limits_{b_1}^{b_2}\int\limits_{a_1}^{a_2} dx\, dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} P(t, x)\, Q(t, y)\, \varpi(t)\, dt$$

ausgedrückt wird, was deutlich angibt, dass man für die Korrelationsfunktion hat

$$F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} P(t, x)\, Q(t, y)\, \varpi(t)\, dt .$$

Als Korrelationsfunktion der drei Veränderlichen ξ, η, τ ergibt sich

$$P(t, x)\, Q(t, y)\, \varpi(t).$$

§ 4. Diskussion der Hypothese.

Zwecks näherer Untersuchung der Hypothese von dem Zusammenhang zwischen den abhängigen Variablen ξ und η, wollen wir die Hypothese in ein Urnenschema transformieren.

Man mische in einer Urne U eine Anzahl von Kugeln, die mit $t_1, t_2, \ldots t_k$ gemerkt sind. Die Anzahl von Kugeln, welche mit $t_\varkappa$ gemerkt sind, sei der Zahl

$$\varpi(t_\varkappa)\, \gamma_\varkappa$$

proportional. Jedem $t_\varkappa$ sei eine Kombination von zwei Urnen $U_x^{(\varkappa)}$ und $U_y^{(\varkappa)}$ zugeordnet. Diese Urnen seien mit Kugeln gefüllt, die in $U_x^{(\varkappa)}$ mit $x_1, x_2, \ldots x_l$, in $U_y^{(\varkappa)}$ mit $y_1, y_2 \ldots y_m$ gemerkt sind. Die Wahrscheinlichkeiten, aus $U_x^{(\varkappa)}$ eine Kugel, die mit x_λ, aus $U_y^{(\varkappa)}$ eine, die mit y_μ gemerkt ist, zu erhalten, mögen sich wie die Zahlen $p(x_\lambda)\,\delta_\lambda$ bzw. $q(y_\mu)\,\varepsilon_\mu$ verhalten.

Wir ziehen nun aus U eine Kugel. Wenn sie mit $t_\varkappa$ gemerkt ist, so sei die Vorschrift aufgestellt, dass man aus jeder der beiden entsprechenden Urnen $U_x^{(\varkappa)}$ und $U_y^{(\varkappa)}$ eine Kugel ziehen muss.

Man sucht die Wahrscheinlichkeit, dass man in diesen letztgenannten Ziehungen eine Kugel, die mit x_λ, und eine, die mit y_μ gemerkt ist, erhalten werde.

Man könnte die gemachte Voraussetzung als die Hypothese von einer einzigen Ursache bezeichnen. Die Variablen ξ und η sind von einander abhängig, aber die Abhängigkeit ist von einer sehr einfachen Art, durch die Veränderliche τ allein vermittelt.

In der Natur sind zweifelsohne solche Fälle ziemlich zahlreich vorhanden, wo man mit grosser Annäherung die Hypothese von einer einzigen Ursache voraussetzen kann. So könnte man sich z. B. τ als die Grösse eines sozusagen konstituierenden Organs eines gewissen Organismus vorstellen, während ξ und η sagen wir die Länge von verschiedenen Extremitäten, oder ξ die Länge, η das Gewicht bedeuten. Es sei z. B. τ die Grösse der Schilddrüse des Menschen, und wir nehmen für einen Augenblick an, dieses Organ sei in der Meinung konstituierend, dass seine Grösse die Mittellänge und das Mittelgewicht des betreffenden Individuums bestimmte. Die wirkliche Länge und das wirkliche Gewicht würden zwar um diese Mittelwerte oszillieren können, aber nur nach Gesetzen, die von τ — und also von den Mittelwerten selbst — unabhängig wären. In diesem Falle hätten wir unsere Hypothese realisiert. Die Korrelation zwischen ξ und η wäre bekannt, wenn man nur die Funktionen P, Q und ϖ kennte.

Eine solche Beziehung zwischen zwei statistischen Veränderlichen würde zweifellos als Korrelation in der allgemein angenommenen Bedeutung bezeichnet werden. Um dies zu

erkennen, nehmen wir z. B. an, dass τ nur zwei Werte annimmt, t_1 und t_2, und dieses mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Es sei nun ξ in der Bedeutung eine Funktion φ von τ, dass, wenn τ den Wert t_1 bzw. t_2 annimmt, ξ zwar jeden Wert annehmen kann, aber dass die grosse Mehrzahl der von ξ angenommenen Werte in unmittelbarer Nähe der Werte $\varphi(t_1)$ bzw. $\varphi(t_2)$ liegt. Für η wird eine ähnliche Beziehung zur Funktion ψ vorausgesetzt. Man beobachtet nun eine grosse Menge von zusammenhörenden Werten von ξ und η. Es wird sich dann ergeben, dass ein Wert von ξ in der Nähe von $\varphi(t_1)$ mit sehr grosser Häufigkeit einem Werte von η in der Nähe von $\psi(t_1)$ zugeordnet ist, während das analoge für die Werte $\varphi(t_2)$ und $\psi(t_2)$ gilt. Dies würde aber eine strenge Zusammengehörigkeit von ξ und η bedeuten, im Sinne der Korrelationstheorie.

§ 5. Zwei statistische Funktionen vieler unabhängigen Variablen.

Die Hypothese von einer einzigen Ursache kann auf folgende Weise zu einer Hypothese von mehreren Ursachen verallgemeinert werden.

Es seien $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \dots \tau_s$ s statistische Veränderlichen mit der Korrelationsfunktion

$$\varpi(t_1, t_2, \dots t_s),$$

d. h. dass die Wahrscheinlichkeit, dass gleichzeitig τ_1 einen Wert des Intervalls $c_1 < t_1 < c'_1$, τ_2 einen Wert des Intervalls $c_2 < t_2 < c'_2$ usw. annehmen, durch das Integral

$$\int \varpi(t_1, t_2, \dots t_s)\, dt_1\, dt_2 \dots dt_s$$

ausgedrückt wird, das Integral über den entsprechenden Bereich ausgestreckt. Definiert man nun eine generierende Funktion

$$P(t_1, t_2, t_3, \dots t_s ; x)$$

so dass durch das Integral

$$\int_{a_1}^{a_2} P(t_1, t_2 \ldots t_s; x)\, dx$$

die Wahrscheinlichkeit dafür ausgedrückt wird, dass wenn τ_1 den Wert t_1, τ_2 den Wert t_2 usw. angenommen hat, ξ ins Intervall $a_1 \leq x \leq a_2$ fallen wird, — weiter ganz analog eine generierende Funktion

$$Q(t_1, t_2, t_3, \ldots t_s; y)$$

für η, so wird die Korrelationsfunktion für ξ und η

$$F(x, y) = \int P(t_1, \ldots t_s; x)\, Q(t_1, \ldots t_s; y)\, \varpi(t_1 \ldots t_s)\, dt_1 \ldots dt_s.$$

Das Integral wird von $-\infty$ bis $+\infty$ für alle Variablen $t_1, \ldots t_s$ genommen.

Die Korrelationsfunktion für $\xi, \eta, \tau_1, \tau_2 \ldots \tau_s$ wird offenbar

$$P \,.\, Q \,.\, \varpi.$$

Die Verallgemeinerung zu mehr als zwei Variablen ist ganz analog.

§ 6. Bezeichnungen.

In diesem Aufsatze werden wir fast ausschliesslich zwei Haupttypen von Verteilungsfunktionen und generierenden Funktionen betrachten. Der eine Typus, den wir hauptsächlich aus theoretischem Interesse studieren, besteht aus Funktionen, die in kleinen Intervallen konstant sind, der andere Typus aus sogenannten normalen Verteilungsfunktionen, d. h. Funktionen vom Typus der Laplace-Gauss'schen Fehlerverteilungsfunktion.

Wir führen einige Bezeichnungen ein, die im folgenden nützlich sein werden.

Sei

$$\theta_\varepsilon(z)$$

eine Funktion von der reellen Veränderlichen z, die $= \frac{1}{2\varepsilon}$

für $|z| < \varepsilon$, $= 0$ für $|z| > \varepsilon$ ist. Durch folgende Definitionen wird nun ein Zeichen

$$\overset{\varepsilon}{=}$$

eingeführt, das »gleich bis auf ε« gelesen wird, und das eine Art von statistischer Gleichheit bezeichnet.

1. Die statistische Veränderliche ξ ist $\overset{\varepsilon}{=}$ der Zahl x_0, wenn ihre Verteilungsfunktion

$$\theta_\varepsilon (x - x_0)$$

ist.

2. Die Bezeichnung

$$\xi \overset{\varepsilon}{=} f(\tau),$$

wo τ eine statistische Veränderliche mit der Verteilungsfunktion $\varpi(t)$ ist, bedeutet, dass die Korrelationsfunktion von ξ und τ

$$\theta_\varepsilon (x - f(t))\, \varpi(t)$$

ist, d. h. dass die generierende Funktion $\theta_\varepsilon (x - f(t))$ ist. Mit anderen Worten: wenn τ den Wert t angenommen hat, so ist ξ bis auf ε gleich $f(t)$.

3. Die Gleichheit

$$\xi \overset{\varepsilon}{=} f(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_s)$$

soll bedeuten, dass die Korrelationsfunktion für $\xi, \tau_1, \tau_2 \ldots \tau_s$

$$= \theta_\varepsilon (x - f(t_1, t_2, \ldots t_s))\, \varpi(t_1, t_2, \ldots t_s)$$

ist, wo ϖ die Korrelationsfunktion von $\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_s$ ist, oder

$$= \theta_\varepsilon (x - f(t_1, t_2, \ldots t_s))\, \varpi_1(t_1)\, \varpi_2(t_2) \ldots \varpi_s(t_s),$$

wenn die Veränderlichen $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_s$ unabhängig sind und ihre Verteilungsfunktionen $\varpi_1, \varpi_2, \ldots \varpi_s$ sind.

4. Wenn die Verteilungsfunktionen für die Veränderlichen ξ in 2. und 3. oben gegen bestimmte Grenzfunktionen konvergieren, wenn ε unbegrenzt gegen Null abnimmt, schreiben wir für die statistischen Veränderlichen, die durch diese

Grenzfunktionen charakterisiert sind,

$$\xi \stackrel{\circ}{=} f(\tau), \text{ bzw.}$$

$$\xi \stackrel{\circ}{=} f(\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_s).$$

Für den zweiten Typus von Verteilungsfunktionen werden wir noch eine Art von Gleichheitszeichen einführen,

$$\stackrel{h}{\sim},$$

das wir »äquivalent h« lesen. Die Äquivalenz wird durch folgende Definitionen bestimmt.

1'. Durch

$$\xi \stackrel{h}{\sim} x_0$$

drücken wir aus, dass die Verteilungsfunktion von ξ

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x-x_0)^2}$$

ist.

2'. Die Gleichheit

$$\xi \stackrel{h}{\sim} f(\tau)$$

soll bedeuten, dass die Korrelationsfunktion für ξ und τ

$$= \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x-f(t))^2} \varpi(t)$$

ist.

3'. Endlich soll

$$\xi \stackrel{h}{\sim} f(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots \tau_s)$$

bedeuten, dass die Korrelationsfunktion von $\xi, \tau_1, \tau_2, \ldots \tau_s$

$$= \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x-f(t_1, t_2, \ldots t_s))^2} \varpi(t_1, t_2, \ldots t_s)$$

ist, oder, wenn $\tau_1, \ldots \tau_s$ unabhängig sind und ihre Verteilungsfunktionen $\varpi_1, \ldots \varpi_s$,

$$= \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x-f(t_1, t_2, \ldots t_s))^2} \varpi_1(t_1)\, \varpi_2(t_2) \ldots, \varpi_s(t_s).$$

4'. Wenn die Verteilungsfunktionen von ξ in 2' und 3' für $h \rightarrow \infty$ gegen bestimmte Grenzfunktionen konvergieren, wollen wir für die so definierten Veränderlichen schreiben

$$\xi \approx f(r), \text{ bzw.}$$

$$\xi \approx f(r_1, r_2, \dots r_s).$$

Wir schreiben schliesslich

$$\xi \equiv f(r),$$

$$\xi \equiv f(r_1, r_2, r_3, \dots r_s)$$

(»identische» statistische Gleichheit), wenn die Veränderliche ξ den Wert $f(t)$, bzw. $f(t_1, t_2, \dots t_s)$ annehmen muss, wenn r den Wert t, bzw. wenn $r_1, r_2, \dots r_s$ die Werte $t_1, t_2, \dots t_s$ angenommen haben.

§ 7. Bravais' Beitrag zur Korrelationstheorie.

In einer Abhandlung[1], der Akademie der Wissenschaften in Paris im Jahre 1846 mitgeteilt, hat **Bravais** zum erstenmal die Frage von der Korrelation untersucht. Wir wollen einige seiner Resultate herleiten.

Es seien $r_1, r_2, \dots r_s$ s unabhängige statistische Veränderlichen, deren Verteilungsfunktionen durch die Relationen

$$r_\lambda \overset{c_\lambda}{\sim} 0 \; (\lambda = 1, 2, 3, \dots s)$$

gegeben sind. Wir betrachten die Veränderliche

$$\xi_1 = u_1 r_1 + u_2 r_2 + \cdots + u_s r_s.$$

Laplace hatte schon bewiesen, dass die Verteilungsfunktion dieser Veränderlichen

$$\frac{c}{\sqrt{\pi}} e^{-c^2 x^2}$$

[1] Sur les probabilités des erreurs de situation d'un point. Mém. prés. par div. sav. à l'Acad. roy. des sciences de l'Inst. de France. Tome IX.

ist, d. h. dass man hat

$$\xi_1 \stackrel{c}{\sim} 0,$$

wo c durch folgende Gleichheit bestimmt ist:

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\mu_1^2}{c_1^2} + \frac{\mu_2^2}{c_2^2} + \cdots + \frac{\mu_s^2}{c_s^2}.$$

Bravais nimmt sich vor, die Korrelationsfunktion der Veränderlichen

$$\xi_1 = \mu_1 \tau_1 + \mu_2 \tau_2 + \cdots + \mu_s \tau_s \text{ und}$$

$$\eta_1 = \nu_1 \tau_1 + \nu_2 \tau_2 + \cdots + \nu_s \tau_s$$

zu finden. Dies kann auf folgende Weise geschehen.

Die Wahrscheinlichkeit, dass $(\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_s)$ in einen gewissen Teilbereich σ des s-dimensionalen Raumes $t_1, t_2, \ldots t_s$ fällt, wird durch das Integral

$$\frac{c_1 \cdot c_2 \ldots c_s}{(\sqrt{\pi})^s} \int\limits_{(\sigma)} e^{-c_1^2 t_1^2 - c_2^2 t_2^2 - \cdots - c_s^2 t_s^2} \, dt_1 \, dt_2 \ldots dt_s$$

gegeben. Die gesuchte Korrelationsfunktion sei durch $F_1(x,y)$ bezeichnet. Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ξ_1 ins Intervall $a_1 < x \leq a_2$, η_1 ins Intervall $b_1 \leq y \leq b_2$ fällt, d. h. folgendes Integral über die unbekannte Korrelationsfunktion:

$$\int\limits_{b_1}^{b_2} \int\limits_{a_1}^{a_2} F_1(x, y) \, dx \, dy.$$

Als Integrationsgebiet σ wird man den Bereich wählen müssen, welcher durch die Ungleichheiten

$$(\alpha) \qquad \begin{aligned} a_1 &< \mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \cdots + \mu_s t_s < a_2, \\ b_1 &\leq \nu_1 t_1 + \nu_2 t_2 + \cdots + \nu_s t_s < b_2 \end{aligned}$$

definiert ist. Wir verändern die Variablen durch folgende Gleichheiten:

$$
(\beta)\qquad
\begin{aligned}
u_1 &= \mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \cdots + \mu_s t_s,\\
u_2 &= \nu_1 t_1 + \nu_2 t_2 + \cdots + \nu_s t_s,\\
u_3 &= a_{31} t_1 + a_{32} t_2 + \cdots + a_{3s} t_s,\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
u_s &= a_{s1} t_1 + a_{s2} t_2 + \cdots + a_{ss} t_s,
\end{aligned}
$$

wo die Konstanten a_{ik} so gewählt werden, dass die Substitutionsdeterminante $\triangle$ nicht Null wird, aber im übrigen beliebig. Der Bereich σ geht in den folgenden Bereich über:

$$
\begin{aligned}
a_1 &< u_1 < a_2,\\
b_1 &< u_2 < b_2,\\
-\infty &< u_3 < +\infty,\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
-\infty &< u_s < +\infty.
\end{aligned}
$$

Wir wollen im Vorbeigehen konstatieren, dass man hier den Fall

$$\mu_1 : \nu_1 = \mu_2 : \nu_2 = \cdots = \mu_s : \nu_s$$

völlig ausgeschlossen hat.

Wird das System (β) nach t_λ aufgelöst, so ergibt sich

$$t_\lambda = \sum_{\varkappa=1}^{s} b_{\lambda\varkappa} u_\varkappa \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots s).$$

Da die Jacobi'sche Determinante gleich $\frac{1}{\triangle}$ ist, geht das Integral in

$$\frac{1}{\triangle}\,\frac{c_1 \ldots c_s}{(\sqrt{\pi})^s}\int\limits_{\sigma'} e^{-f(u_1 \ldots u_s)}\, d u_1 \ldots d u_s$$

über, unter f eine homogene Form zweiten Grades verstanden. Integriert man hier nach u_s, erhält man nach einer bekannten Formel[1]

[1] Siehe Formel (5), S. 26.

$$C_1 \int e^{-f_1(u_1 \ldots u_{s-1})} du_1 \ldots du_{s-1},$$

wo f_1 eine homogene Form zweiten Grades ist. Man integriert weiter nach $u_{s-1}, u_{s-2} \ldots$ Endlich erhält man

$$C_0 \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} e^{-f_0(u_1, u_2)} du_1 \, du_2,$$

wo f_0 eine homogene Form zweiten Grades wird. Die Konstante C_0 kann bestimmt werden, und man bekommt

$$F_1(x, y) = \frac{K}{\pi} e^{-f_0(x, y)}.$$

Hier ist K^2 die Diskriminante der Form f_0. Bravais hat auch die Koeffizienten dieser Form berechnet. Er findet

$$F_1(x, y) = \frac{K}{\pi} e^{-K^2(\alpha_1 x^2 - 2\beta_0 x y + \alpha_0 y^2)},$$

wo

$$\alpha_1 = \sum_{\lambda=1}^{s} \frac{\nu_\lambda^2}{c_\lambda^2},$$

$$\alpha_0 = \sum_{\lambda=1}^{s} \frac{\mu_\lambda^2}{c_\lambda^2},$$

$$\beta_0 = \sum_{\lambda=1}^{s} \frac{\mu_\lambda \nu_\lambda}{c_\lambda^2},$$

$$\frac{1}{K^2} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{s} \sum_{\varkappa=1}^{s} \frac{(\mu_\lambda \nu_\varkappa - \mu_\varkappa \nu_\lambda)^2}{c_\lambda^2 c_\varkappa^2}.$$

Auch hier sieht man, dass die Korrelationsfunktion keine Bedeutung hat, wenn $\mu_\lambda : \nu_\lambda = \mu_\varkappa : \nu_\varkappa \; (\lambda, \varkappa = 1, 2, 3, \ldots s)$.

Im übrigen ist die Bravais'sche Abhandlung teils Verallgemeinerungen zu drei Variablen gewidmet, teils auch einigen Berechnungen, die in diesem Zusammenhange kein Interesse haben. Das Problem war für Bravais nur ein Wahr-

scheinlichkeitsproblem: die Wahrscheinlichkeit dafür zu berechnen, dass ein Punkt in einen bestimmten Bereich des Raumes fällt.

§ 8. Moderne Untersuchungen.

Die Entstehung des modernen Korrelationsproblems lässt sich vom Jahre 1886 datieren, als FRANCIS GALTON eine Abhandlung mit dem Titel: »Family Likeness in Stature»[1] veröffentlichte. Das Problem ist hier, die Beziehung zwischen den Werten einer gewissen messbaren Eigenschaft, als welche die Länge gewählt wurde, bei den Menschen, die näher oder ferner verwandt sind, zu finden. Nach den eignen Worten des Verfassers hat er sich die Aufgabe gestellt, zu »explain the processes through which family pecularities of stature gradually diminish, until in every remote degree of kinship, the group of kinsmen becomes undistinguishable from a group selected out of the general population at random.»

Um alle Individuen der untersuchten Population vergleichbar zu machen, führt der Verfasser zuerst für die Differenz zwischen der Mittellänge der Männer und derjenigen der Frauen eine Korrektion ein. Durch frühere Untersuchungen[2] hatte der Verfasser es sehr wahrscheinlich gefunden, dass die Länge der Kinder nur von dem Mittel der Länge des Vaters und der (reduzierten) Länge der Mutter abhängt, oder, wie GALTON es ausdrückt, nur von der Länge ihrer »mid-parent».

Der Verfasser berechnet nun für eine gewisse Länge der mid-parents die Mittellänge der Kinder. Es zeigt sich, dass wenn die Länge der mid-parents einen gewissen Wert l hat, welcher grösser ist als der Mittelwert l_0 der ganzen Bevölkerung, so haben die Kinder dieser mid-parents eine Mittellänge l', die auch $> l_0$ ist. Eine gewisse Erblichkeit ist also bestätigt. Es ist aber nicht, was man vielleicht im Durchschnitt erwarten könnte, l nahe gleich l', sondern man findet

$$l > l' > l_0,$$

[1] Family Likeness in Stature. With an appendix by J. D. Hamilton Dickson. Proc. Roy. Soc. Vol. XL, 1886, p. 42.

[2] Regression towards Mediocrity in Hereditary Stature. Jour. Anthrop. Inst. Vol. XV, 1886, p. 246.

d. h.: die Kinder der grossen Eltern sind auch im Mittel gross, aber sie »kehren zurück», nähern sich im allgemeinen dem Mittel der ganzen Bevölkerung. Analog ist auch wenn $l < l_0$

$$l < l' < l_0 .$$

Die Erscheinung wird von GALTON »regression» genannt.

Bestimmt man für jedes l das ensprechende l' und stellt l' graphisch als Funktion von l dar, so bekommt man eine Kurve, die mit genügender Genauigkeit als eine Gerade betrachtet werden kann, sagen wir

$$l' = kl .$$

Hier setzt man auch voraus, dass der Nullpunkt so gelegt wurde, dass $l_0 = 0$. (Man rechnet also nur mit Abweichungen vom Bevölkerungsmittel.) Der Koeffizient k, welcher nach dem soeben gesagten < 1 ist, wird von GALTON »the ratio of regression» genannt.

Beim ersten Blick scheint eine Konsequenz hiervon zu sein, dass man hätte

$$l = \frac{1}{k} l' ,$$

wo l' wie früher die Länge der Kinder bezeichnet, l die entsprechende Länge der mid-parents. Wenn man nun die Kinder von gleicher Länge zu einer Gruppe zusammenfasst und dann das Mittel der Längen der zugehörigen mid-parents berechnet, so findet man zwar eine Gerade

$$l = k' l' ,$$

aber k' ist nicht $= \frac{1}{k}$. Im Gegenteil findet man auch hier eine Zahl k' die < 1 ist. GALTON, der teils »the ratio of regression from the stature of men of the same height to the mean of the statures of all their children» (k), teils den gegensätzlichen Regressionsquotienten (k') suchte, erhielt für k den Wert $\frac{1}{3}$, für k' den Wert $\frac{2}{3}$.

Dieses unerwartete Resultat führte GALTON zum Studium der Korrelationsfunktion selbst, d. h. zum Studium einer Doppeltabelle mit der Länge der mid-parents und der Länge der Kinder als Argumente, für jede vorkommende Kombination der beiden Argumente die Anzahl von beobachteten Fällen angebend. In dieser Tabelle zog der Verfasser die Äquiprobabilitätslinien, die geschlossene Kurven von elliptischer Form wurden. Einige mathematische Eigenschaften der Funktion wurden von J. D. HAMILTON DICKSON in einer Note der Abhandlung behandelt.

Der berühmte »Korrelationskoeffizient« wurde in einem Aufsatze von GALTON im Jahre 1889[1] geboren. In dieser Arbeit kommt folgende Definition der Korrelation vor:

»Two variable organs are said to be co-related when the variation of the one is accompanied on the average by more or less variation of the other, and in the same direction.»

Zur besseren Verständnis der Gesichtspunkte dieses Verfassers sei die folgende Stelle angeführt: »It is easy to see that co-relation must be the consequence of the two organs being partly due to common causes. If they where wholly due to common causes, the co-relation would be perfect, as is approximately the case with the symmetrically disposed parts of the body. If they were in no respect due to common causes, the co-relation would be *nil*. Between these two extremes are an endless number of intermediate cases, and it will be shown how the closeness of co-relation in any particular case admits of being expressed by a single number.» Der Verfasser definiert dann rechnerisch den Korrelationskoeffizienten r und macht die Behauptung, dass »r measures the closeness of co-relation».

Das Problem wurde von KARL PEARSON wieder aufgenommen.[2] Dieser Verfasser hat dem Gegenstand ein eifriges Studium gewidmet und hat den Formelapparat geschaffen, mit welchem die modernen Korrelationisten in der Biologie, der Astronomie, der Meteorologie usw. arbeiten. PEARSON's Definition der Korrelation ist die folgende:

[1] Co-relations and their Measurement, chiefly from Anthropometric Data. Proc. Roy. Soc. Vol. XLV, 1889, p. 135.

[2] Mathematical Contributions to the Theory of Evolution. III. Regression, Heredity, and Panmixia. Phil. Trans. Roy. Soc. A 187, 1895, p. 253.

»Two organs in the same individual or in a connected pair of individuals are said to be correlated, when a series of the first organ of a definite size being selected, the mean of the sizes of the corresponding second organs is found to be a function of the size of the selected first organ. If the mean is independent of this size, the organs are said to be non-correlated. Correlation is defined mathematically by any constant, or series of constants, which determine the above function.»

Diese Definition ist, wie man sieht, vorsichtiger als die GALTON'sche. Schade nur, dass die Vorsicht sich nicht auch bis zur Anwendung der PEARSON'schen Theorie in der Praxis gestreckt hat. Sowohl der Urheber als auch besonders seine zahlreichen Nachfolger in allen beobachtenden Wissenschaften haben sich aus der Korrelationsrechnung einen deus ex machina gemacht, welcher imstande ist, die schwierigsten Fragen durch mechanische Rechenarbeit zu lösen.

Von übrigen Korrelationisten werden wir im folgenden Gelegenheit finden, uns mit YULE und CHARLIER zu beschäftigen. Von dem letzteren haben wir folgende Aussage, die seine Ansichten in diesen Fragen deutlich zum Ausdruck bringt[1]:

»Welchen Nutzen kann man nun von diesem Korrelationskoeffizienten haben? Um dies zu verstehen, muss man zuerst einige allgemeine Eigenschaften des Korrelationskoeffizienten kennen.

Es geht aus der mathematischen Analyse hervor, dass r einen Wert hat, der numerisch kleiner als *eins* ist. Der Korrelationskoeffizient kann positiv oder negativ sein; ist er positiv, so wächst *im allgemeinen* die eine der beiden betrachteten Eigenschaften, wenn die andere wächst, und nimmt ab, wenn die andere abnimmt. Ist r negativ, so wächst *im allgemeinen* die eine Eigenschaft, wenn die andere abnimmt, und umgekehrt.

— — —

Ist der Korrelationskoefficient r gleich Null, so bedeutet dies, dass die betrachteten statistischen Erscheinungen

---

[1] Grunddragen af den matematiska statistiken. Extrahäfte av Statsvetenskaplig Tidskrift. Lund 1910.

von einander unabhängig sind — dass sie nichts mit einander zu tun haben.

Ist $r = +1$ (oder -1), so ist ein Element der einen statistischen Reihe völlig bestimmt, wenn man das entsprechende (= gleichzeitig beobachtete) Element der anderen Reihe kennt.

Man kann hieraus verstehen, dass je grösseren Wert, numerisch genommen, r hat, je inniger sind die betrachteten statistischen Erscheinungen von einander abhängig.

— — —

Der Wert des Korrelationskoeffizienten ist aber nicht darauf beschränkt, nur ein Mass der Intensität zu geben, die zwischen zwei statistischen Erscheinungen stattfindet.

— — — »

§ 9. Ein theoretischer Spezialfall.

Wir haben oben bewiesen, dass die Korrelationsfunktion zweier Funktionen ξ und η von der unabhängigen Veränderlichen τ sich schreiben lässt

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t, x)\, Q(t, y)\, \varpi(t)\, dt,$$

wo $P(t, x)$ und $Q(t, y)$ die generierenden Funktionen von ξ und η, $\varpi(t)$ die Verteilungsfunktion von τ ist.

Wir wollen den folgenden Spezialfall betrachten:

$$\varpi(t) = \frac{1}{b-a}, \text{ wenn } a < t < b,$$

$$= 0, \text{ wenn } t < a \text{ oder } t > b;$$

$$P(t, x) = \frac{1}{2\varepsilon}, \text{ wenn } |x - f(t)| < \varepsilon,$$

$$= 0, \text{ wenn } |x - f(t)| > \varepsilon;$$

$$Q(t, y) = \frac{1}{2\varepsilon}, \text{ wenn } |y - g(t)| < \varepsilon,$$

$$= 0, \text{ wenn } |y - g(t)| > \varepsilon,$$

wo $f(t)$ und $g(t)$ zwei reelle Funktionen im Intervall $a < t < b$ bedeuten. Man erhält

$$F(x, y) = \frac{1}{b-a} \int_a^b P(t, x) Q(t, y) \, dt.$$

Der Integrand

$$P(t, x) Q(t, y)$$

kann zwei Werte annehmen, nämlich

$$\frac{1}{4\varepsilon^2} \text{ und } 0.$$

Bezeichne mit E_x die Menge aller Punkte t, für welche man hat

$$|x - f(t)| \leq \varepsilon,$$

mit E_y diejenige Menge, wo

$$|y - g(t)| < \varepsilon.$$

Der Integrand nimmt also den Wert $\frac{1}{4\varepsilon^2}$ in der Punktmenge

$$E_x . E_y$$

an und nur in dieser Menge. Sei die Menge messbar und ihr Mass $= m\, E_x\, E_y$. Man erhält dann

$$F(x, y) = \frac{m\, E_x\, E_y}{4\varepsilon^2 (b-a)}.$$

Man setze

$$f(t) = t$$

und nehme an, dass $g(t)$ eine kontinuierliche Funktion von der Eigenschaft sei, dass die Gleichheit

$$y = g(t_0)$$

eine einzige Wurzel t_0 für jeden Wert von y im betrachteten Intervall hat.

Die Punktmenge E_x ist in diesem Falle ein Intervall h_x, definiert durch die Relationen

$$x - \varepsilon < t < x + \varepsilon .$$

Bezeichne mit $\delta(\varepsilon)$ eine Zahl von der Eigenschaft, dass

$$|y - g(t)| \leq \varepsilon \quad \text{für } |t - t_0| < \delta(\varepsilon).$$

Ich behaupte dass $\delta(\varepsilon) \to 0$ für $\varepsilon \to 0$. Denn sonst würde man zwei Zahlen t_1 und t_0 angeben können, sodass

$$|y - g(t_1)| < \varepsilon, |y - g(t_0)| < \varepsilon, |t_1 - t_0| > 0,$$

wie klein auch ε sein möge. Man würde daraus schliessen können, dass

$$y = g(t_1), y = g(t_0),$$

was der gemachten Voraussetzung widerspricht.

Die Menge E_y wird durch die Ungleichungen

$$t_0 - \delta(\varepsilon) \leq t < t_0 + \delta(\varepsilon)$$

definiert. Sie besteht also aus einem Intervall h_y.

Sei x fix und y variiere. Das Intervall h_y gleitet auf der t-Achse. Solange die Intervalle h_x und h_y keinen gemeinsamen Teil haben, ist immer

$$F(x, y) = 0.$$

Wenn die Intervalle in einander eingreifen, so ist, wenn man mit h_{xy} den gemeinsamen Teil der Intervalle h_x und h_y bezeichnet,

$$(\gamma) \qquad F(x, y) = \frac{h_{xy}}{4\,\varepsilon^2 (b - a)} .$$

Es seien nun x, y zwei Werte, die der Gleichheit

$$y = g(x)$$

nicht genügen. Ich behaupte, dass man ε so klein wählen kann, dass F für diese beiden Werte $= 0$ ist. Die Mittel-

punkte von h_x und h_y fallen nämlich nicht zusammen, weil der eine $= x$ ist, der andere $=$ der Zahl t_0, für welche $y = g(t_0)$. Man kann somit ε so klein nehmen, dass

$$\varepsilon + \delta(\varepsilon) < |x - t_0|.$$

Da die Intervalle also ganz ausser einander liegen, hat man für die gegebenen Werte x, y

$$F(x, y) = 0.$$

Die einzigen Punkte, wo es nicht möglich ist, durch Verminderung von ε $F(x, y) = 0$ zu machen, liegen auf der Kurve

$$y = g(x).$$

Die Korrelationsfunktion definiert also ein Band in der xy-Ebene, das als eine statistische Darstellung der Funktionskurve $y = g(x)$ gelten kann.

§ 10. Der einfache Normalfall.

Im vorhergehenden Paragraphen haben wir einen Spezialfall von Korrelationszusammenhang untersucht, der sich durch die Formeln

$$\tau \overset{\frac{b-a}{2}}{\quad} 0,$$

$$\xi \overset{\varepsilon}{\quad} f(\tau),$$

$$\eta \overset{\varepsilon}{\quad} g(\tau)$$

ausdrücken lässt. Wir wollen jetzt zu einem anderen Spezialfall übergehen, welcher dem früheren analog, aber von grösserem praktischem Interesse ist. Wir setzen

$$\tau \overset{c}{\sim} 0,$$

$$\xi \overset{h}{\sim} f(\tau),$$

$$\eta \overset{k}{\sim} g(\tau).$$

Man hat dann für die Korrelationsfunktion

$$F(x, y) = \frac{chk}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2(x-f(t))^2 - k^2(y-g(t))^2 - c^2t^2} dt.$$

Die Funktion $F(x, y)$ kann als durch die Beobachtungen gegeben angesehen werden. Man sieht aus dem Ausdruck für F, dass das Problem, unter den gegebenen Voraussetzungen aus den Beobachtungen die innere Beziehung zwischen ξ und η herzuleiten, d. h. die Konstanten c, h, k und die unbekannten Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ zu berechnen, äusserst kompliziert ist. Auch wenn sehr vereinfachte Voraussetzungen gemacht werden, ist die Integralgleichung von einer schwer zu behandelnden Art. Wir können aber durch eine sehr spezielle Vereinfachung das Problem in eine lösbare Form bringen. Zu dem Zwecke nehmen wir an, dass

$$\tau \overset{c}{\sim} 0,$$

$$\xi \overset{h}{\sim} \mu \tau,$$

$$\eta \overset{k}{\sim} \nu \tau,$$

wo μ und ν konstant sind, und erhalten

$$F(x, y) = \frac{chk}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2(x-\mu t)^2 - k^2(y-\nu t)^2 - c^2t^2} dt.$$

Man hat bekanntlich

$$(\delta) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(Az^2+2Bz+C)} dz = \sqrt{\frac{\pi}{A}}\, e^{-\frac{AC-B^2}{A}}.$$

Mit Anwendung dieser Formel erhält man

$$(\varepsilon) \qquad F(x, y) = \frac{\sqrt{\delta}}{\pi} e^{-(\alpha x^2 - 2\beta xy + \gamma y^2)},$$

wo die Konstanten folgende Bedeutung haben:

$$\alpha = \frac{h^2 (c^2 + k^2 \nu^2)}{c^2 + h^2 \mu^2 + k^2 \nu^2},$$

$$\beta = \frac{h^2 k^2 \mu \nu}{c^2 + h^2 \mu^2 + k^2 \nu^2},$$

$$\gamma = \frac{k^2 (c^2 + h^2 \mu^2)}{c^2 + h^2 \mu^2 + k^2 \nu^2},$$

$$\delta = \alpha\gamma - \beta^2 = \frac{c^2 h^2 k^2}{c^2 + h^2 \mu^2 + k^2 \nu^2}.$$

Man sieht, dass die Form

$$\varphi(x, y) = \alpha x^2 - 2 \beta x y + \gamma y^2$$

definit positiv ist.

Die Äquiprobabilitätskurven sind die Ellipsen

$$\varphi(x, y) = \text{Konst.}$$

Der Korrelationskoeffizient wird folgendermassen definiert.

Es sei $F(x, y)$ die Korrelationsfunktion zweier statistischen Veränderlichen ξ und η, und man führe die folgende Bezeichnung für die Momente ein:

$$M_{rs} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^r y^s F(x, y)\, dx\, dy.$$

Dann lautet die Definition des Korrelationskoeffizienten:

$$r = \frac{M_{11}}{\sqrt{M_{20} M_{02}}}.$$

Um in unserem Spezialfall diesen Koeffizienten berechnen zu können, wollen wir zunächst einige einfache Rechnungen ausführen.

Wenn

$$\varphi(x, y) = \alpha x^2 - 2\beta x y + \gamma y^2,$$

so ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varphi(x, y)}\, dx\, dy$$

konvergiert, dass φ definit positiv ist. In diesem Fall hat man

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varphi}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\frac{\delta}{\alpha} y^2},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varphi}\, x\, dx = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, y\, e^{-\frac{\delta}{\alpha} y^2},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varphi}\, x^2\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{2} + \frac{\beta^2 y^2}{\alpha}\right) e^{-\frac{\delta}{\alpha} y^2},$$

$$M_{00} = \frac{\sqrt{\delta}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varphi}\, dx\, dy = 1,$$

$$M_{10} = \frac{\sqrt{\delta}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varphi}\, x\, dx\, dy = 0,$$

$$M_{01} = \frac{\sqrt{\delta}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varphi}\, y\, dx\, dy = 0,$$

$$M_{20} = \frac{\sqrt{\delta}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varphi}\, x^2\, dx\, dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma}{\delta},$$

$$M_{11} = \frac{\sqrt{\delta}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varphi} x y \, dx \, dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{\beta}{\delta},$$

$$M_{02} = \frac{\sqrt{\delta}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varphi} y^2 \, dx \, dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{\delta}.$$

Man erhält also

$$r = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha\gamma}} = \left(1 + \frac{c^2}{h^2 \mu^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{c^2}{k^2 \nu^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Es ist unmittelbar ersichtlich, dass der Korrelationskoeffizient $|r| < 1$ ist, aber dass er im übrigen sehr verschiedene Werte annehmen kann, je nach den Werten der Konstanten des Problems. Die Beziehung zwischen ξ und η wird durch die Konstanten c, h, k, μ und ν definiert. Durch die Beobachtungen ist $F(x, y)$ gegeben, und aus dieser Funktion können die Momente M_{rs} berechnet werden. Bei der praktischen Arbeit entsprechen den M_{rs} die »standard deviations» und die Produktsumme, und zwar entspricht

M_{20} dem Ausdruck $\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2$,

M_{11} » » $\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu y_\nu$,

M_{02} » » $\sigma_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu^2$,

wo n die Anzahl von Beobachtungen bedeutet, und die Beobachtungswerte

$$x_1, y_1; \; x_2, y_2; \; x_3, y_3; \; \ldots \; x_n, y_n$$

sind.

§ 11. Näheres Studium des einfachen Normalfalls.

Das Problem ist nun das folgende. Wenn eine normale Korrelationsfunktion, d. h. eine Funktion vom Typus

$$C\, e^{-\varphi(x,y)}$$

(φ eine homogene definite positive Form zweiten Grades) gegeben ist,

erstens: anzugeben, ob man sie als das Resultat einer statistisch funktionalen Beziehung von der im vorhergehenden bestimmten Art überhaupt auffassen kann;

zweitens: wenn ja, die definierenden Konstanten c, h, k, μ, ν zu berechnen.

Eine funktionale Beziehung

$$\xi \overset{h}{\sim} \mu\, \tau,$$

$$\eta \overset{k}{\sim} \nu\, \tau,$$

werden wir auch kurz als eine Realisierung der Beziehung

$$\frac{\xi}{\eta} = \frac{\mu}{\nu}$$

bezeichnen können.

Es lässt sich nun leicht verifizieren, dass, welche Werte die Konstanten α, β, γ der gegebenen Funktion auch haben, man immer ein System von Werten c, h, k, μ und ν durch folgende Relationen bestimmen kann:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{\gamma}{\delta} - \frac{\beta}{\delta}\varrho,$$

$$\frac{1}{k^2} = \frac{\alpha}{\delta} - \frac{\beta}{\delta} \cdot \frac{1}{\varrho},$$

$$c^2 = \delta,$$

$$\frac{\mu}{\nu} = \varrho;$$

$$\mu\,\nu = \sigma\frac{\beta}{\delta},$$

wo ϱ und σ willkürliche Parameter sind, so dass die gegebene Funktion als das Resultat der Beziehung

$$\tau \overset{c}{\sim} 0,$$

$$\xi \overset{h}{\sim} \mu\,\tau,$$

$$\eta \overset{k}{\sim} \nu\,\tau,$$

aufgefassst werden kann.

Die Parameter ϱ und σ sind aber nicht ganz willkürlich, müssen vielmehr so gewählt werden, dass die Werte von c, h, k, μ und ν verwendbar werden. Dies gibt:

I. $\sigma > 0$.

II. $\varrho\left(=\frac{\mu}{\nu}\right)$ muss dasselbe Vorzeichen wie β haben.

III. ϱ muss so gewählt werden, dass $\gamma - \beta\,\varrho > 0, \alpha - \frac{\beta}{\varrho} > 0$, d. h. so dass

$$\frac{\beta}{\alpha} < \varrho < \frac{\gamma}{\beta}.$$

Die Bedingung III ist nun für eine unendliche Menge von Werten ϱ befriedigt, weil nämlich $\alpha\gamma - \beta^2 > 0$ vorausgesetzt wurde. Es ist also nicht nur möglich, die Funktion $F(x, y)$ auf die angegebene Weise aufzufassen, es ist auf unendlich viele Weisen möglich. Die Korrelationsfunktion kann als die statistische Realisierung einer von unendlich vielen Beziehungen von der Art

$$\frac{\xi}{\eta} = \varrho$$

angesehen werden.

Wir wollen nun untersuchen, zwischen welchen Grenzen der Parameter ϱ gewählt werden kann. Zu dem Zwecke werden wir uns noch eines Begriffes der GALTON-PEARSON'schen Korrelationstheorie erinnnern.

Es sei für jeden Wert x_0 das Mittel y_0 der Werte y berechnet, welche η annehmen kann, wenn ξ den Wert x_0 angenommen hat. Man erhält für y_0 die Gleichung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (y - y_0)\, F(x_0, y)\, dy = 0$$

und somit

$$y_0 = \frac{\beta}{\gamma} \cdot x_0 .$$

Die Mittel y_0 liegen also sämtlich auf einer Geraden, die wir schreiben können

$$\frac{x}{y} = \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{\gamma}{\beta},$$

und welche, wie wir schon oben gesagt haben, als Regressionslinie bezeichnet wird. Berechnet man auf dieselbe Weise für jeden Wert y_0 den entsprechenden Mittelwert x_0, so erhält man die zweite Regressionslinie, deren Gleichung

$$\frac{x}{y} = \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\beta}{\alpha}$$

sei. Wenn man jetzt den unbestimmten Parameter $\varrho = \operatorname{tg} \theta$ setzt, so ergibt sich statt der oben genannten Bedingung für den Parameter ϱ die folgende für θ

$$\theta_1 < \theta < \theta_2 .$$

Wir haben also den

Satz. Wenn die Korrelationsfunktion für ξ und η

$$F(x, y) = \frac{\sqrt{\delta}}{\pi} e^{-(\alpha x^2 - 2\beta x y + \gamma y^2)}$$

gegeben ist, und man mit θ eine beliebige Zahl zwischen θ_1 und θ_2 bezeichnet, wo

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\beta}{\alpha},$$

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{\gamma}{\beta},$$

so kann man fünf Zahlen c, h, k, μ und ν bestimmen, sodass

$$\xi \overset{h}{\sim} \mu \tau,$$

$$\eta \overset{k}{\sim} \nu \tau,$$

$$\tau \overset{c}{\sim} 0,$$

und gleichzeitig

$$\frac{\mu}{\nu} = \operatorname{tg} \theta,$$

ist.

Mit anderen Worten: $F(x, y)$ kann als eine statistische Realisierung einer beliebigen Geraden zwischen den Regressionslinien angesehen werden.

Wir sind jetzt imstande, die wirkliche Bedeutung des Korrelationskoeffizienten in unserem Fall anzugeben. Man hat

$$r = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha \gamma}}.$$

Aus den Ungleichungen in III (S. 31) schliesst man, dass

$$1 < \frac{\varrho}{\operatorname{tg} \theta_1} < \frac{1}{r^2},$$

$$r^2 < \frac{\varrho}{\operatorname{tg} \theta_2} < 1.$$

Man sieht, dass je näher r den Werten ± 1 liegt, je mehr beschränkt die Variation von ϱ ist. Der Winkel $\theta_2 - \theta_1$ nimmt ab, wenn r sich 1 nähert, die Regressionslinien konvergieren

gegen eine zusammenfallende Lage und die Gerade, welche annähernd realisiert ist, konvergiert auch gegen diese Grenzlage.

Um einen in der Natur beobachteten Fall mit unserem schematischen Fall identifizieren zu können, muss man folgende Voraussetzungen machen:

1. Die Korrelationsfunktion ist **normal**, d. h. von der Form

$$\frac{\sqrt{\delta}}{\pi} e^{-q(x,y)}.$$

Diese Bedingung ist von der Eigenschaft, dass man, wenigstens mit gewisser Annäherung, durch Studium der Beobachtungen entscheiden kann, ob sie erfüllt ist oder nicht.

2. Die Veränderlichen ξ und η sind **lineare Funktionen** einer Veränderlichen t in dem oben auseinandergesetzten Sinne.

Diese zweite Bedingung ist mit einer Hypothese über die betreffende Naturerscheinung gleichwertig. Diese Hypothese ist augenscheinlich ziemlich speziell.

Es muss bemerkt werden, dass eine vollkommene Kenntnis der Korrelationsfunktion doch keineswegs genügt, um den funktionalen Zusammenhang zu bestimmen, auch in dem speziellen Falle nicht, den wir eben betrachtet haben. Dies darf aber nicht verwundern. Das Studium der Korrelationsfunktion muss doch für ein oberflächliches Naturstudium angesehen werden.

Einen gewissen Wert hat es ohne Zweifel. Wenn die oben gegebenen Voraussetzungen plausibel gemacht worden sind, so kann durch das Studium der Korrelationsfunktion ein Schluss über den Funktionszusammenhang gezogen werden: die unbekannte Gerade, die den Zusammenhang sozusagen repräsentiert, kann zwischen bestimmte Grenzlagen eingeschlossen werden. Die Rolle des Korrelationskoeffizienten ist hierbei nur die, eine Vorstellung von der Grösse des Variationsgebietes zu geben. Auf die Frage, ob ein Zusammenhang existiert oder nicht, kann er selbstverständlich keine Antwort geben.

§ 12. Der BRAVAIS'sche Fall als Grenzfall.

Wir berechnen jetzt die Verteilungsfunktion $p(x)$ der Veränderlichen ξ, welche durch die Relation

$$\xi \overset{\varepsilon}{=} \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_s v_s,$$

wo $v_\lambda \overset{c_\lambda}{\sim} 0$ ($\lambda = 1, 2, 3, \ldots s$), definiert ist. Man hat nach der Definition

$$p(x) = \frac{c_1 \ldots c_s}{(\sqrt{\pi})^s} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int \theta_\varepsilon (x - \mu_1 t_1 - \mu_2 t_2 - \cdots - \mu_s t_s)\, e^{-c_1^2 t_1^2 - c_2^2 t_2^2 - \cdots - c_s^2 t_s^2} dt_1 \ldots dt_s.$$

Wir führen die Integrationsvariablen $u_1, u_2, \ldots u_s$ ein, die durch die Gleichheiten

$$(\zeta) \qquad \begin{aligned} u_1 &= \mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \cdots + \mu_s t_s, \\ u_2 &= a_{21} t_1 + a_{22} t_2 + \cdots + a_{2s} t_s, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_s &= a_{s1} t_1 + a_{s2} t_2 + \cdots + a_{ss} t_s \end{aligned}$$

definiert werden, wo $a_{21}, \ldots a_{ss}$ so gewählt sind, dass die Determinante $\triangle$ des Systems $\neq 0$ ist. Man erhält

$$p(x) = \frac{1}{\triangle} \frac{c_1 \ldots c_s}{(\sqrt{\pi})^s} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int \theta_\varepsilon (x - u_1)\, e^{-f(u_1 \ldots u_s)} du_1 \ldots du_s,$$

wo $f(u_1 \ldots u_s)$ eine homogene quadratische Form bedeutet. Wenn man hier sukzessiv nach $u_s, u_{s-1}, \ldots u_2$ integriert, wird

$$p(x) = A \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_\varepsilon (x - u_1)\, e^{-a^2 u_1^2}\, d u_1 ,$$

$$= A \cdot \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} e^{-a^2 u_1^2}\, d u_1 ,$$

Sei die neue Veränderliche ξ_1 durch die Bedingung

$$\xi_1 = \mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \cdots + \mu_s t_s$$

bestimmt, und sei $p_1(x)$ ihre Verteilungsfunktion. Um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass ξ_1 ins Intervall $a_1 < x < a_2$ fällt, hat man den Ausdruck

$$\frac{c_1 \ldots c_s}{(\sqrt{\pi})^s}\, e^{-c_1^2 t_1^2 - \cdots - c_s^2 t_s^2}\, dt_1 \ldots dt_s$$

über den Bereich zu integrieren, welcher durch die Ungleichheit

$$a_1 < \mu_1 t_1 + \cdots + \mu_s t_s < a_2$$

definiert ist. Führt man hier die Substitution (ξ) aus, so ergibt sich

$$\int_{a_1}^{a_2} p_1(x)\, d x = \frac{c_1 \ldots c_s}{(\sqrt{\pi})^s} \frac{1}{\triangle} \int_{a_1}^{a_2} d u_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int e^{-f(u_1, u_2 \ldots u_s)}\, d u_2 \ldots d u_s ,$$

wo f dieselbe Form wie oben bedeutet. Integriert man nach $u_s, u_{s-1} \ldots u_2$, so bekommt man mit denselben Konstanten A und a wie oben

$$\int_{a_1}^{a_2} p_1(x)\, d x = A \int_{a_1}^{a_2} e^{-a^2 u_1^2}\, d u_1 .$$

Man kann also setzen:

$$p(x) = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} p_1(u_1)\,du_1.$$

Wenn $\varepsilon \to 0$, wird

$$\operatorname{Lim} p(x) = p_1(x).$$

Wir haben also den folgenden

Satz. Wenn

$$\xi = \mu_1 x_1 + \cdots + \mu_s x_s,$$

$$\xi_1 = \mu_1 x_1 + \cdots + \mu_s x_s,$$

so hat man

$$\xi - \xi_1 \overset{c}{\sim} 0,$$

wo c durch die Relation

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\mu_1^2}{c_1^2} + \frac{\mu_2^2}{c_2^2} + \cdots + \frac{\mu_s^2}{c_s^2}$$

gegeben ist.

Wir werden jetzt die beiden Veränderlichen

$$\xi \overset{\delta}{=} \mu_1 x_1 + \cdots + \mu_s x_s \text{ und}$$

$$\eta \overset{\varepsilon}{=} \nu_1 x_1 + \cdots + \nu_s x_s$$

studieren und ihre Korrelationsfunktion $F(x, y)$ mit der Korrelationsfunktion $F_1(x, y)$ der Veränderlichen

$$\xi_1 = \mu_1 x_1 + \cdots + \mu_s x_s \text{ und}$$

$$\eta_1 = \nu_1 x_1 + \cdots + \nu_s x_s$$

vergleichen. Wir setzen

$$(\iota)\quad F(x,y) = \frac{c_1 \ldots c_s}{(\sqrt{\pi})^s} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int \varphi_\delta(x - \mu_1 t_1 - \cdots - \mu_s t_s)\, \varphi_\varepsilon(y -$$

$$- \nu_1 t_1 - \cdots - \nu_s t_s)\, e^{-c_1^2 t_1^2 - \cdots - c_s^2 t_s^2}\, dt_1 \ldots dt_s .$$

$F_1(x, y)$ ist in § 7 berechnet worden. Man erhält ganz analog wie oben im Fall einer einzigen Veränderlichen

$$F(x, y) = \frac{1}{4\,\delta\varepsilon} \int_{x-\delta}^{x+\delta} du_1 \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} du_2\, F_1(u_1, u_2).$$

Lässt man nun

$$\delta \to 0 \text{ und } \varepsilon \to 0$$

konvergieren, so bekommt man augenscheinlich

$$F(x, y) \to F_1(x, y).$$

Man hat also folgenden

Satz. Wenn

$$\xi = \mu_1 t_1 + \cdots + \mu_s t_s,$$

$$\eta = \nu_1 t_1 + \cdots + \nu_s t_s,$$

$$\xi_1 = \mu_1 t_1 + \cdots + \mu_s t_s,$$

$$\eta_1 = \nu_1 t_1 + \cdots + \nu_s t_s,$$

$$t_\lambda \overset{c_\lambda}{\sim} 0 \quad (\lambda = 1, 2, 3 \ldots s),$$

so hat man

$$F(x, y) = F_1(x, y),$$

wo $F_1(x, y)$ die Funktion auf Seite 17 bedeutet.

Der Bravais'sche Fall ist folglich mit einem speziellen Grenzfall unserer allgemeineren Theorie identisch. Der Grenzfall ist aber von unserem Standpunkte aus nicht normal. In diesem Fall existiert nämlich keine Korrelationsfunktion zwischen $\xi, \eta, t_1, t_2, \ldots t_s$, und also auch keine generierenden Funktionen für ξ und η.

§ 13. Der allgemeine Normalfall.

Die Verteilungsfunktion der Veränderlichen

$$\xi \overset{h}{\sim} \mu_1 \tau_1 + \mu_2 \tau_2 + \cdots + \mu_s \tau_s,$$

wo

$$\tau_\lambda \overset{c_\lambda}{\sim} 0 \quad (\lambda = 1, 2, \ldots s),$$

lautet

$$p(x) = \frac{h c_1 \ldots c_s}{(\sqrt{\pi})^{s+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int e^{-h^2(x - \mu_1 t_1 - \cdots - \mu_s t_s)^2 - c_1^2 t_1^2 - \cdots - c_s^2 t_s^2} dt_1 \ldots dt_s.$$

Integriert man nach t_s, wird das Integral

$$\frac{h c_s}{(\sqrt{\pi})^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2(X - \mu_s t_s)^2 - c_s^2 t_s^2} dt_s = \frac{h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h_1^2 X^2},$$

wo

$$\frac{1}{h_1^2} = \frac{\mu_s^2}{c_s^2} + \frac{1}{h^2},$$

und der Ausdruck für $p(x)$ geht somit in den folgenden über:

$$p(x) = \frac{h_1 c_1 \ldots c_{s-1}}{(\sqrt{\pi})^s} \cdot$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int e^{-h_1^2 (x - \mu_1 t_1 - \cdots - \mu_{s-1} t_{s-1})^2 - c_1^2 t_1^2 - \cdots - c_{s-1}^2 t_{s-1}^2} dt_1 \ldots dt_{s-1}$$

Wird das Verfahren wiederholt, erhält man endlich

$$p(x) = \frac{h_s}{\sqrt{\pi}} e^{-h_s^2 x^2},$$

wo

$$(9) \qquad \frac{1}{h_s^2} = \frac{\mu_1^2}{c_1^2} + \frac{\mu_2^2}{c_2^2} + \cdots + \frac{\mu_s^2}{c_s^2} + \frac{1}{h^2}.$$

Beachtet man jetzt, dass

$$\lim_{h \to \infty} \frac{1}{h_s^2} = \frac{\mu_1^2}{c_1^2} + \cdots + \frac{\mu_s^2}{c_s^2},$$

so kann man also folgende Sätze aufstellen.

Satz. Wenn

$$\xi \overset{h}{\sim} \mu_1 x_1 + \cdots + \mu_s x_s,$$

$$x_\lambda \overset{c_\lambda}{\sim} 0 \qquad (\lambda = 1, 2 \ldots s),$$

so hat man

$$\xi \overset{h_s}{\sim} 0,$$

wo h_s durch die Formel (ϑ) gegeben ist.

Satz. Wenn

$$\xi \overset{\infty}{\sim} \mu_1 x_1 + \cdots + \mu_s x_s,$$

$$\xi_1 = \mu_1 x_1 + \cdots + \mu_s x_s,$$

so ist

$$\xi = \xi_1.$$

Um die Verallgemeinerung analog zum § 12 durchzuführen, hat man zu setzen

$$\xi \overset{h}{\sim} \mu_1 x_1 + \cdots + \mu_s x_s,$$

$$\eta \overset{k}{\sim} \nu_1 x_1 + \cdots + \nu_s x_s.$$

Die Korrelationsfunktion von ξ und η nimmt die folgende Form an:

$$F(x,y) = \frac{h k c_1 \ldots c_s}{(\sqrt{\pi})^{s+2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots$$

$$\cdots \int e^{-h^2(x-\mu_1 t_1 - \cdots - \mu_s t_s)^2 - k^2(y - \nu_1 t_1 - \cdots - \nu_s t_s)^2 - c_1^2 t_1^2 - \cdots - c_s^2 t_s^2} dt_1 \ldots dt_s.$$

Der Exponent von e ist eine quadratische Form, nicht homogen in den Integrationsvariablen, aber homogen in

$x, y, t_1 \ldots t_s$. Integriert man zunächst nach t_s, so bekommt man unter den $s-1$ übrigen Integralzeichen eine neue Funktion, wo der Exponent von e auch eine quadratische Form ist, homogen in bezug auf $x, y, t_1 \ldots t_{s-1}$. Die Wiederholung des Verfahrens gibt endlich

$$F(x, y) = \frac{\sqrt{\delta}}{\pi} e^{-(\alpha x^2 - 2\beta x y + \gamma y^2)},$$

$$\delta = \alpha\gamma - \beta^2,$$

wo die multiplikative Konstante so bestimmt wurde, dass

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x, y)\, dx\, dy = 1.$$

Man kann aus den Beobachtungen $\frac{\alpha}{\delta}$ und $\frac{\gamma}{\delta}$ sehr leicht berechnen. Die Verteilungsfunktion für ξ wird, einerseits,

$$p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, y)\, dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}\, e^{-\frac{\delta}{\gamma} x^2},$$

andererseits ist, wie wir gesehen haben,

$$\xi \overset{h_s}{\sim} 0.$$

Man erhält also für die betreffenden Konstanten

$$\frac{\gamma}{\delta} = \frac{1}{h^2} + \frac{\mu_1^2}{c_1^2} + \cdots + \frac{\mu_s^2}{c_s^2},$$

$$\frac{\alpha}{\delta} = \frac{1}{k^2} + \frac{\nu_1^2}{c_1^2} + \cdots + \frac{\nu_s^2}{c_s^2}.$$

Wir werden jetzt zur Berechnung von δ übergehen.[1] Zu dem Zwecke sei zuerst bemerkt, dass

[1] Die folgende Herleitung verdanke ich teilweise einer freundlichen Bemerkung von Herrn M. Riesz.

$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}F(0,0) = \frac{h\,k\,c_1\dots c_s}{(\sqrt{\pi})^{s+2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int e^{-G(t_1,t_2\dots t_s)}\,dt_1\dots dt_s,$$

wo man mit G folgende homogene Form bezeichnet:

$$G(t_1\dots t_s) = h^2\left(\sum_{\lambda=1}^{s}\mu_\lambda t_\lambda\right)^2 + k^2\left(\sum_{\lambda=1}^{s}\nu_\lambda t_\lambda\right)^2 + \sum_{\lambda=1}^{s}c_\lambda^2 t_\lambda^2.$$

Die Diskriminante dieser Form ist

$$D = \begin{vmatrix} h^2\mu_1^2 + k^2\nu_1^2 + c_1^2; & h^2\mu_1\mu_2 + k^2\nu_1\nu_2; & \dots \\ h^2\mu_1\mu_2 + k^2\nu_1\nu_2; & h^2\mu_2^2 + k^2\nu_2^2 + c_2^2; & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ h^2\mu_1\mu_s + k^2\nu_1\nu_s; & h^2\mu_2\mu_s + k^2\nu_2\nu_s; & \dots \end{vmatrix}.$$

Die Matrix von D ist die Summe dreier Matrizen, die wir folgendermassen bezeichnen wollen:

$$\{A_1, A_2, \dots A_s\}, \{B_1, B_2, \dots B_s\}, \{C_1, C_2, \dots C_s\}.$$

Die A_i, B_i, C_i bedeuten hier Kolonnen, nämlich

$$A_i = \begin{Bmatrix} h^2\mu_i\mu_1 \\ h^2\mu_i\mu_2 \\ \vdots \\ h^2\mu_i\mu_s \end{Bmatrix} = h^2\mu_i\begin{Bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_s \end{Bmatrix}; \quad B_i = \begin{Bmatrix} k^2\nu_i\nu_1 \\ k^2\nu_i\nu_2 \\ \vdots \\ k^2\nu_i\nu_s \end{Bmatrix} = k^2\nu_i\begin{Bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \vdots \\ \nu_s \end{Bmatrix},$$

während C_i die Kolonnen der Matrix

$$\begin{vmatrix} c_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c_3^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_s^2 \end{vmatrix}$$

sind. Die Matrix der Determinante D kann nun geschrieben werden

$$\{A_1 + B_1 + C_1,\ A_2 + B_2 + C_2, \ldots A_s + B_s + C_s\}.$$

Man kann also D in 3^s Teildeterminanten zerlegen, nämlich in alle Determinanten der Matrizen

$$\{P_1, P_2, \ldots P_s\},$$

wo P irgend einen der Buchstaben A, B oder C bezeichnet. Von diesen Determinanten sind alle Null, die mehr als ein A oder mehr als ein B enthalten. Es erübrigt sich nur:

1) Die von allen C_i zusammengesetzte Determinante, welche $= c_1^2 c_2^2 \ldots c_s^2$ ist.

2) $2s$ Determinanten, deren jede ein A *oder* ein B enthält.

3) $s(s-1)$ Determinanten, deren jede ein A *und* ein B enthält.

Nach einigen Rechnungen erhält man

$$\frac{D}{h^2 k^2 c_1^2 \ldots c_s^2} = \frac{1}{h^2 k^2} + \frac{1}{h^2} \sum_{\lambda=1}^{s} \frac{\nu_\lambda^2}{c_\lambda^2} + \frac{1}{k^2} \sum_{\lambda=1}^{s} \frac{\mu_\lambda^2}{c_\lambda^2} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{\varkappa=1}^{s} \sum_{\lambda=1}^{s} \frac{1}{c_\varkappa^2 c_\lambda^2} \begin{vmatrix} \mu_\varkappa & \nu_\varkappa \\ \mu_\lambda & \nu_\lambda \end{vmatrix}^2.$$

Führt man auf G die Substitution

$$t_1 = a_{11} u_1 + a_{12} u_2 + \cdots + a_{1s} u_s,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$t_s = a_{s1} u_1 + a_{s2} u_2 + \cdots + a_{ss} u_s$$

aus, deren Determinante $\|a_{ik}\|$ mit J bezeichnet werde, und werden die a_{ik} so gewählt, dass das Substitutionsresultat

$$G'(u_1, u_2, \ldots u_s) = \alpha_1^2 u_1^2 + \alpha_2^2 u_2^2 + \cdots + \alpha_s^2 u_s^2$$

aus lauter von Null verschiedenen Quadraten besteht, was

wegen $D \neq 0$ immer gemacht werden kann, so wird die Diskriminante von G'

$$D' = \alpha_1^2 \alpha_2^2 \ldots \alpha_s^2,$$

und man erhält bekanntlich

$$D' = J^2 D.$$

Das Integral $F(0,0)$ geht durch unsere Substitution in den folgenden Ausdruck über:

$$\pm F(0,0) = \frac{h \cdot k \cdot c_1 \ldots c_s}{(\sqrt{\pi})^{s+2}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int e^{-\alpha_1^2 u_1^2 - \cdots - \alpha_s^2 u_s^2} \cdot J \cdot du_1 \ldots du_s$$

$$= \frac{h \cdot k \cdot c_1 \ldots c_s}{(\sqrt{\pi})^{s+2}} \cdot J \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha_1} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha_2} \cdots \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha_s}$$

$$= \frac{h \cdot k \cdot c_1 \ldots c_s}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{D}}.$$

Beachtet man, dass dieser Ausdruck

$$= \frac{\sqrt{\delta}}{\pi}$$

ist, ergibt sich

$$\frac{1}{\delta} = \frac{D}{h^2 k^2 c_1^2 \ldots c_s^2}$$

oder, nach dem oben gesagten,

$$\frac{1}{\delta} = \frac{1}{h^2 k^2} + \frac{1}{h^2} \sum_{\lambda=1}^{s} \frac{v_\lambda^2}{c_\lambda^2} + \frac{1}{k^2} \sum_{\lambda=1}^{s} \frac{u_\lambda^2}{c_\lambda^2} + \frac{1}{2} \sum_{\varkappa=1}^{s} \sum_{\lambda=1}^{s} \frac{(u_\varkappa v_\lambda - u_\lambda v_\varkappa)^2}{c_\varkappa^2 c_\lambda^2}.$$

Durch die Relation

$$\frac{\beta^2}{\delta^2} = \frac{\alpha\gamma}{\delta^2} - \frac{1}{\delta}$$

erhält man schliesslich, wenn das Vorzeichen durch Spezialisierung auf den Fall des § 10 bestimmt wird,

$$\frac{\beta}{\delta} = \frac{\mu_1 \nu_1}{c_1^2} + \frac{\mu_2 \nu_2}{c_2^2} + \cdots + \frac{\mu_s \nu_s}{c_s^2}.$$

Man sieht also, dass α, β, γ in diesem Fall für $h \to \infty$ und $k \to \infty$ gegen die Werte auf S. 17 konvergieren. Man hat demnach folgende Sätze.

Satz. Wenn

$$\xi \overset{h}{\sim} \mu_1 \tau_1 + \cdots + \mu_s \tau_s,$$

$$\eta \overset{k}{\sim} \nu_1 \tau_1 + \cdots + \nu_s \tau_s,$$

$$\tau \overset{c_\lambda}{\sim} 0,$$

so ist

$$F(x, y) = \frac{\sqrt{\delta}}{\pi} e^{-(\alpha x^2 - 2\beta x y + \gamma y^2)},$$

wo die Konstanten oben gegeben sind.

Satz. Wenn

$$\xi \overset{\infty}{\sim} \mu_1 \tau_1 + \cdots + \mu_s \tau_s,$$

$$\eta \overset{\infty}{\sim} \nu_1 \tau_1 + \cdots + \nu_s \tau_s,$$

$$\xi_1 \equiv \mu_1 \tau_1 + \cdots + \mu_s \tau_s,$$

$$\eta_1 \equiv \nu_1 \tau_1 + \cdots + \nu_s \tau_s,$$

$$\tau_\lambda \overset{c_\lambda}{\sim} 0,$$

so ist

$$F(x, y) = F_1(x, y),$$

wo $F_1(x, y)$ die Bravais'sche Funktion auf S. 17 bedeutet.

Der BRAVAIS'sche Fall tritt also wiederum als ein Grenzfall der allgemeinen Theorie auf.

Für den Korrelationskoeffizienten wird in dem allgemeinen Normalfall

$$r^2 = \frac{\beta^2}{\alpha\gamma} = \frac{\left(\sum \frac{u_\lambda v_\lambda}{c_\lambda^2}\right)^2}{\left(\frac{1}{h^2} + \sum \frac{u_\lambda^2}{c_\lambda^2}\right)\left(\frac{1}{k^2} + \sum \frac{v_\lambda^2}{c_\lambda^2}\right)}.$$

Um die Bedeutung des Korrelationskoeffizienten in komplizierteren Fällen als dem des § 10 darzustellen, könnte man vielleicht zunächst die Formeln dieses Paragraphen zum Ausgangspunkt wählen. Der Verfasser hegt auch die Hoffnung, dass durch Ausdehnung der Untersuchung auf unendliche Prozesse allgemeinere Resultate erhalten werden können.

§ 14. Kritische Bemerkungen.

Wir haben oben gesehen, dass die sogenannte normale Korrelationsfunktion als das Resultat einer grossen Gruppe von einfachen schematischen Korrelationsfällen herauskommt. Es muss demnach betont werden, dass eine normale Korrelationsfunktion eine sehr vieldeutige Erscheinung sein muss. In dem einfachsten Falle haben wir etwas näher untersucht, inwiefern das Studium der Korrelationsfunktion eine Kenntnis der inneren Natur der Verknüpfung zwischen den Veränderlichen zu geben vermag. Die negativen Resultate, zu denen wir dabei gelangt sind, gelten natürlich a fortiori in den komplizierteren Fällen.

Für die englische Schule hat die Bestimmung des Korrelationskoeffizienten r eine grosse Bedeutung. Es sind dabei zwei Sätze, die, wenn auch nicht immer deutlich ausgesprochen, das Fundament dieser Ansicht bilden. Die beiden Sätze sind die folgenden:

1. Wenn $r = 0$, so sind ξ und η von einander unabhängig.

2. Wenn $r = +1$ oder -1, so sind ξ und η einander streng proportional.

Diese Aussagen sind aber nur unrichtige Verzerrungen zweier richtigen Sätze, die etwa folgendermassen ausgedrückt werden können:

1'. Wenn ξ und η von einander unabhängig sind, so hat man mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit eine normale Korrelationsfunktion mit $r = 0$ zu erwarten.

2'. Für eine ganz beliebige Korrelationsfunktion lässt es sich beweisen, dass r nie $= +1$ oder -1 werden kann, sondern dass immer $|r| < 1$ ist.

Bei PEARSON habe ich keinen Versuch gefunden, die Aussagen 1 und 2 zu beweisen. Was BRAVAIS betrifft, so ist es sicher, dass er sie nicht für richtig ansah. Für die Behauptung 1 hat er es deutlich ausgesprochen. In der zitierten Abhandlung findet sich bei der Besprechung des Falles $r = 0$ folgende Stelle: »Ainsi, dans ce cas, la probabilité des valeurs simultanées $\xi = x$, $\eta = y$, est exactement la même que si les variables ξ et η étaient entièrement indépendantes l'une de l'autre.« Es ist also hier deutlich gesagt, dass zwei Variablen, die wirklich von einander abhängen, $r = 0$ geben können. Was den Artikel 2 betrifft, so haben wir oben ausdrücklich hervorgehoben, dass der Fall von proportionalen Variablen von der Untersuchung gänzlich ausgeschlossen ist.

In einer Abhandlung vom Jahre 1897[1] hat G. UDNY YULE einen scheinbaren Beweis für die Aussage 2 gegeben. Der Verfasser berechnet zunächst die Ausdrücke

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{x_\nu}{\sigma_x} - r\frac{y_\nu}{\sigma_y}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{y_\nu}{\sigma_y} - r\frac{x_\nu}{\sigma_x}\right)^2 = 1 - r^2,$$

wo die Bezeichnungen mit denen des § 10 (Seite 29) übereinstimmen. Er setzt dann fort: »Hence r cannot be greater than unity. If r be equal to unity, or of the correlation be, perfect, all the above ... sums become zero. But

$$\sum\left(\frac{x}{\sigma_x} \pm \frac{y}{\sigma_y}\right)^2$$

can only vanish if

[1] On the Significance of BRAVAIS' Formulæ for Regression, &c., in the case of Skew Correlation. Proc. Roy. Soc., Vol. LX, 1897, p. 477.

$$\frac{x}{\sigma_x} \pm \frac{y}{\sigma_y} = 0$$

in every case, or if the relation holds good,

$$(\iota) \qquad \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \cdots = \pm \frac{\sigma_x}{\sigma_y},$$

the sign of the last term depending on the sign of r. Hence the statement that two variables are 'perfectly correlated' implies that relation (ι) holds good, or that all pairs of deviations bear the same ratio to one another.»

Um die Sache besser zu verstehen, wollen wir von den angenäherten Summen zu den exakten Integralen übergehen Bildet man das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty}\int \left(y - \frac{M_{11}}{M_{20}} x\right)^2 F(x, y)\, dx\, dy,$$

so ergibt sich nach und nach

$$I = M_{02} - \frac{M_{11}^2}{M_{20}} - 2\frac{M_{11}^2}{M_{20}} = M_{02}\left(1 - \frac{M_{11}^2}{M_{02} M_{20}}\right) = M_{02}(1 - r^2).$$

Hieraus folgt unmittelbar (für eine beliebige Korrelationsfunktion F), dass

$$1 - r^2 > 0$$

und somit immer

$$|r| < 1.$$

Es hat also keine Bedeutung zu fragen, was eintreffen würde, wenn r exakt $= 1$ wäre.

Man kann aber bemerken, dass wenn $F(x, y)$ in der ganzen Ebene mit Ausschluss der nächsten Umgebung der Geraden

$$y = \frac{M_{11}}{M_{20}} x$$

verschwindend wäre, man mit gewisser Annäherung $r^2 = 1$ hätte. Die Analogie mit unserem theoretischen Spezialfall des § 9 ist offenbar.

Das Integral I kann auch zweifellos den Ausgangspunkt einer genaueren Untersuchung bilden.[1] Wenn man nämlich das Integral

$$I(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \int_{-\infty}^{\mathfrak{x}} \int_{-\infty}^{\mathfrak{y}} \left(y - \frac{M_{11}}{M_{20}} x\right)^2 F(x, y)\, dx\, dy$$

betrachtet, so findet man, dass die Annahme

$$r \text{ nahe } = \pm 1$$

zur folgenden Ungleichheit führt:

$$I(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \leq I(\infty, \infty) < \varepsilon,$$

wo ε klein ist. Man kann also unter gewissen Voraussetzungen schliessen, dass

$$\frac{\partial^2 I(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})}{\partial \mathfrak{x}\, \partial \mathfrak{y}} = \left(\mathfrak{y} - \frac{M_{11}}{M_{20}} \mathfrak{x}\right)^2 F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) < \delta,$$

wo δ auch klein ist. Also: wenn der Punkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ sich nicht in einer gewissen Nähe der obengenannten Geraden befindet, so muss $F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ klein sein. Das sind aber alles Dinge, die näher untersucht und präzisiert werden müssen.

Einen neuen Beweis für die unrichtige Aussage 2 hat Charlier[2] gegeben. Der Verfasser definiert r für eine beliebige Korrelationsfunktion und berechnet dann die Formel

$$(\varkappa) \quad M_{20} M_{02} - M_{11}^2 = $$

$$= \frac{1}{2} \iiiint_{-\infty}^{+\infty} (xv - yu)^2 F(x, y)\, F(u, v)\, dx\, dy\, du\, dv.$$

---

[1] Ich verdanke Herrn G. Bohlmann eine interessante Anweisung in dieser Richtung.

[2] Contributions to the mathematical theory of statistics. 6. The correlation function of type A. Arkiv för Mat., Astr. och Fys. Bd 9. N:o 26.

Aus dieser Formel kann man offenbar den richtigen Schluss ziehen, dass

$$M_{20} M_{02} - M_{11}^2 \text{ immer} > 0$$

ist, oder dass

$$|r| = \frac{|M_{11}|}{\sqrt{M_{20} M_{02}}} < 1,$$

d. h. einen Beweis für 2′. Der Verfasser macht aber folgende Aussage:

»Hence we have

$$M_{20} M_{02} - M_{11}^2 > 0$$

and consequently . . .

$$r^2 \nless 1 .$$

The right member of ($\varkappa$) vanishes only if

$$xv - yu = 0$$

h. e. if $x:y = u:v$. As u and v denote any values of x and y, this condition involves that x and y are strictly proportional to each other. Only if this takes place we get $r^2 = 1$, else we have ever $r^2 < 1$.»

In dieser dreisten Form mag der Fehler selten vorkommen. Man nimmt an, dass ein Integral, über den ganzen Raum ausgestreckt, gleich Null wird, und zieht daraus einen Schluss über die Integrationsvariablen. Es ist aber interessant, dass der CHARLIER'sche Fehler im Grunde derselbe wie der eben betrachtete von YULE ist. Durch ein näheres Studium des vierfachen Integrals würde sich noch ein Resultat vom Charakter unseres speziellen Falls des § 9 ergeben.

Auf derselben Seite in der zitierten Arbeit kommt folgende Aussage über den Satz 1 vor: »If . . . $r = 0$, we deduce . . .

$$F(x, y) = \varphi(x) \varphi(y),$$

where $\varphi(x)$ and $\varphi(y)$ denote the normal frequency functions of x and y . . . This equation shows immediately that x and y, for $r = 0$, are independent variates.»

Wenn die Korrelationsfunktion normal ist und $r = 0$, so ist es zwar richtig, dass

$$F(x, y) = \frac{\sqrt{\alpha}\sqrt{\gamma}}{\pi} e^{-\alpha x^2 - \gamma y^2} = p(x) q(y),$$

wo $p(x)$ und $q(y)$ die Verteilungsfunktionen von ξ und η bedeuten. Wenn man die Formeln auf Seite 17 oder 41 und 45 betrachtet, so findet man auch, dass dieses in den betreffenden Spezialfällen immer dann eintrifft, wenn $\nu_\varkappa = 0$ für sämtliche $\varkappa$ sind, für welche $\mu_\varkappa \neq 0$ sind, d. h. wenn die Veränderlichen ξ und η nicht von denselben Ursachen abhängen. Aber es kann offenbar auch sonst vorkommen, dass $\beta = 0$ (und also $r = 0$). Es lassen sich m. a. W. zwei Veränderliche konstruieren, für die $r = 0$, welche aber deutlich von einander abhängen.

Durch das Vorhergehende haben wir hoffentlich einen nützlichen Skeptizismus gegenüber den Vorstellungen der Korrelationisten gewonnen.

Wir haben schon bemerkt, dass zwei von einander unabhängige Veränderlichen durch die Wirkung des Zufalls eine normale Korrelationsfunktion generieren, wo $r = 0$ ist. Findet man also beim Aufstellen einer Korrelationstabelle entweder, dass $F(x, y)$ nicht von dem normalen Typus ist, oder dass $F(x, y)$ normal, aber β von Null verschieden ist, so wird man dazu geführt, einen Zusammenhang zwischen ξ und η anzunehmen, — vorausgesetzt, dass die Beobachtungen genügend zahlreich sind, um das Resultat zu sichern.

Aber dies scheint im Grunde das einzige zu sein, was die Korrelationsuntersuchung *ohne weitere Hypothesen* gibt. Und dies ist eben, was der Instinkt meint: wenn ein Blick auf die Korrelationstafel eine ausgeprägte Schiefheit vermerken lässt, so hat man sofort den Verdacht eines Zusammenhangs.

Es wäre nun sehr wünschenswert, wenn die Korrelationisten sich die grosse Arbeit ersparten, alle möglichen Korrelationskoeffizienten auszurechnen. Wenn die Korrelationsuntersuchungen wertvoll sein sollen, so müssen zunächst die Beobachtungen sehr sorgfältig geschehen, die Korrelationstafeln statt der Korrelationskoeffizienten veröffentlicht und

die Korrelationsfunktionen selbst genauer studiert werden was im allgemeinen graphisch geschehen kann.

Dann muss man sich aber über die Hypothesen klar werden. Wir haben hier eine spezielle Art von Hypothesenbildung kennen gelernt: es ist selbstverständlich, dass sie nicht die einzige ist, doch vielleicht die einfachste.

Aber was man vor anderem festhalten muss: es ist kaum Sache des Statistikers, diese Hypothesen zu bilden, ohne die Natur der besonderen Erscheinung zu berücksichtigen. Es wäre vielmehr sehr nützlich, wenn die erforderlichen Hypothesen von den Spezialisten gebildet würden. Die Korrelationstheorie ist kein Stein der Weisen, der durch ein oberflächliches Berühren die verwickeltsten Probleme löst: um bestehende Resultate zu erhalten, muss man versuchen, tiefer in die Fragen einzudringen.

Über die technische Grundlage der Versicherung minderwertiger Leben.

Résumé eines am 23. Mai 1918 im »Svenska Aktuarieföreningen» von Dr. **Jens Pedersen**, Kopenhagen, gehaltenen Vortrages.

Man pflegt das Problem: »Versicherung minderwertiger Leben» als eines der schwierigsten in der Lebensversicherungstechnik zu nennen, und es ist nicht mit Unrecht, dass man diese Bezeichnung anwendet. Dies geht schon daraus hervor, dass das Problem noch nicht auf befriedigende Weise gelöst ist, obgleich es in Wirklichkeit eben so alt ist, als die auf rationeller Grundlage betriebene Lebensversicherung, und obgleich — allerdings mit Unterbrechungen — an der Lösung des Problemes in über hundert Jahren gearbeitet ist.

Die Schwierigkeit bei dem Problem liegt natürlich in erster Linie darin, dass es ein Problem ist, das nicht mit äusserer Hülfe gelöst werden kann. Ich meine hiermit, dass eine befriedigende Lösung nur durchgeführt werden kann, sobald ein sehr umfangreiches Erfahrungsmaterial betreffend die Sterblichkeitsverhältnisse bei minderwertigen Leben vorliegt, aber ein solches Erfahrungsmaterial kann nur durch eine in der Praxis durchgeführte Versicherung der minderwertigen Leben zuwegegebracht werden. Müsste dies ganz wörtlich genommen werden, sähe es ja sehr traurig aus; wenn man sich aber erinnert, dass die Versicherung normaler Leben vor die gleiche Aufgabe gestellt gewesen ist: ihre eigene Grundlage zuwegezubringen, auf ihren eigenen Erfahrungen zu bauen und dass sie diese Aufgabe zufrieden-

stellend gelöst hat, sieht es doch etwas hoffnungsvoller aus, selbst wenn man einräumen muss, dass die Versicherung minderwertiger Leben ein weit komplizierteres Problem ist, als die Versicherung normaler Leben.

Liegt nun auch, wie ich hervorgehoben habe, die Schwierigkeit bei dem umsprochenen Problem in der Art des Problemes selbst, so lässt sich doch nicht läugnen, dass die Schwierigkeit dadurch vermehrt wird, dass eine allseitige Behandlung des Problems eine so eingehende Kenntnis der Versicherungsmedizin und Versicherungstechnik verlangt, wie sie kein Einzelner besitzt; hier fehlt ein Generalnenner, in welchem Medizin und Technik aufgehen. Und leider ist es den Versicherungsärzten und Aktuaren gewöhnlich schwer geworden, sich in der Arbeit an der Lösung des Problemes minderwertiger Leben zu finden und einander zu verstehen.

Der *Arzt* hat einen natürlichen Drang zu individualisieren, sich an das jedem Individ eigentümliche zu heften. Die minderwertigen Leben bleiben deshalb für ihn eine Reihe Individen, die untereinander verschieden sind, nicht blos durch die Art der Krankheiten oder Schwachheiten, sondern auch durch den Grad derselben, und es fällt einem Arzt — und sicher mit gutem Grund — schwer, selbst Individen, die an derselben Krankheit leiden, die gleiche Lebensdauer zuzusprechen; denn, wird er behaupten, sie sind unter einander verschieden, nicht nur mit Rücksicht auf den Grad der Krankheit, sondern auch mit Rücksicht auf eine Reihe anderer Umstände, die auf die Sterblichkeit Einfluss haben wie erbliche Dispositionen, Beschäftigung, ökonomische Verhältnisse u. a. m.

Für den *Aktuar* ist die weitgehende Individualisierung vom Übel, für ihn kommt es darauf an soviele Individen in einer Gruppe zu sammeln, dass er mit passender Sicherheit die Sterblichkeit beurteilen kann, d. h. ohne dass die Zahlen allzu unsicher werden als Folge davon, dass das Material zu beschränkt ist Für ihn handelt es sich darum, statistische Einer in genügender Menge zu erhalten, und er muss deshalb — bis auf Weiteres — von den Eigentümlichkeiten, die die einzelnen Individen in der Gruppe charakterisieren, absehen; aber er ist in der Regel nicht selbst im Stande fest-

zustellen, ob diese Eigentümlichkeiten oder Unterschiede wesentliche oder unwesentliche in ärztlicher Hinsicht sind. Hier ist ein Gebiet, auf welchem Arzt und Aktuar lernen müssen einander in höherem Grade als bisher zu verstehen. Meiner Auffassung nach trägt das Fehlen des rechten Verständnisses zwischen Versicherungsärzten und Versicherungstechnikern die Schuld daran, — nicht dass das Problem immer noch ungelöst ist — aber daran, dass man sich noch nicht darüber einig geworden ist, innerhalb welcher Rahmen oder nach welchen Hauptprinzipien dasselbe zu lösen ist.

Dem einen oder anderen von Ihnen mag es vielleicht wunderlich erscheinen, dass ich von dem Problem der minderwertigen Leben als von einem Problem spreche, das immer noch ungelöst ist. Wenn ich dies tue, liegt der Grund nicht darin, dass ich vergesse, dass in den letzten Jahren sowohl hier in Schweden wie auch in Dänemark und in verschiedenen anderen Ländern den minderwertigen Leben Gelegenheit gegeben wurde Lebensversicherung einzugehen, und auch nicht darin, dass ich die jetzt stattfindende Versicherung minderwertiger Leben unterschätze. Im Gegenteil! Ich meine obendrein, dass die Gesellschaften von seiten der bürgerlichen Gesellschaft grosse Anerkennung verdienen, weil sie durch Zusammenwirken und Verteilung des Risikos eine *praktische* Lösung des Problems durchgeführt haben. Und in ganz besonderem Grade verdienen die privaten Lebensversicherungs-Gesellschaften Anerkennung, weil sie aufs Neue ihren Willen und ihre Fähigkeit gezeigt haben, den Ansprüchen entgegenzukommen, die an sie gestellt werden, und das in einer Periode getan haben, in welcher man von verschiedenen Seiten den Wunsch äussert, ihre Initiative und Handlungstüchtigkeit durch ein Staatsmonopol abzulösen. Und ich bin mir vollständig klar darüber, dass die *praktische* Lösung ein so grosser und bedeutungsvoller Schritt der endgültigen Lösung entgegen ist, sodass nun die beste Aussicht vorhanden ist, dass diese erreicht werden kann.

Aber noch ist sie nicht erreicht! Die Gelegenheit zur Zeichnung von Lebensversicherungen, die den minderwertigen Leben jetzt gegeben ist, bedeutet nicht, dass man mit einer ähnlichen Sicherheit wie derjenigen, mit welcher die Technik die normalen Leben behandeln kann, die Prämien für die

minderwertigen Leben festsetzen und verwalten kann. Und solange dies nicht der Fall ist, ist das Problem nicht vollständig gelöst. Die Übereinkunft der Gesellschaften, das Risiko der Übernahme von Versicherungen auf minderwertige Leben gemeinschaftlich zu laufen, ist keine rationelle Lösung des jahrhundertalten Problems. Der gordische Knoten ist nicht gelöst, sondern durchgehauen, und das hätte insofern schon vor mehreren Jahrzehnten geschehen können, wenn sich die Gesellschaften damals hätten ökonomisch stark genug gefühlt um Bank zu sein in dem Hazartspiel, als das die jetzt stattfindende Versicherung minderwertiger Leben bis zu einem gewissen Grade ja angesehen werden muss.

Ist nun aber die praktische Lösung nicht eine in technischer Hinsicht befriedigende, oder ein Resultat theoretischer Fortschritte, so hat sie jedenfalls das Problem in eine neue Phase gerückt, in welcher die für die endgültige und theoretisch richtige Lösung notwendigen Erfahrungen gewonnen werden können. Das Problem ist aus den Wolken heruntergeholt und liegt in einer Form vor, in welcher es zu seiner eigenen Lösung mitwirkt. Wie lange es in seinem jetzigen Zustande bleiben soll, beruht einigermassen auf der künftigen Arbeit der Versicherungsärzte und Versicherungstechniker an dem Problem. Meiner Ansicht nach wird die ganz befriedigende Lösung des Problems am schnellsten erreicht werden, wenn man die praktische Lösung in die Rahmen bringen kann, innerhalb welcher die endgültige Lösung liegen muss. Dadurch wird man im Stande sein, mit verhältnismässig geringer Erfahrung die hypothetische Grundlage, auf welcher die praktische Lösung bis auf Weiteres arbeiten muss, zu prüfen und zu corrigieren. Wenn man diesen Betrachtungen beipflichtet, meldet sich gleich die Frage, inwieweit man die Hauptprinzipien für eine in theoretischer Hinsicht befriedigende Lösung angeben kann, sowie inwieweit man schon jetzt im Stande ist, eine praktisch brauchbare Grundlage, die in Übereinstimmung mit diesen Prinzipien ist, zuwege zu bringen. Ich werde in dem Folgenden versuchen eine Antwort auf diese Hauptfrage zu geben, muss mich jedoch, als Glied meiner Beantwortung

derselben, mit einigen anderen Fragen beschäftigen, die meiner Ansicht nach zur richtigen Erfassung des ganzen Problems notwendig sind.

Was versteht man unter einem minderwertigen Leben?

Es ist natürlich, die Behandlung des Problems mit einer Definition der minderwertigen Leben zu beginnen. Aber schon hier melden sich die Schwierigkeiten. Eine theoretische Definition der minderwertigen Leben kann man jedoch geben, wenn man den Begriff: »eine theoretische Sterblichkeitstafel für ein minderwertiges Leben vom Alter x» einführt. Unter einer solchen Sterblichkeitstafel will ich die Tafel verstanden wissen, die man aufstellen könnte, wenn man die in statistischer Hinsicht notwendigen Erfahrungen hätte über die Sterblichkeitsverhältnisse unter Personen, die in jeder Hinsicht gleichartig sind mit dem betreffenden minderwertigen Leben. Die theoretische Sterblichkeitstafel würde infolgedessen in Form einer Dekrementtafel erscheinen, wenn man angeben könnte, wie z. B. 100 000 Personen im Alter x und gleichartig mit dem betreffenden minderwertigen Leben sich von Jahr zu Jahr infolge Tod vermindern würden.

Es ist unzweifelhaft richtig, ein Leben im Verhältnis zu der normalen Sterblichkeitstafel als minderwertig zu bezeichnen, wenn die theoretische Sterblichkeitstafel desselben — für alle Alter höher als x — Ausdruck für eine grössere Sterblichkeit ist, als die der Normaltafel. Aber diese Behauptung ist keine erschöpfende Definition. Die Person würde nämlich auch ein minderwertiges Leben sein, selbst wenn die Sterblichkeit nach ihrer theoretischen Tafel nur in einer Reihe von Jahren grösser wäre, sonst aber gleich der Sterblichkeit der Normaltafel. Ja, man wäre überdies berechtigt, die Bezeichnung minderwertiges Leben auf sie anzuwenden, selbst wenn ihre Tafel — durch eine Reihe von Jahren — eine niedrigere Sterblichkeit zeigte als die normale, wenn sie nur in einer anderen Reihe von Jahren einen verhältnismässig kräftigeren Ausschlag nach der anderen

Seite gäbe. Es ist deshalb nötig, für die Minderwertigkeit ein Kriterium zu finden, welches das Gepräge der Sterblichkeit in allen Altern höher als x trägt. Ein solches hat man in der lebenslänglichen Leibrente a_x. Die theoretische Definition eines minderwertigen Lebens würde deshalb wie folgt lauten:

Eine Person ist ein minderwertiges Leben, falls die auf ihrer theoretischen Tafel berechnete lebenslängliche Leibrente geringer ist, als die auf der normalen Tafel und zu demselben Zinsfuss berechnete lebenslängliche Leibrente.

Der Verlauf der theoretischen Sterblichkeitstafel für ein minderwertiges Leben kann derart sein, dass es verantwortlich ist, das minderwertige zu normaler Prämie anzunehmen, wenn es sich um eine andere Versicherung handelt als die lebenslängliche Lebensversicherung. In statisticher Hinsicht muss aber eine solche Person, selbst wenn ihre Versicherung zu normaler Prämie zu Stande gebracht ist, den minderwertigen Leben zugerechnet werden, und es ist — selbst wenn sie den Ablauf der Versicherungsdauer erlebt — von Interesse, ihr zu folgen, so lange sie lebt, denn dadurch wird das statistische Material betreffend minderwertige Leben vermehrt und verbessert.

Es ist ganz bequem, eine Definition der minderwertigen Leben zu haben; sie illustriert bis zu einem gewissen Grade das Problem und erleichtert den Überblick, indem man sich jedes einzelne minderwertige Leben auf die Sterblichkeitstafel, zu welcher es gehört, überführt oder von derselben erstattet denkt. Ausserdem hebt sie ganz klar hervor, dass es die auf die normalen Leben angewendete Sterblichkeitstafel ist, die massgebend dafür ist, ob ein Leben als minderwertig bezeichnet werden soll oder nicht. Dies hat besonders Interesse, wenn in einem Lande mehr als eine Sterblichkeitstafel bei der Versicherung normaler Leben angewandt wird. In Dänemark verwendet man mehrere und dieselben sind untereinander recht verschieden. Beispielsweise will ich einige Sterbewahrscheinlichkeiten von dreien der benutzten Tafeln, die ich mit A, B und C bezeichne, anführen.

Alter	Sterbewahrscheinlichkeit nach		
	Tafel *A*	Tafel *B*	Tafel *C*
25	0.00647	0.00622	0.0550
35	910	776	644
45	1243	1123	1007
55	2240	1940	1919
65	4757	3925	4088

Es ist einleuchtend, dass verschiedene der Leben, die im Verhältnis zu Tafel *A* normale sind, minderwertig sind im Verhältnis zu den Tafeln *B* und *C*.

Leider lässt sich die theoretische Definition der minderwertigen Leben in der Praxis nicht anwenden. Die mannigfachen theoretischen Sterblichkeitstafeln, zu welchen die minderwertigen Leben hinzuführen wären, wenn die theoretische Definition sollte benutzt werden können, kennt man nicht und wird man nie kennen lernen. In der praktischen Lebensversicherung muss man es deshalb jetzt und künftig auf eine Schätzung ankommen lassen, ob ein Versicherungskandidat zu den normalen oder minderwertigen Leben gerechnet werden soll. Die Folge hiervon ist, dass es eine scharfe Grenze zwischen den beiden Kategorien nicht gegeben hat oder gibt.

Teils hat die Einschätzung, Beurteilung, im Laufe der Zeit verschiedene Veränderungen erfahren. Verschiedene Personen, die früher als minderwertige Leben angesehen wurden, würden nach den jetzt geltenden Annahmeregeln zu den normalen Leben gerechnet werden; andere, die jetzt zu den minderwertigen Leben zählen, würden früher zu normaler Prämie angenommen worden sein.

Und teils ist die Bestimmung darüber, ob eine Person ein normales oder minderwertiges Leben ist, oft abhängig von der Art und Dauer der begehrten Versicherung. Ist diese eine kurzfristige, wird sie vielleicht pure angenommen, ist sie lebenslänglich, wird sie abgewiesen oder nur zu erhöhter Prämie angenommen.

Gegen das erstgenannte Verhältnis, Veränderung der

Beurteilungsregeln, ist kaum etwas einzuwenden. Ist man wirklich — z. B. durch Fortschritte in der Arztwissenschaft — darüber zur Klarheit gekommen, dass die Grenze zwischen normalen und minderwertigen Leben nicht an die richtige Stelle gesetzt ist, ist es berechtigt, dieselbe zu verrücken; aber es würde allerdings auch richtig sein, auch mit Rücksicht auf die Sterblichkeitsverhältnisse der normalen Leben, diese Grenzrisiken immer zum Gegenstande einer speziellen statistischen Untersuchung zu machen.

Dagegen ist das letztgenannte Verhältnis, der Einfluss der begehrten oder bewilligten Versicherung darauf, ob die betreffende Person zu den normalen oder minderwertigen Leben gerechnet werden soll, höchst ungünstig und sollte geändert werden. Ich habe früher — in einer Abhandlung zum Aktuarkongress in Wien — vorgeschlagen, *dass jede Person, die — nach den geltenden Annahmeregeln — zu einer lebenslänglichen Lebensversicherung nicht angenommen werden kann, in statistischer Hinsicht zu den minderwertigen Leben gerechnet werden sollte, selbst wenn sie eine andere Versicherung beantragt und pure angenommen ist*, und ich bin noch immer der Ansicht, dass dies Verfahren das richtige ist. Nur dadurch bekommt das Problem der minderwertigen Leben seine rechte Ausdehnung, und nur dadurch wird eine formelle Übereinstimmung zwischen der theoretischen und praktischen Definition erreicht. Ich will hinzufügen, dass es, um die richtige Grenze zwischen den normalen und den minderwertigen Leben festsetzten zu können, natürlich vorzuziehen wäre, falls *alle* Beurteilungen von denselben Personen, von einem für die Gesellschaften gemeinschaftlichen Ausschuss, vorgenommen würden; eine solche Veranstaltung aber lässt sich wohl kaum durchführen. Eine solche Veranstaltung würde indessen unnötig sein, falls auf besonders dazu eingerichteten Karten (Arztkarten) ein so vollständiger Auszug aus dem Inhalte des Gesundheitsattestes wiedergegeben würde, dass man, ehe die statistische Untersuchung ihren Anfang nähme, eine neue und dem Augenblick entsprechende Beurteilung der Gesundheitsverhältnisse der Personen, die Versicherung begehrt haben, vornehmen könnte. In Wirklichkeit ist dieses Verfahren vorzuziehen, denn dadurch könnte

der Unsicherheit im Hinblick auf die Feststellung der Grenzlinie abgeholfen werden, die von dem vorgenannten Verhältnisse herrühren möchte.

Ursachen der Minderwertigkeit.

Wenn man zu den minderwertigen Leben nur die Personen rechnet, deren Gesundheitszustand nicht zufriedenstellend ist, dagegen aber nicht die Personen, die einem erhöhten Sterberisiko ausgesetzt sind infolge von Ausübung gefährlichen Gewerbes, Aufenthalt in gesundheitsschädlichen Ländern o. dgl., ist die Ursache zur Minderwertigkeit in der Regel die, dass der Versicherungskandidat an irgend einer Krankheit leidet oder gelitten hat; doch trifft es sich zuweilen, dass der Versicherungskandidat an mehreren Krankheiten leidet, aber gewönlich wird man bei solchen Fällen eine einzelne der Krankheiten als die vorherrschende ansehen können, als diejenige, auf welche am meisten Gewicht gelegt werden muss.

Es ist im Voraus Grund zu der Annahme, dass die minderwertigen Leben sich mit einer gewissen Regelmässigkeit auf die verschiedenen Ursachen der Minderwertigkeit verteilen werden; aber die Verteilung wird natürlich davon abhängen, wo die Grenze zwischen den normalen und den minderwertigen Leben gezogen wird. Wird die Grenze in der Weise festgesetzt, wie ich es als richtig ansehe, werden die leichteren Formen der Minderwertigkeit viel stärker repräsentiert sein, als wenn zu den minderwertigen Leben nur solche Personen gerechnet werden, die nur zu erhöhter Prämie angenommen werden können. Und rechnet man zu den minderwertigen Leben nur die Personen, die — vor Beginn der jetzt stattfindenden Versicherung minderwertiger Leben — nicht angenommen werden konnten, wird die Verteilung wieder eine andere.

Als Beispiele dafür, wie sich die minderwertigen Leben nach Ursachen der Minderwertigkeit verteilen, will ich drei Erfahrungsreihen anführen, wovon jede 1 000 Personen umfasst. Ich bezeichne die drei Reichen mit *a*, *b* und *c*.

Die *a-Reihe* zeigt die Verteilung von 1 000 Personen, die nach den bei der »*Nordisk Livforsikring*» s. Zt. geltenden Annahmeregeln nicht zu lebenslänglicher Lebensversicherung angenommen werden konnten, aber mehrere, ca. 60, wurden pure angenommen zur Lebensversicherung mit Ausbezahlung.

Die *b-Reihe* betrifft Personen, die von der »*Nordisk*» abgelehnt sind, oder bei welchen die »*Nordisk*» erhöhte Prämie verlangt hat; es befinden sich hierunter keine Personen, die zu normaler Prämie angenommen wurden.

Die *c-Reihe* gibt Aufschluss über die Verteilung der 1 000 ersten Personen, deren Anträge von dem dänischen Beurteilungsausschuss behandelt sind. Es muss hier bemerkt werden, dass es den dänischen Gesellschaften frei steht, ob sie eine Versicherung für eigene Rechnung zu einer von ihnen selbst festgesetzten erhöhten Prämie annehmen, oder ob sie dieselbe dem Ausschuss einsenden wollen, und nur in dem letztgenannten Falle wird die Versicherung, falls sie in Ordnung geht, durch »*Dana*» rückgedeckt. Infolge dieser Bestimmung, durch welche die Gesellschaften freigestellt sind, ergibt sich ein gewisser Unterschied in der Behandlung der Anträge, die nicht pure zur Annahme gelangen. Einige Gesellschaften senden dem Ausschuss nämlich nur die Anträge ein, die sie absolut nicht annehmen wollen, also die schlimmsten Formen minderwertiger Leben, während sie für die leichteren Formen selbst Prämienerhöhungen festsetzen; andere Gesellschaften senden dem Ausschuss alle Anträge ein, die sie nicht zu normaler Prämie annehmen wollen. Die dem Ausschuss eingesandten Anträge bieten deshalb eine recht willkürliche Mischung der verschiedenen Formen minderwertiger Leben dar.

Obwohl es mir fern liegt, an dieser Stelle Kritik zu üben an einer Ordnung, die, was Dänemark betrifft, einen sehr wertvollen Fortschritt bedeutet im Hinblick auf die Versicherung minderwertiger Leben, möchte ich doch aussprechen, dass ich persönlich sehr viel Wert darauf legen würde, falls die Gesellschaften dem Ausschuss alle Anträge einsenden wollten, die sie nicht pure anzunehmen wünschen, oder noch besser, alle Anträge von Personen, die zu einer lebenslänglichen Lebensversicherung nicht pure angenommen werden können; die Beurteilung des Ausschusses brauchte

ja nicht mit sich zu führen, dass die betreffende Versicherung rückversichert werden sollte; es könnte ja in jedem einzelnen Falle den Gesellschaften überlassen bleiben, wie sie sich der Rückversicherungsfrage gegenüber zu stellen wünschen.

Die drei vorgenannten Reihen sehen wie folgt aus:

	a	*b*	*c*
Tuberkulose	262	311	279
Herzkrankheit	121	140	204
Albuminuri	108	146	129
Emphysem, Bronchitis	16	42	26
Zuckerkrankheit	29	34	71
Nierenkolik	14	10	13
Früherer Anfall von Blinddarmsentzündung	12	19	18
Früherer Anfall von Gichtfieber	35	35	59
Chronischer Alkoholisme	70	40	34
Syphilis	59	21	26
Geistes- und Nervenkrankheiten	39	30	44
Diverse Krankheiten	235	172	97

Obwohl, wie früher hervorgehoben, ein bedeutender Unterschied in dem Materiale vorhanden ist, das zur Aufstellung der Reihen benutzt wurde, ist die Verteilung der Minderwertigkeit doch in den Hauptzügen dieselbe. Auf die drei erstgenannten Ursachen fallen in den beiden letzten Reihen ca. 60 % und in der ersten ca. 50 % aller minderwertigen Leben. Der Grund dazu, dass der Prozentsatz in der ersten Reihe niedriger ist, muss in dem Materiale gesucht werden — in den verhältnismässig leichteren Formen der Minderwertigkeit; die hohen Zahlen für Alkoholisme, Syphilis und diverse Krankheiten rühren gerade daher, dass verschiedene dieser Personen zu einer lebenslänglichen Lebensversicherung nicht angenommen wären, aber sie sind zu einer Versicherung mit kurzer Dauer pure angenommen. Im Übrigen will ich darauf aufmerksam machen, dass bei überaus vielen der Personen, die unter der Gruppe »Diverse Krankheiten» aufgeführt sind, die Minderwertigkeit von Ohrenkrankheiten, Korpulenz und Magenkrankheiten (Magengeschwür, chronischer Magenkatarrh) herrührt.

Wie müssen die Rahmen für eine befriedigende Lösung sein?

Aus der mitgeteilten Übersicht über die Art und Verteilung des Materiales, das in der Praxis die minderwertigen Leben ausmacht, geht mit aller wünschenswerten Deutlichkeit hervor, wie kompliziert das Problem minderwertiger Leben ist im Vergleich mit dem Problem der Versicherung normaler Leben. Während die normalen Leben desselben Alters in versicherungstechnischer Hinsicht ja als ganz gleichartig *angesehen* werden, sodass sie alle die gleiche Prämie, Durchschnittsprämie, bezahlen, bieten die minderwertigen Leben desselben Alters ein höchst verschiedenes Risiko, das nicht nur von der Art der Krankheit, die den Betreffenden zu einem minderwertigen Leben macht, abhängig ist, sondern auch von dem Grade derselben. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein minderwertiges Leben im Alter von x im Laufe eines Jahres stirbt, variirt von dem normalen q bis l, und es ist überdies unwahrscheinlich, dass man blos zwei minderwertige Leben findet, die genau dieselbe theoretische Sterblichkeitstafel haben. Das Problem der Versicherung minderwertiger Leben würde deshalb ganz unlösbar sein, falls man von einer befriedigenden Lösung verlangte, dass auf jedes einzelne Leben eine Sterblichkeitstafel angewandt werden sollte, die genau mit der theoretischen Sterblichkeitstafel des betreffenden Lebens übereinstimmte. Ja, die Lösung wäre sogar praktisch undurchführbar, selbst wenn alle *minderwertigen Leben mit derselben Ursache* dieselbe theoretische Sterblichkeitstafel hätten, denn verschiedene Krankheiten treten so selten als Ablehnungsursache auf, dass es nicht möglich wäre, in einer absehbaren Zukunft ein so umfangreiches Erfahrungsmaterial zu sammeln, dass die entsprechenden Sterblichkeitstafeln aufgestellt werden könnten.

Glücklicherweise braucht man aber von einer befriedigenden Lösung nicht zu fordern, dass die angewandten Sterblichkeitstafeln bei den Leben, die darauf bezogen werden, mit den theoretischen Sterblichkeitstafeln übereinstimmen. Eine solche Forderung wird nicht einmal von den Sterblich-

keitstafeln, die bei der Versicherung normaler Leben angewandt werden, erfüllt. Man machte sich ja einer Übertreibung schuldig, wenn man im Ernst behaupten wollte, dass die normalen Leben dasselbe Risiko darbieten. Die Sterblichkeitsverhältnisse innerhalb der normalen Leben sind in Wirklichkeit höchst verschieden. Und die angewandten Sterblichkeitstafeln und in erster Linie die Aggregattafeln sind ein sehr schlechter Ausdruck für diese Sterblichkeit. In Wirklichkeit sind sie nur aufzufassen als Ausdruck der maximalen Sterblichkeit, die von den Leben erwartet wird, die nach denselben versichert sind, haben aber nichtsdestoweniger die Grundlage gebildet für die in den letzten Jahrzehnten stattgefundene gewaltige Entwicklung des Lebensversicherungswesens; es ist ja überdies so, dass selbst eine bedeutende Änderung der Sterblichkeit nur eine verhältnismässig geringe Änderung der Prämie mit sich führt.

Meiner Auffassung nach würde das Problem der Versicherung minderwertiger Leben auf zufriedenstellende Weise gelöst sein, wenn man bloss eine gewisse Anzahl von Sterblichkeitstafeln, die sich zu der Sterblichkeit der minderwertigen Leben auf ähnliche Weise verhielten wie sich die Aggregattafeln zur Sterblichkeit unter den normalen Leben verhalten, auf die minderwertigen Leben anwenden könnte.

Wie viele Sterblichkeitstafeln man zu der Zeit benutzen wird, darüber getraue ich mir nichts zu sagen; das wird von den Erfahrungen, die man erntet, abhängen. Praktische Rücksichten werden dagegen sprechen, dass die Anzahl eine allzu grosse wird, aber andererseits dürfte der grosse Unterschied des Risikos, selbst zwischen Personen, die minderwertig aus derselben Ursache sind, es unzweifelhaft verlangen, dass verschiedene Tafeln angewendet werden. Es ist möglich, dass man bei einer so grossen Gruppe der minderwertigen Leben, wie der Herzgruppe, zwei Sterblichkeitstafeln einrichten wird, sodass Personen, die an einem leichteren, kürzlich entstandenen Herzfehler leiden zu der einen, während Personen, die an einem schwereren Herzfehler, der in einer Reihe von Jahren bestanden hat, leiden und deren habituelle Verhältnisse ungünstige sind, zu der anderen gerechnet werden. Aber es kann auch sein, dass die Erfahrung dazu führt, dass man sich mit einer einzelnen Tafel begnügt,

nach welcher ca. die Hälfte der Personen mit Herzfehler auf gewöhnliche Weise versichert werden können, während die andere Hälfte, die schweren Fälle, wohl auf die Tafel bezogen, aber nicht zur Normalprämie der Tafel versichert werden, sondern nur gegen eine in jedem einzelnen Falle berechnete Zulage, z. B. durch Alterserhöhung bestimmt. Es ist möglich, dass man für die Tuberkulosegruppe zwei oder drei Sterblichkeitstafeln einrichten wird, die auf die Mehrzahl der infolge von Tuberkulose minderwertigen Leben angewandt werden; aber es kann auch sein, dass man gerade bei der Tuberkulosegruppe mit einer Art Selekttafeln arbeiten wird, sodass eine gemeinschaftliche Schlusstafel, z. B. vom 10. Versicherungsjahre ab aufwärts, angewandt wird, während für die ersten 10 Jahre Systeme von Tafeln angewandt werden, die vielleicht sehr gut gemeinschaftlich für gewisse Altersklassen sein können z. B. für 15—20, 20—25, 25—30 u. s. w., welche aber von dem Stadium abhängig sein müssen, in welchem sich der Versicherungskandidat befindet.

Ich will ausdrücklich hervorheben, dass man meiner Ansicht nach nie dazu kommen wird Sterblichkeitstafeln aufzustellen, welche auf die schwersten Formen der minderwertigen Leben angewandt werden können. Das Risiko bei den schwersten Formen ist, von welcher Art die Krankheit auch sein möge, so bedeutend und untereinander so verschieden, dass die Versicherungsbedingungen in jedem einzelnen Falle festgesetzt werden müssen; aber ich meine allerdings, dass die Anzahl solcher Risiken verhältnismässig gering sein wird, wenn eine passende Anzahl Sterblichkeitstafeln aufgestellt ist.

Für die Gruppen minderwertiger Leben, die nur aus einer verhältnismässig geringen Anzahl Personen bestehen, wird man wahrscheinlich niemals besondere Sterblichkeitstafeln aufstellen können, jedenfalls wird es sehr lange dauern, bis das hierzu nötige Erfahrungsmaterial herbeigeschafft ist. Aber in Wirklichkeit sind solche Sterblichkeitstafeln auch nicht absolut notwendig. Sind erst für die grösseren Gruppen brauchbare Sterblichkeitstafeln aufgestellt, wird der Verlauf dieser Sterblichkeitstafeln unzweifelhaft so verschieden werden, dass sie auf alle Personen der kleineren Gruppen angewandt werden können. Beispielsweise will ich an-

führen, dass auf Personen, die an Emphysem oder Bronchitis leiden, vermeintlich die für Herzkrankheiten geltende Tafel oder Tafeln, auf zuckerkranke Personen die Albuminuritafeln angewandt werden u. s. f. Und sollte es sich nach und nach zeigen, das bei solchen Anwendungen wesentliche Fehler begangen worden sind, könnten andere Verfahren benutzt werden. Ich meine nämlich nicht, dass eine vollkommen befriedigende Lösung eine solche sein soll, die nicht verändert oder verbessert werden kann. Von einer zu einem gewissen Zeitpunkt befriedigenden Lösung wird verlangt, dass sie zu dem betreffenden Zeitpunkte die Mittel liefert, die Prämien festzusetzen und auf eine technisch richtige Weise zu verwalten, aber es ist ganz selbstverständlich, dass eine solche Lösung recht bedeutende Veränderungen erfahren kann, u. a. infolge von Fortschritten der Arztwissenschaft, welche sicher im Laufe der Zeit viele neue Mittel hervorbringen wird zur Erkennung, Klassifizierung und Bekämpfung verschiedener Krankheiten, die zur Zeit den Ärzten grosse Schwierigkeiten bereiten.

Ich weiss sehr gut, dass man sich nicht damit abgeben soll Prophet zu spielen, denn gewöhnlich hat man kein Glück damit. Aber nichtsdestoweniger bedenke ich mich nicht zu behaupten, dass die nächstliegende befriedigende Lösung des Problemes der minderwertigen Leben unzweifelhaft in der Anwendung einer gewissen Anzahl von Sterblichkeitstafeln bestehen wird, die auf Grund der Erfahrungen aus den umfangreichsten Gruppen der minderwertigen Leben aufgestellt sind, und welche die leichtesten und mittelschweren Formen — auch der kleineren Gruppen — umfassen; auf die schwersten Formen minderwertiger Leben werden diese Tafeln auch angewandt, aber die Bedingungen müssen in jedem einzelnen Falle festgesetzt werden.

Soll man schon jetzt versuchen, besondere Tafeln für die minderwertigen Leben aufzustellen?

Selbst wenn man die Auffassung hat, dass zu einer befriedigenden Lösung des umsprochenen Problems verschiedene Sterblichkeitstafeln erforderlich sind, die nur nicht aufge-

stellt werden können, bevor das nötige Erfahrungsmaterial gewonnen ist, könnte man ja doch meinen, dass die Versicherung minderwertiger Leben bis auf Weiteres am leichtesten und bequemsten durchgeführt werden könnte, indem man auf sie die Sterblichkeitstafel für normale Leben anwendet und die Prämie z. B. durch eine prozentuale Erhöhung der normalen Prämie festsetzt. In Dänemark hat man ja dieses Verfahren benutzt, welches faktisch etwas bestechendes und ansprechendes hat. Man kann ja nämlich, — welche Mittel man auch anwenden will — eine richtige Festsetzung der Prämie für ein minderwertiges Leben nicht vornehmen. Deshalb kann man sie — wird man behaupten können — ebensogut im Verhältnis zu der normalen Prämie festsetzen wie mit Anwendung besonderer Sterblichkeitstafeln, die doch nicht darauf Anspruch machen können richtig zu sein. Man hat bei diesem Verfahren überdies den Vorteil, dass alle besonderen Umstände, welche die einzelne Person charakterisieren, in Betracht gezogen und zur Milderung oder Verschärfung der Beurteilung benutzt werden können.

Aber es ist nicht schwer einzusehen, dass eine vorläufige Ordnung dieser Art in technischer Hinsicht sehr unbefriedigend ist. Selbst wenn man nämlich durch eine solche schätzungsweise Beurteilung wirklich im Stande wäre die richtige Prämie festzusetzen — und ich meinerseits anerkenne vollauf den Wert einer allgemeinen Schätzung, die alle vorliegenden Verhältnisse in Betracht zieht —, so ist das Problem der Versicherung minderwertiger Leben damit nicht gelöst. Es genügt nicht, dass die Prämie für ein minderwertiges Leben die richtige Höhe erhalten hat; es gilt auch, dieselbe richtig oder doch in konsequenter Weise zu administrieren. Und das kann nicht dadurch erreicht werden, dass die Versicherung auf die normale Sterblichkeitstafel bezogen wird, so dass die Prämien für die minderwertigen Leben die Normalprämie zuzüglich einer Zulage darstellen.

Die Prämienreserve kann nämlich nicht in konsequenter Weise bestimmt werden. Soll sie der normalen Prämienreserve gleichgestellt werden? Dadurch wird sie unzweifelhaft zu klein für die minderwertigen Leben, die nur verhältnismässig wenige Sterbefälle in den jüngeren Altern ergeben (Herzkrankheiten) und zu gross für die mindervertigen Leben,

die, wie die tuberkulösen, viele Sterbefälle in den niedrigeren Altern ergeben. Indem man die ganze Prämienerhöhung als Zuschlag zur Risikoprämie des Jahres benutzt, lässt man die Gesellschaft Deckung für eine bestimmte Sterblichkeit erhalten, deren Verlauf vielleicht überhaupt nicht mit der Sterblichkeit der minderwertigen Leben übereinstimmt. Meiner Abhandlung: Über die Oekonomie einer Lebensversicherungsgesellschaft» entnehme ich einige Zahlen, die zeigen, für welche Sterblichkeit man gedeckt ist bei einer Premienzulage von $^1/_2$ % der Versicherungssumme. Die Versicherung, von welcher die Rede ist, ist eine Lebensversicherung mit Ausbezahlung nach 30 Jahren, der Versicherte war bei der Zeichnung 30 Jahre alt.

Versicherungsjahr über	Normal q	Erhöhte q
1	0.00583	0.01111
6	665	1257
12	858	1575
21	1458	2669
28	2388	6967
29	2573	11461

Man muss deshalb bei Berechnung der Prämienreserve die Prämienerhöhung in Betracht ziehen, aber wie?

Der Rückkaufswert lässt sich auch nicht in konsequenter Weise feststellen. Dies ist u. a. eine Folge davon, dass die Prämienreserve nicht festgesetzt werden kann; aber ausserdem fehlen einem die Mittel zur Kapitalisierung desjenigen Teiles des Verwaltungszuschlages, der von der Prämienreserve abgezogen werden soll. Und die Konsequenz davon wird unzweifelhaft die sein, dass der Rückkaufswert für die Leben, die auf Grund von Tuberkulose oder anderer Krankheiten, die besonders gefährlich in den jüngeren Altern sind, zu gross wird.

Die Umschreibung einer Versicherung in eine andere lässt sich auch nicht ohne neue Willkürlichkeit durchführen, denn es fehlen die Mittel zur Bestimmung der für die richtige Umschreibung nötigen Kapitalwerte. Ja selbst eine so ein-

fache und unvermeidliche Änderung einer Versicherung wie eine

Prämienänderung verursacht unüberwindliche Schwierigkeiten, weil man die neue Prämie nicht so festsetzen kann, dass ihr Kapitalwert gleich dem Kapitalwert der ursprünglichen Prämie wird.

Im Hinblick auf diese Einwendungen, deren Berechtigung wohl niemand in Zweifel ziehen wird, betrachte ich es als ungünstig, dass die jetzt stattfindende Versicherung minderwertiger Leben unter Anwendung einer Sterblichkeitstafel geschieht, die bei der Versicherung normaler Leben benutzt wird. Die Annehmlichkeit, die darin liegen mag, eine Prämie festsetzen zu können ohne an irgend welche Rücksichten gebunden zu sein, bereitet dem Aktuar eine Reihe von Unannehmlichkeiten technischer Art und wird eine Quelle der Inkonsequenz und Willkürlichkeit höchst unangenehmer Art. Im Übrigen wird, wie bereits hervorgehoben, die Anwendung besonderer für sie konstruierte Tafeln auf die minderwertigen Leben dazu führen, dass die gewonnenen Erfahrungen schnellstens zur Untersuchung darüber benutzt werden können, inwiefern die benutzte Tafel ihrem Zwecke entsprochen hat.

Nun will vielleicht der eine oder andere fragen, wie es kommt, dass man i Dänemark ein Verfahren anwendet, dass von dänischer Seite so stark kritisiert wird. Ich will auf eine solche Frage antworten, dass die in Dänemark mit Rücksicht auf die minderwertigen Leben benutzte Ordnung einen ganz vorläufigen Charakter hat, und dass sie vermeintlich im Laufe von ganz kurzer Zeit durch eine andere ersetzt wird, die hoffentlich bestehen bleiben wird, bis sie durch Anwendung der gewonnenen Erfahrungen verbessert werden kann. Da die Verabredungen betreffend die Versicherung minderwertiger Leben seiner Zeit zwischen den Gesellschaften getroffen wurden, wollte man die Durchführung der Sache nicht dadurch erschweren, dass sie mit Hilfe eines bestimmten Systems durchgeführt werden sollte. Man beschränkte sich darauf eine Verabredung darüber zu treffen, auf welche Weise das Risiko zwischen den Gesellschaften verteilt werden sollte und zu bestimmen, dass bis auf Weiteres die Prämien für die minderwertigen Leben durch eine schätzungsweise Erhöhung der Prämien für die normalen festgesetzt werden

sollten. Verschiedene, darunter ich, waren sich ganz klar über das in technischer Hinsicht ungünstige dieser Ordnung, aber wir meinten, dass es im Laufe verhältnismässig kurzer Zeit, wenn die Versicherung der minderwertigen Leben nach aussen hin in ein festes Geleise gebracht wäre, möglich sein würde, dieselbe nach innen, und unter geziemender Rücksichtnahme auf die Art und den Umfang der neuen Wirksamkeit, zu reformieren. Und diese Vermutung ist jetzt dabei in Erfüllung zu gehen. Schon nach halbjähriger Tätigkeit im Beurteilungsausschuss war ich meinerseits überzeugt, dass es möglich sein werde, hypothetische Sterblichkeitstafeln einzurichoten, die mit sehr grosser Annäherung die Prämien für die Mehrzahl der Versicherungen liefern könnten, die zur Beurteilung vorgelegt wurden, und die als eine brauchbare vorläufige Grundlage dienen konnten. In einem Vortrag im dänischen Aktuarverein legte ich meine Ansicht von der Sache klar und führte gleichzeitig als Beispiele einige Prämien an, gefunden durch Anwendung dreier typischer Sterblichkeitstafeln. Das Resultat war, dass ein Ausschuss zur weiteren Bearbeitung der Frage gewählt wurde, und dieser Ausschuss, dessen Arbeit etwas verzögert wurde, u. a. infolge von Veränderungen in der Zusammensetzung des Concerns, wird bald in der Sache Neues von sich hören lassen.

Die Beschaffung hypothetischer Sterblichkeitstafeln.

Wenn man sich klar gemacht hat, dass man schon in dem Entwickelungsstadium, in welchem sich das Problem der minderwertigen Leben befindet, versuchen sollte Sterblichkeitstafeln aufzustellen, welche auf die minderwertigen Leben angewandt werden, und aus welchen sich die endgültigen Sterblichkeitstafeln entwickeln können, meldet sich die Frage, inwiefern man zu dem jetzigen Zeitpunkte solche Tafeln aufstellen kann, sowie die Frage, wie man dies bewerkstelligen soll.

Mit Bezug auf die erste Frage will ich sagen, dass meine Tätigkeit in dem Beurteilungsausschuss meine schon lange gehegte Vermutung bestätigt hat, dass sich innerhalb jeder

der drei Hauptgruppen minderwertiger Leben, Tuberkulose, Albuminuri und Herzkrankheiten, so viele Personen befinden, die im Grossen und Ganzen gleichartig beurteilt werden, dass aller mögliche Grund vorhanden ist, dieselbe für die betreffende Gruppe geltende Sterblichkeitstafel auf sie anzuwenden. Beispielsweise möchte ich anführen, dass bei den beurteilten Fällen von Herzkrankheiten die Beurteilung für weit über die Hälfte der Fälle auf eine Abkürzung der Versicherungsdauer auf ungefähr das 50. Jahr und eine Prämienerhöhung von 10, 15 bis 20 % auf die normale Prämie lautete, also eine solche Gleichartigkeit, dass man sie mit Rücksicht auf die Prämienfestsetzung sehr gut ganz gleichartig hätte behandeln, d. h. die Prämien auf Grund einer besonderen, für Personen, die an einem leichteren oder mittelschweren Herzfehler leiden, aufgestellten Sterblichkeitstafel hätte festsetzen können. Für die Tuberkulose gilt etwas Ähnliches; in der überwiegenden Anzahl der Fälle ist der Prämienzuschlag auf 25—30 %, häufig jedoch in Verbindung mit einer absoluten Karenzzeit von ca. 5 Jahren, festgesetzt, und ein solches Resultat würde auch erreicht werden können, indem man eine Tuberkulosetafel auf diese Personen anwendete. Und selbst für die Albuminurigruppe macht sich eine grosse Gleichartigkeit geltend; bei den beurteilten Fällen haben über 75 % als Resultat eine Abkürzung der Versicherungszeit auf das 50. bis 55. Jahr und eine Prämienerhöhung von ca. 30 % ergeben.

Es ist in dieser Verbindung gar nicht die Höhe des Prämienzuschlages, die interessiert; es ist möglich, dass derselbe ganz falsch ist, niemand weiss wohl mit Sicherheit etwas hierüber; nein, es ist die Gleichartigkeit, auf die ich Gewicht lege. Obwohl es dem Ausschuss vollständig frei steht — unter Rücksichtnahme auf alle Umstände, die auf die Sterblichkeit Einfluss üben — die Prämienerhöhung festzusetzen wie er will, so ist das faktische Resultat Ausdruck einer Gleichartigkeit und Regelmässigkeit, die dafür spricht, dass es schon jetzt Sinn hat, eine Sterblichkeitstafel für die drei genannten Hauptgruppen aufzustellen, indem man durch Anwendung derselben unzweifelhaft bei weit über der Hälfte, »der besseren Hälfte», der Versicherungskandidaten dieser Gruppen, die Prämien auf die gewöhnliche Weise wird fest-

setzen können. Ich wage nicht mit Sicherheit auszusprechen, inwiefern in den kleineren Gruppen eine entsprechende Regelmässigkeit obwaltet; aber vieles deutet in diese Richtung. Aber selbst im entgegengesetzten Falle würde es unzweifelhaft richtig sein, bei den zu diesen Gruppen gehörenden Personen eine der drei Tafeln, die für die vorgenannten Hauptgruppen aufgestellt sind, anzuwenden, indem man bei jeder solchen Anwendung entsprechende Rücksicht auf die Gefährlichkeit der Krankheit nimmt, diese z. B. bestimmt im Hinblick auf die Sterbeursachenstatistik.

Die andere Frage, »Auf welche Weise kann man die Sterblichkeitstafeln aufstellen», ist schwerer zu beantworten. Es gibt nämlich keine *absolut festen* Stützpunkte für eine solche Aufstellung. Das einzige was man sich getraut mit voller Sicherheit zu behaupten ist, dass die Sterblichkeitstafeln der »besseren Hälfte» der drei vorgenannten Gruppen infolge der Art der Krankheiten selbst untereinander verschieden sein müssen. Denkt man sich, man hätte zur Beobachtung drei gleich grosse Gruppen gleichaltriger z. B. 25-jährige Personen, nämlich 10 000 tuberkulöse Personen, 10 000 Personen, die an Nierenkrankheiten leiden, und 10 000 Personen mit Herzfehler, wird die Übersterblichkeit in den drei Gruppen, mit der Sterblichkeit in der entsprechenden Gruppe der normalen Leben verglichen, unzweifelhaft in wesentlichem Grade von der Steigerung der Sterbefälle durch beziehungsweise Tuberkulose, Nierenkrankheiten und Herzkrankheiten herrühren. Und da diese Krankheiten die meisten Opfer fordern im Alter von beziehungsweise 25—35, 40—60 und 50—70 Jahren, werden die bezüglichen Sterblichkeitstafeln unzweifelhaft — im Vergleich mit den Normaltafeln — einen dementsprechenden Verlauf haben.

Die vorliegenden Sterblichkeitstafeln können doch auch einigermassen eine Richtschnur abgeben für die Aufstellung der gesuchten Sterblichkeitstafeln. Besonders wertvoll ist diese Richtschnur jedoch nicht, da die vorliegenden Sterblichkeitstafeln, die in der Hauptsache aus Tafeln bestehen, die von dem skandinavischen Comité aufgestellt sind, ja auf Grund eines sehr ungleichartigen Materiales aufgestellt sind, d. h. ohne Teilung der minderwertigen Leben nach Abweisungsursache und dem Grade der Krankheit. Nichtsdesto-

weniger herrscht sehr gute Übereinstimmung zwischen den schwedischen und dänischen Erfahrungen. Die Sterbewahrscheinlichkeit der beiden Tafeln, der schwedischen und der dänischen, sind von folgender Höhe:

Alters-Klasse	Schwedische Gesellschaften	Dänische Gesellschaften
20—30 Jahre	0.0113	0.0123
30—40 »	0.0144	0.0130
40—50 »	0.0188	0.0196
50—60 »	0.0311	0.0317
60—70 »	0.0540	0.0603

Es würde sehr interessant sein, falls das Material, das zur Aufstellung dieser Sterbewahrscheinlichkeiten benutzt worden ist, einer neuen Bearbeitung zu dem Zwecke, die Sterbewahrscheinlichkeit für Personen, die auf Grund von Tuberkulose, Nierenkrankheit oder Herzkrankheit abgelehnt worden sind festzustellen, unterworfen werden könnte; dadurch würde man unzweifelhaft ein wertvolles Hilfsmittel zur Aufstellung der gewünschten drei Sterblichkeitstafeln erhalten.

Auch die Sterbeursachenstatistik kann als Richtschnur bei der Aufstellung der umsprochenen Tafeln gelten. Man muss sich aber wohl davor in Acht nehmen, dass man ihre Bedeutung überschätzt. In Wirklichkeit kann sie nur zur Angabe der Altersklassen, in welcher die Krankheiten verhältnismässig die meisten Opfer fordern, also der Alterklassen, in welchen die Sterbeursache am gefährlichsten ist, benutzt werden, dagegen aber nicht dazu, um Aufklärung über die Höhe der Sterbewahrscheinlichkeiten für Personen, die an der einen oder anderen Krankheit leiden, zu geben. Ich habe vor einer Reihe von Jahren eine Bearbeitung der officiellen Sterbeursachenstatistik für Dänemarks Provinzialstädte vorgenommen und dabei folgende Verhältniszahlen zwischen der Sterbewahrscheinlichkeit von Personen, die an Lungentuberkulose, Nierenkrankheiten und Herzkrankheiten leiden und der normalen Sterbewahrscheinlichkeit gefunden:

Altersgruppe	25—34	35—44	45—54	55—64	65—74
Lungentuberkulose	3.25	2.95	2.47	2.04	1.39
Nierenkrankheit	0.98	1.14	1.40	1.62	1.15
Herzkrankheit	0,55	0.68	0.96	1.14	1.01

Es ergibt sich somit mit aller wünschenswerten Deutlichkeit, dass Tuberkulose in den jüngeren Altern am gefährlichsten ist, Nierenkrankheiten im Alter von 40—60 und Herzkrankheiten von 50—70 Jahren.

Es liegt vielleicht nahe zu vermuten, dass man Sterblichkeitstafeln für Abgewiesene der drei Krankheiten in der Weise bilden könnte, dass man die gewönliche Sterbewahrscheinlichkeit mit der Sterbewahrscheinlichkeit innerhalb der betreffenden Abweisungsursache erhöht, indem man ja dann meinen könnte reichlich Rücksicht auf die Ursache der Minderwertigkeit genommen zu haben; aber so leicht und geradezu geht es wohl nicht. Das Vorhandensein einer der genannten Krankheiten dürfte wohl schon — so wie ich früher hervorgehoben — die Anzahl der Sterbefälle infolge der betreffenden Krankheiten vermehren, wird aber vermeintlich auch die Sterbefälle infolge verschiedener anderer Krankheiten vermehren; des Weiteren muss natürlich, sobald es sich um freiwillige Versicherung handelt, auf den Grad und die Art der Krankheit Rücksicht genommen werden. Und die Sterbeursachenstatistik kann deshalb höchstens ein Hilfsmittel, nicht aber ein ausschlaggebender Faktor bei der Aufstellung der Sterblichkeitstafeln für minderwertige Leben werden.

Falls die vorhandenen Hilfsmittel zur Aufstellung von Sterblichkeitstafeln nicht genügen, und das tun sie absolut nicht, muss man sich, wenn man es überhaupt als wünschenswert und notwendig ansieht die Tafeln herzustellen, auf andere Weise helfen. Und man kann dann zwei Wege gehen. Man kann entweder grösseres Gewicht als berechtigt auf die Hilfsmittel: die vorliegenden Sterblichkeitstafeln für minderwertige Leben und die Sterbeursachenstatistik, legen, und auf diese Weise kann man vielleicht vollkommen brauchbare Tafeln herbeischaffen. Oder man kann sich, ausgehend von der durch die Hilfsmittel beigebrachten Kenntnis des charakteristischen im Verlaufe der Sterblichkeitstafeln, bestreben es so einzurichten, dass die Tafeln zu den Prämien führen,

welche die schätzungsweise Beurteilung für passend für die leichteren und mittelschweren Fälle innerhalb der betreffenden Gruppe ansieht. Man muss selbstverständlich in beiden Fällen mehr Gewicht auf die Tafeln legen als sie verdienen: sie sind und bleiben von ganz hypothetischer Art und müssen selbstverständlich geändert werden, sobald die gewonnenen Erfahrungen eine Änderung begründen können.

In dem Vortrag, den ich im November 1916 im dänischen Aktuarverein gehalten, und in welchem ich der Aufstellung der drei Tafeln das Wort redete, wählte ich den letztgenannten Weg. Ich wollte nämlich — ganz speciell mit Rücksicht auf die Ärzte — versuchen zu zeigen, dass, wenn man die minderwertigen Leben einer gewissen Ursache, r. B. Herzkrankheit, in zwei Gruppen, die normalen Fälle und die schweren Fälle, teilte, und die Prämien für die normalen Fälle, »der besseren Hälfte», der Individen der drei Hauptgruppen mit Hilfe dreier Tafeln mit dem früher beschriebenen Verlauf bestimmte, man praktisch genommen zu denselben Prämien würde kommen können, zu welchen die schätzungsweise Beurteilung geführt hatte. Und mit Rücksicht auf die Techniker wollte ich hervorheben, wie richtig und konsequent es sein würde solche Tafeln zu benutzen, anstatt die normale Sterblichkeitstafel auf die minderwertigen Leben anzuwenden. Aus verschiedenen Gründen hatte ich nicht Zeit mit den Tafeln so viel als wünschenswert zu experimentieren und sie tragen deshalb auch das Gepräge davon. Nichtsdestoweniger erreichte ich meine Absicht, Interesse für die Frage zu schaffen und dass ein Ausschuss gewählt wurde, der zur Aufgabe erhielt, Tafeln der umsprochenen Art aufzustellen. Obwohl die von mir aufgestellten Tafeln nur als Beispiele zu betrachten waren und sind, möchte ich mir doch gerne erlauben, zwei derselben zu besprechen, weil sie eine gute Illustration zu meinen Bemerkungen geben. Die beiden Tafeln sind die »Tuberkulosetafel» und die »Herztafel»; die »Albuminuritafel» will ich nicht besprechen, da ich mir schon seiner Zeit darüber klar war, dass sie Ausdruck für eine zu niedrige Sterblichkeit war.

Bezeichnet q_x die normale Sterblichkeit, q_x^t die Sterbewahrscheinlichkeit für Tuberkulose, q_x^c die Sterbewahrscheinlichkeit für Personen, die an Herzkrankheit leiden, so setzte ich

$q^t_{15} = 3.00\, q_{15}$ $\qquad$ $q^c_{15} = 1.00\, q_{15}$

$q^t_{16} = 2.97\, q_{16}$ $\qquad$ $q^c_{16} = 1.03\, q_{16}$

$q^t_{17} = 2.94\, q_{17}$ $\qquad$ $q^c_{17} = 1.06\, q_{17}$

u. s. w. $\qquad$ u. s. w.

Die Zahlenwerte sehen folgendermassen aus:

Alter	q	q^t	q^c
25	0.0055	0.0148	0.0075
35	64	154	103
45	101	211	191
55	192	345	422

Als Beispiele von Nettoprämien, nach diesen Tafeln bestimmt, führe ich folgende an (Zinsfuss 3 ½ % p. a.):

	(q)	(q^t)		(q^c)	
	Nettopr.	Nettopr.	Erhöhung	Nettopr.	Erhöhung
21—51	2.26 %	2.89 %	28 %	2.43 %	8 %
31—51	3.82 %	4.38 %	14 %	4.09 %	7 %
21—61	1.63 %	2.32 %	42 %	1.89 %	16 %
31—61	2.42 %	3.08 %	27 %	2.84 %	17 %

Für die Nettoreserve werden folgende Zahlen gefunden:

Versicher. 21—61

Beim Ablauf von	(q)	(q^t)	(q^c)
6 Jahren	7.52 %	6.19 %	8.56 %
12 »	16.97 %	14.83 %	18.73 %
18 »	28.60 %	25.90 %	31.77 %
24 »	42.73 %	39.66 %	44.69 %

Versicher. 31—51

Beim Ablauf von	(q)	(q^t)	(q^c)
3 Jahren	10.55 %	9.76 %	10.58 %
6 »	22.34 %	20.97 %	22.31 %
9 »	35.54 %	33.71 %	35.32 %
12 »	50.33 %	48.30 %	49.90 %

Zum Vergleich will ich einige Zahlen von den Tafeln, die der gewählte Ausschuss vorzuschlagen gedenkt, anführen. Es ist der Aktuar in »*Dana*», cand. DRACHMANN, welcher die

Rechenarbeit bei der Aufstellung der Tafeln ausgeführt hat und von ihm wird s. Zt. eine Beschreibung über die Aufstellung der Tafeln erscheinen.

Die Sterbeintensitäten, μ^t, μ^a und μ^c, für die drei Tafeln sehen folgendermassen aus:

Alter	μ^t	μ^a	μ^c
25 Jahr	0.0125	0.0129	0.0074
35 »	158	186	111
45 »	222	327	212
55 »	378	680	486
65 »	768	1564	1235

Die Nettoprämien und Erhöhungen im Verhältnis zu den nach »*Hafnia*»s Sterblichkeitstafel — dieselbe, die ich für mein Beispiel benutzt habe — festgesetzten Nettoprämien sind von folgender Grösse:

	(μ^t)		(μ^a)		(μ^c)	
	Nettopr.	Erhöhung	Nettopr.	Erhöhung	Nettopr.	Erhöhung
21—51	2.81 %	24 %	2.95 %	30 %	2.50 %	11 %
31—51	4.44 %	16 %	4.71 %	23 %	4.20 %	10 %
21—61	2.27 %	40 %	2.51 %	54 %	1.99 %	22 %
31—61	3.17 %	31 %	3.64 %	50 %	2.99 %	24 %

Für die Nettoreserven werden folgende Zahlen gefunden:

Versicher. 31—51

Beim Ablauf von	(μ^t)	(μ^a)	(μ^c)
3 Jahren	9.92 %	10.28 %	10.63 %
6 »	21.13 %	21.65 %	22.36 %
9 »	33.85 %	34.32 %	35.36 %
12 »	48.40 %	48.59 %	49.88 %

Versicher. 21—61

Beim Ablauf von	(μ^t)	(μ^a)	(μ^c)
6 Jahren	7.77 %	9.12 %	8.94 %
12 »	16.90 %	19.77 %	19.51 %
18 »	27.97 %	31.93 %	31.78 %
24 »	41.47 %	45.59 %	45.80 %

* *
*

Hiermit bin ich eigentlich fertig mit dem, was ich in meiner Einleitung zu sagen wünsche. Als Résumé möchte ich hervorheben, dass es meiner Meinung nach bei dem jetzigen Entwickelungsstadium in jeder Hinsicht zweckdienlich ist, drei Sterblichkeitstafeln, von denen jede ihren charakteristischen Verlauf im Verhältnis zu der normalen Sterblichkeitstafel hat, auf die minderwertigen Leben anzuwenden. Auf welche Weise diese Tafeln zuwege gebracht werden ist von geringerer Bedeutung. Die Hauptsache ist, dass jede Tafel zu Prämien führt, die im Wesentlichen mit den Prämien übereinstimmen, die man nach einer schätzungsweisen Beurteilung, welche die Versicherungskandidaten in zwei Untergruppen nach dem Grade der Krankheiten einteilen muss, als genügend für ca. die Hälfte derjenigen Personen ansieht, die an der, der betreffenden Tafel entsprechenden Krankheit leiden. Auf die übrigen Personen, die an derselben Krankheit leiden, wird die Tafel auch angewandt, aber es werden durch Schätzung verschärfte Bedingungen festgesetzt. Auf Personen, die an anderen Krankheiten als den dreien, für welche Tafeln konstruiert sind, leiden, werden diese auch angewandt, indem durch Schätzung bestimmt wird, welche Tafel zur Anwendung gelangen soll, ob die Prämie die laut der Tafel normale sein soll, oder ob besondere Bedingungen festgesetzt werden sollen. Darnach muss man sich — auch dadurch, dass man sich Aufklärung darüber verschafft, wie es mit den Personen geht, welche die angebotenen Bedingungen nicht annehmen — nach bestem Vermögen bestreben, aus den gewonnenen Erfahrungen Nutzen zu ziehen, sodass sich aus der hypothetischen Grundlage, mit welcher man sich jetzt begnügen muss, so bald wie möglich sicherere und zuverlässigere Tafeln entwickeln können. Ich meinerseits bin überzeugt davon, dass man, indem man dem Wege, den ich empfehle, folgt, das Problem in die Rahmen bringt, welche die befriedigende Lösung umfassen werden.

Zur Theorie der Stabilität statistischer Reihen.

Von

Al. A. Tschuprow.

DRITTE ABHANDLUNG.

Ueber den mittleren Fehler der »wesentlichen Schwankungscomponente».

Erstes Kapitel.

I.

An N, beliebigen Verteilungsgesetzen folgenden, zufälligen Grössen — $x_1, x_2, \ldots x_N$ — werden N_1 von einander unabhängige Versuche vorgenommen, — der erste Versuch an der Variablen x_1, der zweite an x_2 u. s. w. Man setze:

$$E x_i = m_1^{(i)};\ E x_i^2 = m_2^{(i)};\ E x_i^k = m_k^{(i)},$$

$$E[x_i - m_1^{(i)}]^2 = m_2^{(i)} - [m_1^{(i)}]^2 = \mu_2^{(i)};\ E[x_i - m_1^{(i)}]^k = \mu_k^{(i)},$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} m_1^{(i)} = m_{[1,\,N]};\ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} m_2^{(i)} = m_{[2,\,N]};\ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} m_k^{(i)} = m_{[k,\,N]},$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mu_2^{(i)} = \mu_{[2,\,N]};\ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mu_k^{(i)} = \mu_{[k,\,N]}.$$

Man bezeichne ferner mit x'_i den Wert, welchen die Variable x_i bei dem betreffenden Versuche erhält, und setze:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x'_i = x_{(N)},$$

$$E\,x^k_{(N)} = m_{k,(N)},$$

$$E\,[x_{(N)} - m_{1,(N)}]^k = \mu_{k,(N)}.$$

Da $m_{1,(N)} = E\,x_{(N)} - \frac{1}{N} E \sum_{i=1}^{N} x'_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} m_1^{(i)} = m_{[1,N]}$ ist, so lässt sich $\mu_{k,(N)}$ in der Form darstellen:

$$\mu_{k,(N)} = E[x_{(N)} - m_{[1,N]}]^k = m_{k,(N)} +$$
$$+ \sum_{h=1}^{k-2} (-1)^h C_k^h m^h_{[1,N]} m_{k-h,(N)} + (-1)^{k-1}(k-1)\, m^k_{[1,N]}.$$

Anderseits hat man:

$$\mu_{[2,N]} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[m_2^{(i)} - (m_1^{(i)})^2] = m_{[2,N]} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[m_1^{(i)}]^2 =$$
$$= m_{[2,N]} - m^2_{[1,N]} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[m_1^{(i)} - m_{[1,N]}]^2,$$

$$\mu_{[k,N]} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{h=0}^{k}(-1)^h C_k^h [m_1^{(i)}]^h m_{k-h}^{(i)} =$$
$$= m_{[k,N]} + \sum_{h=1}^{k-2}(-1)^h C_k^h \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[m_1^{(i)}]^h m_{k-h}^{(i)} +$$
$$+ (-1)^{k-1}(k-1)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[m_1^{(i)}]^k.$$

Da die Versuche gegenseitig unabhängig sind, so erhält man ferner:

$$m_{2(N)} = E x^2_{(N)} = \frac{1}{N^2}\left\{\Sigma m_2^{(i)} + 2\sum_{i_1=1}^{N-1}\sum_{i_2=i_1+1}^{N} m_1^{(i_1)} m_1^{(i_2)}\right\} =$$

$$= m^2_{[1.N]} + \frac{1}{N}\mu_{[2.N]}.$$

$$m_{3(N)} = E x^3_{(N)} = m^3_{[1.N]} + \frac{3}{N} m_{[1.N]}\mu_{[2.N]} + \frac{1}{N^2}\mu_{[3.N]},$$

$$m_{4(N)} = E x^4_{(N)} = m^4_{[1.N]} + \frac{6}{N} m^2_{[1.N]}\mu_{[2.N]} +$$

$$+ \frac{1}{N^2}\{4 m_{[1.N]}\mu_{[3.N]} + 3\mu^2_{[2.N]}\} + \frac{1}{N^3}\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[\mu_4^{(i)} - 3(\mu_2^{(i)})^2]\right\},$$

$$\mu_{2(N)} = E[x_{(N)} - m_{[1.N]}]^2 = \frac{1}{N}\mu_{[2.N]},$$

$$\mu_{3(N)} = E[x_{(N)} - m_{[1.N]}]^3 = \frac{1}{N^2}\mu_{[3.N]},$$

$$\mu_{4(N)} = E[x_{(N)} - m_{[1.N]}]^4 = \frac{3}{N^2}\mu^2_{[2.N]} + \frac{1}{N^3}\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[\mu_4^{(i)} - 3(\mu_2^{(i)})^2]\right\}.$$

II.

Setzt man

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[x'_i - m_1^{(i)}]^k = \mu'_{[k.N]},$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[x'_i - m_{[1.N]}]^k = \mu''_{[k.N]},$$

so ist

$$E\mu'_{[k.N]} = \mu_{[k.N]},$$

$$E\mu''_{[k.N]} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{h=0}^{k} C_k^h \mu_{k-h}^{(i)}[m_1^{(i)} - m_{[1.N]}]^h =$$

$$= \mu_{[k,N]} + k \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mu_{k-1}^{(i)} [m_1^{(i)} - m_{[1,N]}] + \cdots +$$

$$+ \frac{k(k-1)}{2} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mu_2^{(i)} [m_1^{(i)} - m_{[1,N]}]^{k-2} +$$

$$+ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} [m_1^{(i)} - m_{[1,N]}]^k.$$

Die mathematische Erwartung von $\mu''_{[k,N]}$ lässt sich auch in einer anderen Form darstellen:

$$E\mu''_{[k,N]} = m_{[k,N]} +$$

$$+ \sum_{h=1}^{k-2} (-1)^h C_k^h m_{[1,N]}^h m_{[k-h,N]} + (-1)^{k-1} (k-1) m_{[1,N]}^k.$$

Wenn alle Grössen $m_1^{(i)}$ untereinander gleich sind, so ist $\mu''_{[k,N]} = \mu'_{[k,N]}$, abgesehen davon, wie sich die Verteilungsgesetze im übrigen gestalten. Sind hingegen die Grössen $m_1^{(i)}$ nicht alle gleich, so ist $\mu''_{[k,N]} \neq \mu'_{[k,N]}$ und, im allgemeinen, auch $E\mu''_{[k,N]} \neq E\mu'_{[k,N]}$.

Bei $k = 2$, hat man

$$E\mu''_{[2,N]} = m_{[2,N]} - m_{[1,N]}^2 = \mu_{[2,N]} + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} [m_1^{(i)} - m_{[1,N]}]^2,$$

woraus

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} [m_1^{(i)} - m_{[1,N]}]^2 = E\{\mu''_{[2,N]} - \mu'_{[2,N]}\} =$$

$$= E\left\{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} [x'_i - m_{[1,N]}]^2 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} [x'_i - m_1^{(i)}]^2\right\}$$

folgt.

III

Setzt man

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[x'_i - x_{(N)}]^k = r'_{[k,N]},$$

$$E\, r'_{[k,N]} = r_{[k,N]},$$

so hat man

$$r_{[1,N]} = r'_{[1,N]} = 0,$$

$$(1)\quad r_{[2,N]} = E\,\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[x'_i - x_{(N)}]^2 =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[m_1^{(i)} - m_{[1,N]}]^2 + \frac{N-1}{N}\,\mu_{[2,N]}.$$

$$(2)\quad r_{[3,N]} = E\,\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[x'_i - x_{(N)}]^3 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[m_1^{(i)} - m_{[1,N]}]^3 +$$

$$+ \frac{(N-1)(N-2)}{N^2}\,\mu_{[3,N]} + \frac{3(N-2)}{N}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mu_2^{(i)} m_1^{(i)} - \mu_{[2,N]} m_{[1,N]}\right].$$

Nach etwas langwierigeren Rechnungen findet man ferner:

$$(3)\quad E\, r'^2_{[2,N]} = \left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[m_1^{(i)} - m_{[1,N]}]^2\right\}^2 + \frac{(N-1)^2}{N^3}\,\mu_{[4,N]} +$$

$$+ \frac{N^2 - 2N + 3}{N^4}\left\{\left[\sum_{i=1}^{N}\mu_2^{(i)}\right]^2 - \sum_{i=1}^{N}[\mu_2^{(i)}]^2\right\} +$$

$$+ \frac{2(N-1)}{N}\,\mu_{[2,N]}\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[m_1^{(i)} - m_{[1,N]}]^2\right\} +$$

$$+ \frac{4(N-1)}{N^2}\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mu_3^{(i)} m_1^{(i)} - \mu_{[3,N]} m_{[1,N]}\right\} + \frac{4}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\mu_2^{(i)}[m_1^{(i)} - m_{[1,N]}]^2$$

und

$$(4)\quad E[\nu'_{[2,N]} - \nu_{[2,N]}]^2 =$$

$$= E\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[x'_i - x_{(N)}]^2 - \left[\frac{N-1}{N}\mu_{[2,N]} + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[m_1^{(i)} - m_{[1,N]}]^2\right]\right\}^2 =$$

$$= \frac{(N-1)^2}{N^4}\sum_{i=1}^{N}[\mu_4^{(i)} - 3(\mu_2^{(i)})^2] + \frac{2(N-1)}{N^3}\sum_{i=1}^{N}[\mu_2^{(i)}]^2 -$$

$$- \frac{2}{N^3}\sum_{i=1}^{N}[\mu_2^{(i)} - \mu_{[2,N]}]^2 + \frac{4}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\mu_2^{(i)}[m_1^{(i)} - m_{[1,N]}]^2 +$$

$$+ \frac{4(N-1)}{N^2}\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mu_3^{(i)}m_1^{(i)} - \mu_{[3,N]}m_{[1,N]}\right\}.$$

Im Falle, wenn alle Variablen einem und demselben Verteilungsgesetze folgen, erhält man aus (4):

$$(5)\quad E\left\{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}[x'_i - x_{(N)}]^2 - \mu_2\right\}^2 = \frac{2}{N-1}\mu_2^2 + \frac{1}{N}[\mu_4 - 3\mu_2^2].$$

Zweites Kapitel.

I.

1) Wenn die N Variablen in r Serien von je n, einem und demselben Verteilungsgesetze folgenden, Variablen zerfallen, erhält man aus (1):

$$(6)\quad E\frac{1}{nr}\sum_{i=1}^{nr}[x'_i - x_{(nr)}]^2 = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}[m_1^{(i)} - m_{[1,r]}]^2 + \frac{nr-1}{nr}\mu_{[2,r]},$$

wobei durch $m_{[1,r]}$ und $\mu_{[2,r]}$ die arithmetischen Durchschnitte der die r Verteilungsgesetze charakterisierenden Grössen $m_1^{(i)}$ und $\mu_2^{(i)}$ bezeichnet werden, so dass $m_{[1,r]} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}m_1^{(i)}$, $\mu_{[2,r]} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\mu_2^{(i)}$.

Bezeichnet man ferner mit $x'_{i,j}$ den Werth, welchen beim j-ten Versuche der i-ten Serie die betreffende Variable annimmt, und setzt $z_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x'_{i,j}$, so hat man:

$$\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} z_i = \frac{1}{nr}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n} x'_{i,j} = x_{(nr)},$$

$$E z_i = E x_i = m_1^{(i)}, \quad \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} E z_i = m_{[1,r]},$$

$$E z_i^2 = \frac{1}{n} E x_i^2 + \frac{n-1}{n}[E x_i]^2 = \frac{1}{n}\mu_2^{(i)} + [m_1^{(i)}]^2,$$

$$E z_i^2 - [E z_i]^2 = \frac{1}{n}\mu_2^{(i)},$$

$$\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}[E z_i^2 - (E z_i)^2] = \frac{1}{nr}\sum_{i=1}^{r}\mu_2^{(i)} = \frac{1}{n}\mu_{[2,r]},$$

(7) $$E\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}[z_i - x_{(nr)}]^2 = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}[m_1^{(i)} - m_{[1,r]}]^2 + \frac{r-1}{nr}\mu_{[2,r]}.$$

Aus (6) und (7) erhält man:

(8) $$\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}[m_1^{(i)} - m_{[1,r]}]^2 = E\left\{\frac{nr-1}{(n-1)r}\,\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}[z_i - x_{(nr)}]^2 - \frac{r-1}{r(n-1)}\,\frac{1}{nr}\sum_{i=1}^{nr}[x_i - x_{(nr)}]^2\right\}.$$

Aus

$$E\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}[x'_{i,j} - z_i]^2 = \mu_2^{(i)},$$

findet man anderseits:

$$(9)\qquad \mu_{[2,r]} = E\,\frac{1}{r(n-1)}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n}[x'_{i,j}-z_i]^2$$

und durch Substitution in (7):

$$(10)\quad \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}[m_1^{(i)}-m_{[1,r]}]^2 =$$
$$= E\left\{\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}[z_i-x_{(nr)}]^2-\frac{r-1}{r(n-1)}\,\frac{1}{nr}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n}[x'_{i,j}-z_i]^2\right\}.$$

Dies ist jedoch kein neuer selbständiger Weg zur empirischen Bestimmung des Wertes von $\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}[m_1^{(i)}-m_{[1,r]}]^2$, da nicht nur die mathematischen Erwartungen der in (8) und in (10) zur rechten Seite stehenden Ausdrücke gleich, sondern auch die Ausdrücke selbst identisch gleich sind, wie man sich leicht überzeugen kann.

2) Setzt man

$$\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}[m_1^{(i)}-m_{[1,r]}]^2 = M,$$

$$\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}[z_i-x_{(nr)}]^2 = M',$$

$$\frac{r-1}{r(n-1)}\,\frac{1}{nr}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n}[x'_{i,j}-z_i]^2 = M'',$$

so ist

$$EM' = M + \frac{r-1}{nr}\,\mu_{[2,r]},$$

$$EM'' = \frac{r-1}{nr}\,\mu_{[2,r]},$$

$$M = E\{M'-M''\}.$$

Man findet ferner leicht

$$(10') \quad E[M' - EM']^2 =$$

$$= \frac{(r-1)^2}{n^3 r^3} \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} [\mu_4^{(i)} - 3(\mu_2^{(i)})^2] + \frac{2(r-1)}{n^2 r^2} \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} [\mu_2^{(i)}]^2 -$$

$$- \frac{2}{n^2 r^2} \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} [\mu_2^{(i)} - \mu_{[2,r]}]^2 + \frac{4}{nr} \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} \mu_2^{(i)} [m_1^{(i)} - m_{[1,r]}]^2 +$$

$$+ \frac{4(r-1)}{n^2 r^2} \left[\frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} \mu_3^{(i)} m_1^{(i)} - \mu_{[3,r]} m_{[1,r]} \right],$$

$$E[M'' - EM'']^2 =$$

$$= \frac{(r-1)^2}{n^3 r^3} \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} [\mu_4^{(i)} - 3(\mu_2^{(i)})^2] + \frac{2(r-1)^2}{r^3 n^2 (n-1)} \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} [\mu_2^{(i)}]^2$$

und nach etwas beschwerlicheren Rechnungen:

$$E[M' - EM'] . [M'' - EM''] = \frac{(r-1)^2}{n^3 r^3} \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} [\mu_4^{(i)} - 3(\mu_2^{(i)})^2] +$$

$$+ \frac{2(r-1)}{n^2 r^2} \left[\frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} \mu_3^{(i)} m_1^{(i)} - \mu_{[3,r]} m_{[1,r]} \right].$$

Da nun aber

$$E\{[M' - M''] - M\}^2 = E[M' - EM']^2 +$$

$$+ E[M'' - EM'']^2 - 2E\{[M' - EM'] . [M'' - EM'']\},$$

so erhält man schliesslich:

$$(11) \quad E\{[M' - M''] - M\}^2 =$$

$$= \frac{2(r-1)(nr-1)}{r^3 n^2 (n-1)} \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} [\mu_2^{(i)}]^2 - \frac{2}{n^2 r^2} \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} [\mu_2^{(i)} - \mu_{[2,r]}]^2 +$$

$$+ \frac{4}{nr} \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} \mu_2^{(i)} [m_1^{(i)} - m_{[1,r]}]^2.$$

II.

1) Man nehme nun an, dass an der Variablen x_1 — n_1 Versuche vorgenommen werden, an der Variablen x_2 — n_2 Versuche u. s. w., und setze $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = s$.

Betrachtet man alle s Versuche, als ein ganzes, so hat man:

$$m_{[1,s]} = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{r} n_i m_1^{(i)},$$

$$m_{[2,s]} = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{r} n_i m_2^{(i)},$$

$$\mu_{[2,s]} = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{r} n_i \mu_2^{(i)},$$

$$E x_{(s)} = m_{[1,s]},$$

$$E x_{(s)}^2 = m_{[1,s]}^2 + \frac{1}{s}\mu_{[2,s]},$$

$$(12)\qquad E\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}[x'_i - x_{(s)}]^2 = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{r} n_i [m_1^{(i)} - m_{[1,s]}]^2 + \frac{s-1}{s}\mu_{[2,s]}.$$

Setzt man anderseits

$$z_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} x'_{i,j},$$

$$z_{(r)} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} z_i,$$

so erhält man:

$$\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{r} n_i z_i = x_{(s)},$$

$$E z_i = m_1^{(i)}; \quad \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} E z_i = m_{[1,r]}; \quad \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{r} n_i m_1^{(i)} = m_{[1,s]},$$

$$E z_i^2 = [m_1^{(i)}]^2 + \frac{1}{n_i}\mu_2^{(i)}; \quad E z_i^2 - [E z_i]^2 = \frac{1}{n_i}\mu_2^{(i)}$$

und, bei $n_i \geq 2$,

$$E\frac{1}{n_i-1}\sum_{j=1}^{n_i}[x'_{i,j} - z_i]^2 = \mu_2^{(i)},$$

$$(13) \qquad E\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{r}\frac{n_i}{n_i-1}\sum_{j=1}^{n_i}[x'_{i,j} - z_i]^2 = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{r} n_i \mu_2^{(i)} = \mu_{[2,s]},$$

$$E\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i-1}\sum_{j=1}^{n_i}[x'_{i,j} - z_i]^2 = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\mu_2^{(i)} = \mu_{[2,r]},$$

$$E\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i(n_i-1)}\sum_{j=1}^{n_i}[x'_{i,j} - z_i]^2 = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i}\mu_2^{(i)}.$$

Man findet ferner mühelos:

$$(14) \quad E\sum_{i=1}^{r}[z_i - z_{(r)}]^2 = \sum_{i=1}^{r}[m_1^{(i)} - m_{[1,r]}]^2 + \frac{r-1}{r}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i}\mu_2^{(i)}.$$

$$(15) \quad E\sum_{i=1}^{r} n_i[z_i - x_{(s)}]^2 = \sum_{i=1}^{r} n_i[m_1^{(i)} - m_{[1,s]}]^2 + \sum_{i=1}^{r}\mu_2^{(i)} - \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{r} n_i\mu_2^{(i)}.$$

$$(16) \quad E\sum_{i=1}^{r}[z_i - x_{(s)}]^2 = \sum_{i=1}^{r}[m_1^{(i)} - m_{[1,r]}]^2 + \sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i}\mu_2^{(i)} - \frac{2}{s}\sum_{i=1}^{r}\mu_2^{(i)} +$$

$$+ \frac{r}{s^2}\sum_{i=1}^{r} n_i\mu_2^{(i)} + 2r\, m_{[1,s]}[m_{[1,s]} - m_{[1,r]}],$$

$$(17) \quad E\sum_{i=1}^{r} n_i[z_i - z_{(r)}]^2 = \sum_{i=1}^{r} n_i[m_1^{(i)} - m_{[1,r]}]^2 + \frac{r-2}{r}\sum_{i=1}^{r}\mu_2^{(i)} +$$

$$+ \frac{s}{r^2}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i}\mu_2^{(i)}.$$

Aus (14) und (13) erhält man:

$$(18)\quad \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}[m_1^{(i)}-m_{[1,r]}]^2 =$$

$$= E\left\{\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}[z_i-z_{(r)}]^2-\frac{r-1}{r^2}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i(n_i-1)}\sum_{j=1}^{n_i}[x'_{i,j}-z_i]^2\right\},$$

und aus (12) und (13)

$$(19)\quad \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{r}n_i[m_1^{(i)}-m_{[1,s]}]^2 =$$

$$= E\left\{\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}[x'_i-x_{(s)}]^2-\frac{s-1}{s^2}\sum_{i=1}^{r}\frac{n_i}{n_i-1}\sum_{j=1}^{n_i}[x'_{i,j}-z_i]^2\right\},$$

oder auch aus (15) und (13)

$$(20)\quad \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{r}n_i[m_1^{(i)}-m_{[1,s]}]^2 =$$

$$= E\left\{\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{r}n_i[z_i-x_{(s)}]^2-\frac{1}{s^2}\sum_{i=1}^{r}\frac{s-n_i}{n_i-1}\sum_{j=1}^{n_i}[x'_{i,j}-z_i]^2\right\}.$$

Die Formel (18) zeigt, dass der mittlere Fehler der mathematischen Erwartungen der Grössen z_i stets kleiner ist, als die mathematische Erwartung des mittleren Fehlers der Grössen z_i. Was die Formeln (19) und (20) anbelangt, so lässt es sich leicht nachweisen, dass nicht nur die mathematischen Erwartungen der auf der rechten Seite stehenden Ausdrücke gleich, sondern auch die Ausdrücke selber identisch gleich sind: die beiden Wege zur empirischen Bestimmung von $\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{r}n_i[m_1^{(i)}-m_{[1,s]}]^2$ fallen mithin zusammen.

2) Setzt man

$$(21) \qquad \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}[m_1^{(i)} - m_{[1,r]}]^2 = M,$$

$$\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}[z_i - z_{(r)}]^2 = M',$$

$$\frac{r-1}{r^2}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i(n_i-1)}\sum_{j=1}^{n_i}[x_{i,j} - z_i]^2 = M'',$$

so hat man:

$$EM' = \frac{r-1}{r^2}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i}\mu_2^{(i)} + \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}[m_1^{(i)} - m_{[1,r]}]^2,$$

$$EM'' = \frac{r-1}{r^2}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i}\mu_2^{(i)},$$

$$M = E[M' - M''].$$

Man findet ferner:

$$(21') \qquad E[M' - EM']^2 =$$

$$= \frac{(r-1)^2}{r^4}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i^3}[\mu_4^{(i)} - 3(\mu_2^{(i)})^2] + \frac{2(r-1)}{r^3}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i^2}(\mu_2^{(i)})^2 -$$

$$- \frac{2}{r^3}\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{1}{n_i}\mu_2^{(i)} - \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{n_j}\mu_2^{(j)}\right]^2 + \frac{4}{r^2}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i}\mu_2^{(i)}[m_1^{(i)} - m_{[1,r]}]^2 +$$

$$+ \frac{4(r-1)}{r^3}\left\{\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i^2}\mu_3^{(i)}m_1^{(i)} - m_{[1,r]}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i^2}\mu_3^{(i)}\right\},$$

$$E[M'' - EM'']^2 = \frac{(r-1)^2}{r^4}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i^3}[\mu_4^{(i)} - 3(\mu_2^{(i)})^2] +$$

$$+ \frac{2(r-1)^2}{r^4}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i^2(n_i-1)}[\mu_2^{(i)}]^2,$$

$$E[M'-EM'].[M''-EM''] = \frac{(r-1)^2}{r^4}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i^3}[\mu_4^{(i)}-3(\mu_2^{(i)})]^2 +$$

$$+\frac{2(r-1)}{r^3}\left\{\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i^2}\mu_3^{(i)}m_1^{(i)} - m_{[1,r]}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i^2}\mu_3^{(i)}\right\}.$$

und hieraus:

$$(22)\quad E\{[M'-M'']-M\}^2 = \frac{2(r-1)}{r^4}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i^2}[\mu_2^{(i)}]^2 +$$

$$+\frac{2(r-1)^2}{r^4}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i(n_i-1)}[\mu_2^{(i)}]^2 - \frac{2}{r^3}\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{1}{n_i}\mu_2^{(i)} - \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{n_j}\mu_2^{(j)}\right]^2 +$$

$$+\frac{4}{r^2}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i}\mu_2^{(i)}[m_1^{(i)}-m_{[1,r]}]^2.$$

III.

1) Im Falle, wenn die Grössen $m_1^{(i)}$ untereinander gleich sind, findet man aus (21) und (22)

$$M = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}[m_1^{(i)}-m_{[1,r]}]^2 = 0,$$

$$E[M'-M''] = 0,$$

$$(23)\quad E[M'-M'']^2 = \frac{2(r-1)}{r^4}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i^2}[\mu_2^{(i)}]^2 +$$

$$+\frac{2(r-1)^2}{r^4}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i(n_i-1)}[\mu_2^{(i)}]^2 - \frac{2}{r^3}\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{1}{n_i}\mu_2^{(i)} - \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{n_j}\mu_2^{(j)}\right]^2.$$

Falls ausserdem die Grössen n_i unter einander gleich sind, hat man:

$$E[M'-M''] =$$

$$= \frac{1}{r}E\left\{\sum_{i=1}^{r}[z_i-x_{(nr)}]^2 - \frac{r-1}{r}\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n}[x'_{i,j}-z_i]^2\right\} = 0,$$

$$(24)\quad E[M'-M'']^2 = \frac{2(r-1)(nr-1)}{r^3 n^2(n-1)}\,\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}[\mu_2^{(i)}]^2 -$$

$$-\frac{2}{n^2 r^2}\,\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}[\mu_2^{(i)}-\mu_{[2,r]}]^2 .$$

Wenn ausser den Grössen $m_1^{(i)}$, auch die Grössen $m_2^{(i)}$ und folglich auch $\mu_2^{(i)}$ unter einander gleich sind, erhält man:

$$E[M'-M''] = 0 .$$

$$(25)\quad E[M'-M'']^2 =$$

$$= \mu_2^2\left\{\frac{2(r-1)^2}{r^4}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i(n_i-1)} - \frac{2}{r^4}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i^2} + \frac{2}{r^4}\left[\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i}\right]^2\right\} .$$

Falls ausserdem die Grössen n_i unter einander gleich sind, hat man:

$$(26)\qquad E[M'-M'']^2 = \frac{2(r-1)(nr-1)}{r^3 n^2(n-1)}\,\mu_2^2 .$$

2) Der Fall, wo alle Variablen einem und demselben Verteilungsgesetze folgen, lässt sich auch in einer anderen Weise behandeln, die vor der obigen erhebliche Vorzüge hat. Man setze:

$$\frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r} n_i[z_i - x_{(s)}]^2 = \mu'_2 ,$$

$$\frac{1}{s-1}\sum_{i=1}^{s}[x_i - x_{(s)}]^2 = \mu''_2 .$$

Man hat:

$$E\mu'_2 = E\mu''_2 = \mu_2 ,$$

und folglich

$$E[\mu'_2 - \mu''_2] = 0 .$$

Man findet ferner leicht

$$E\mu'^2_2 = \frac{r+1}{r-1}\mu_2^2 + \frac{1}{(r-1)^2}\left[\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i} - \frac{2r-1}{s}\right].[\mu_4 - 3\mu_2^2],$$

$$E\mu''^2_2 = \frac{s+1}{s-1}\mu_2^2 + \frac{1}{s}[\mu_4 - 3\mu_2^2]$$

und nach etwas beschwerlicheren Rechnungen

$$E\mu'_2\mu''_2 = \mu_2^2 + \frac{1}{s-1}[\mu_4 - \mu_2^2] - \frac{1}{s(s-1)}[\mu_4 - 3\mu_2^2],$$

woraus

$$(27)\qquad E[\mu'_2 - \mu''_2]^2 = \frac{2}{r-1}\,\frac{s-r}{s-1}\mu_2^2 + {}$$

$$+ \frac{1}{(r-1)^2}\left[\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i} - \frac{r^2}{s}\right].[\mu_4 - 3\mu_2^2]$$

folgt.

Sind die Grössen n_i untereinander gleich, so ist $\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i} - \frac{r^2}{s} = 0$, und man erhält

$$(28)\qquad E[\mu'_2 - \mu''_2]^2 = \frac{2}{r-1}\,\frac{s-r}{s-1}\mu_2^2.$$

Wenn die Variable x dem Gauss'schen Verteilungsgesetze folgt, ist $\mu_4 - 3\mu_2^2 = 0$, und man erhält gleichfalls

$$(29)\qquad E[\mu'_2 - \mu''_2]^2 = \frac{2}{r-1}\,\frac{s-r}{s-1}\mu_2^2.$$

In diesem Falle ist also der mittlere Fehler von $\mu'_2 - \mu''_2$ von der Verteilung der Versuche auf die einzelnen Serien unabhängig.

Da $\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i} - \frac{r^2}{s} > 0$ ist, so wird das Vorzeichen des zweiten Gliedes auf der rechten Seite von (27) durch das Vorzeichen der Differenz $\mu_4 - 3\mu_2^2$ bestimmt: ist $\mu_4 > 3\mu_2^2$, so wird

$E[\mu'_2 - \mu''_2]^2$ durch die ungleichmässige Verteilung der Versuche auf die einzelnen Serien vergrössert. Ist $\mu_4 < 3\mu^2$, so wird $E[\mu'_2 - \mu''_2]^2$ im Gegenteil hierdurch verringert.

3) In dem Falle, wenn alle Variablen einem und demselben Verteilungsgesetze folgen und die Zahlen n_i untereinander gleich sind, lässt sich ohne besondere Schwierigkeit die Gestalt des Verteilungsgesetzes von $\mu'_2 - \mu''_2$ für $n = \infty$ unter der Voraussetzung, dass $\left(\frac{n\mu_h}{[n\mu_2]^{h/2}}\right)_{n=\infty} = 0$ bei beliebig grossem h ist, feststellen.

Das Verteilungsgesetz der Grössen z_i nähert sich unter obiger Voraussetzung mit wachsendem n der GAUSS'schen Form an; man hat demnach

$$(E[\mu'_2]^k)_{n=\infty} = \left(1 + \frac{2}{r-1}\right)\left(1 + \frac{4}{r-1}\right)\cdots\left(1 + \frac{2(k-1)}{r-1}\right)\mu_2^k,$$

(30) $(E[\mu'_2 - \mu_2]^k)_{n=\infty} =$

$$= \mu_2^k \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j \left(1 + \frac{2}{r-1}\right)\left(1 + \frac{4}{r-1}\right)\cdots\left(1 + \frac{2(k-j-1)}{r-1}\right).$$

Anderseits hat man:

$$(E[\mu''_2]^k)_{n=\infty} = \mu_2^k,$$

$$(E[\mu''_2 - \mu_2]^k)_{n=\infty} = 0.$$

In gleicher Weise, wie oben (zweite Abhandlung, S. 248) überzeugt man sich ferner leicht, dass bei beliebigen ganzzahligen positiven h und j

$$(E[\mu'_2 - \mu_2]^h \cdot [\mu''_2 - \mu_2]^j)_{n=\infty} = 0$$

und dass, folglich,

(31) $$(E[\mu'_2 - \mu''_2]^k)_{n=\infty} = (E[\mu'_2 - \mu_2]^k)_{n=\infty}.$$

Das Verteilungsgesetz von $\mu'_2 - \mu''_2$ ist also bei $n = \infty$ dasselbe, wie das Verteilungsgesetz von $[\mu'_2 - \mu_2]$, d. i. das

PEARSON'sche asymmetrische Verteilungsgesetz, das dem Werte ∞ des PEARSON'schen Kriteriums entspricht[1] und dessen Gleichung auf die Form $y = kx^{\frac{r-3}{2}} e^{-\frac{r-1}{2\mu_2}x}$ gebracht werden kann, falls man den Nullpunkt des Coordinatensystems in den Punkt verlegt, welchem der Wert $y = 0$ entspricht. Die Mode hat hierbei den Wert $\mu_2\left[1 - \frac{2}{r-1}\right]$.

IV.

Die Bestimmung des Näherungswertes von $\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}[m_1^{(i)} - m_{[1,r]}]^2$ stellt auf die Tagesordnung die sich unmittelbar daran anschliessende Frage nach den Werten der höheren Momente der $m_1^{(i)}$-Grössen. Ohne dieses komplizierte Problem in dessen ganzem Umfange hier aufzuwerfen, will ich nur in aller Kürze zeigen, wie sich in dem einfachsten Falle der gleichen Versuchszahlen der Wert von $\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}[m_1^{(i)} - m_{[1,r]}]^3$ auf Grundlage der empirischen Werte von $x'_{i,j}$ und z_i näherungsweise berechnen lässt.

Hält man an den Bezeichungen des § I dieses Kapitels fest, so erhält man aus (2), indem man alle nr Versuche als ein Ganzes betrachtet:

$$(32) \quad E\frac{1}{nr}\sum_{i=1}^{nr}[x'_i - x_{(nr)}]^3 =$$

$$= \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}[m_1^{(i)} - m_{[1,r]}]^3 + \frac{(nr-1)(nr-2)}{nr}\mu_{[3,r]} +$$

$$+ \frac{3(nr-2)}{nr}\left[\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\mu_2^{(i)} m_1^{(i)} - \mu_{[2,r]} m_{[1,r]}\right].$$

Wendet man anderseits die Formel (2) auf die z_i-Grössen an, wobei zu beachten ist, dass

[1] Cf. etwa W. PALIN ELDERTON, Frequency curves and correlation, p. 47, 68.

$$E[z_i - E z_i]^2 = \frac{1}{n}\mu_2, \quad E[z_i - E z_i]^3 = \frac{1}{n^2}\mu_3,$$

so findet man:

$$(33) \quad E\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}[z_i - x_{(nr)}]^3 = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}[m_1^{(i)} - m_{[1,r]}]^3 + \frac{(r-1)(r-2)}{n^2 r}\mu_{[3,r]} + \\ + \frac{3(r-2)}{nr}\left[\frac{1}{nr}\sum_{i=1}^{nr}\mu_2^{(i)} m_1^{(i)} - \mu_{[2,r]} m_{[1,r]}\right].$$

Aus

$$E\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}[x'_{i,j} - z_i]^3 = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\mu_3^{(i)}$$

findet man schliesslich:

$$(34) \quad E\frac{n}{r(n-1)(n-2)}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n}[x'_{i,j} - z_i]^3 = \mu_{[3,r]}.$$

Man verfügt demnach über drei lineare Gleichungen, die nicht mehr, als drei, unbekannte Grössen enthalten. Aus (32) und (33) erhält man:

$$(35) \quad E\frac{1}{nr(nr-2)}\sum_{i=1}^{nr}[x'_i - x_{(nr)}]^3 - E\frac{1}{r(r-2)}\sum_{i=1}^{r}[z_i - x_{(nr)}]^3 = \\ = \frac{(n-1)(nr+r-1)}{n^2 r}\mu_{[3,r]} - \frac{r(n-1)}{(r-2)(nr-1)}\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}[m_1^{(i)} - m_{[1,r]}]^3.$$

Setzt man in (35) den Wert von $\mu_{[3,r]}$ aus (34), so hat man schliesslich:

$$(36) \quad \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}[m_1^{(i)} - m_{[1,r]}]^3 = \\ = E\left\{\frac{(nr+r-1)(nr-1)(r-2)}{r^3 n(n-1)(n-2)}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n}[x'_{i,j} - z_i]^3 + \right. \\ \left. + \frac{nr-2}{r^2(n-1)}\sum_{i=1}^{r}[z_i - x_{(nr)}]^3 - \frac{r-2}{r^2 n(n-1)}\sum_{i=1}^{nr}[x'_i - x_{(nr)}]^3\right\}.$$

Drittes Kapitel.

I.

1) Man nehme nun in üblicher Weise (vgl. Erste Abhandlung, S. 210) an, dass die Variablen $x_1, x_2, \ldots x_r$ bloss Werte 1 und 0 annehmen können und bezeichne mit p_i die Wahrscheinlichkeit des Wertes 1 und mit q_i ($= 1 - p_i$) die Wahrscheinlichkeit des Wertes 0 für die Variable x_i. Durch z_i wird dann die Häufigkeit des in bekannter Weise mit x_i zusammenhängenden Ereignisses A für die i-te Serie ausgedrückt und durch $x_{(s)}$ — die Häufigkeit von A für alle r Serien. Setzt man ferner

$$\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} p_i = p_{(r)},$$

$$\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{r} n_i p_i = p_{(s)},$$

so hat man

$$m_1^{(i)} = p_i, \quad m_{[1,r]} = p_{(r)}, \quad m_{[1,s]} = p_{(s)},$$

$$\mu_2^{(i)} = p_i q_i,$$

$$\sum_{i=1}^{s}[x'_i - x_{(s)}]^2 = \sum_{i=1}^{s} x_i^2 - s x_{(s)}^2 = \sum_{i=1}^{s} x_i - s x_{(s)}^2 = s x_{(s)}[1 - x_{(s)}]$$

und demnach

$$(37)\quad E\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}[x'_i - x_{(s)}]^2 = E x_{(s)}[1 - x_{(s)}] =$$

$$= \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{r} n_i[p_i - p_{(s)}]^2 + \frac{s-1}{s}\sum_{i=1}^{r} n_i p_i q_i,$$

$$(38)\quad E\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}[z_i - z_{(r)}]^2 = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}[p_i - p_{(r)}]^2 + \frac{r-1}{r^2}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i} p_i q_i,\text{[1]}$$

[1] Bleibt n_i für alle r Serien gleich, so erhält man aus der Formel (38) die von Prof. v. Bortkiewicz in der Abhandlung »Homogeneität und

$$(39)\quad E\,\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{r} n_i[z_i - x_{(s)}]^2 = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{r} n_i[p_i - p_{(s)}]^2 + \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{r} p_i q_i - \frac{1}{s^2}\sum_{i=1}^{r} n_i p_i q_i,$$

$$(40)\quad E\,\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} [z_i - x_{(s)}]^2 = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} [p_i - p_{(r)}]^2 + \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{n_i} p_i q_i - \frac{2}{sr}\sum_{i=1}^{r} p_i q_i + \frac{1}{s^2}\sum_{i=1}^{r} n_i p_i q_i + 2 p_{(s)}[p_{(s)} - p_{(r)}],$$

$$(41)\quad E\,\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{r} n_i[z_i - z_{(r)}]^2 = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{r} n_i[p_i - p_{(r)}]^2 + \frac{r-2}{sr}\sum_{i=1}^{r} p_i q_i + \frac{1}{r^2}\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{n_i} p_i q_i.$$

Da anderseits

$$E z_i[1 - z_i] = p_i - p_i^2 - \frac{1}{n_i} p_i q_i = \frac{n_i - 1}{n_i} p_i q_i,$$

so ist

$$(42)\quad \begin{aligned} E\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{n_i - 1} z_i[1 - z_i] &= \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{n_i} p_i q_i, \\ E\sum_{i=1}^{r} \frac{n_i^2}{n_i - 1} z_i[1 - z_i] &= \sum_{i=1}^{r} n_i p_i q_i \end{aligned}$$

und, folglich,

Stabilität in der Statistik« Skandinavisk Aktuarietidskrift, 1918 auf S. 11 gegebene Formel (36). In gleicher Weise erhält man aus den Formeln (21) bezw. (10), als einen Spezialfall, die von BORTKIEWICZ aufgestellte Formel (60) (ibid., S. 20), — oder vielmehr die genaue Formel, zu der BORTKIEWICZ gekommen wäre, falls er in den Formeln (54), (55) u. a. die $\frac{1}{s^2}$, bezw. $\frac{1}{s^3}$ enthaltenden Glieder nicht vernachlässigt hätte.

$$(43)\quad \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}[p_i - p_{(r)}]^2 =$$

$$= E\left\{\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}[z_i - z_{(r)}]^2 - \frac{r-1}{r^2}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i - 1}z_i[1-z_i]\right\},$$

$$(44)\quad \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{r}n_i[p_i - p_{(s)}]^2 =$$

$$= E\left\{x_{(s)}[1-x_{(s)}] - \frac{s-1}{s^2}\sum_{i=1}^{r}\frac{n_i^2}{n_i - 1}z_i[1-z_i]\right\}.$$

2) Setzt man, wie oben (S. 13)

$$\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}[p_i - p_{(r)}]^2 = M,$$

$$\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}[z_i - z_{(r)}]^2 = M',$$

$$\frac{r-1}{r^2}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i - 1}z_i[1-z_i] = M'',$$

so hat man

$$M = E[M' - M'']$$

und, laut (22),

$$(45)\quad E\{[M' - M''] - M\}^2 = \frac{2(r-1)}{r^4}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i^2}p_i^2 q_i^2 +$$

$$+ \frac{2(r-1)^2}{r^4}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i(n_i-1)}p_i^2 q_i^2 -$$

$$- \frac{2}{r^3}\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{1}{n_i}p_i q_i - \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{n_j}p_j q_j\right]^2 + \frac{4}{r^2}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i}p_i q_i[p_i - p_{(r)}]^2.$$

Wenn alle n_i unter einander gleich sind, erhält man:

$$\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}[p_i - p_{(r)}]^2 = M = E\left\{\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}[z_i - z_{(r)}]^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{r-1}{r^2(n-1)}\sum_{i=1}^{r} z_i[1-z_i]\right\},$$

(46)

$$E\{[M' - M''] - M\}^2 = \frac{2(r-1)}{r^4 n}\left[\frac{1}{n} + \frac{r-1}{n-1}\right]\sum_{i=1}^{r} p_i^2 q_i^2 -$$

$$- \frac{2}{n^2 r^3}\sum_{i=1}^{r}\left[p_i q_i - \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r} p_j q_j\right]^2 + \frac{4}{n r^2}\sum_{i=1}^{r} p_i q_i [p_i - p_{(r)}]^2.$$ [1]

[1] M' in den obigen Formeln entspricht der von Prof. v. BORTKIEWICZ in »Homogeneität und Stabilität in der Statistik» (Skandin. Aktuarietidskrift, 1918) mit σ^2 bezeichneten Grösse: M'' entspricht dem BORTKIEWICZ'schen u^2, M — dem BORTKIEWICZ'schen w^2. Die Differenz $M' - M''$ ist somit dem BORTKIEWICZ'schen v^2 gleich, und $E\{[M' - M''] - M\}^2 = \mathfrak{M}^2(v^2)$. Was den Unterschied zwischen der obigen Formel (46) und der BORTKIEWICZ'schen Formel (103) (Homog. u. Stab., S. 27) anbelangt, so geht er, einerseits, darauf zurück, dass BORTKIEWICZ auf eine genaue Berechnung der in Betracht kommenden mathematischen Erwartungen verzichtet (cf. oben Anmerkung zu S. 20), und, anderseits, darauf, dass der in die Definition von v^2 (ibid., S. 26) eingehende empirische Wert u^2 bei der Berechnung von $\mathfrak{M}^2(v^2)$ durch eine apriorische Grösse ersetzt wird. Berücksichtigt man die Identitäten

$$\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} p_i^2 q_i^2 = p_{(r)}^2 q_{(r)}^2 + [1 - 6\,p_{(r)} q_{(r)}]\varepsilon_2 + 2[p_{(r)} - q_{(r)}]\varepsilon_3 + \varepsilon_4,$$

$$\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} p_i q_i = p_{(r)} q_{(r)} - \varepsilon_2,$$

$$\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} p_i q_i [p_i - p_{(r)}]^2 = p_{(r)} q_{(r)} \varepsilon_2 - [p_{(r)} - q_{(r)}]\varepsilon_3 - \varepsilon_4.$$

wobei $\varepsilon_k = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}[p_i - p_{(r)}]^k$ ist (cf. BORTKIEWICZ, Homog. und Stab., S. 21; vgl. CHARLIER, Theorems of POISSON and LEXIS, p. 14, Ark. f. mat., astr. och fysik, 1911), so erhält man aus Formel (46) nach Weglassen der ε_2^2, ε_3 und ε_4 enthaltenden Glieder mit der von BORTKIEWICZ angestrebten Annäherung

Wenn, anderseits, alle p_i untereinander gleich sind, erhält man:

$$M = 0,$$

(47) $$E[M' - M'']^2 = p^2 q^2 \left\{ \frac{2(r-1)}{r^4} \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{n_i^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2(r-1)^2}{r^4} \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{n_i(n_i-1)} - \frac{2}{r^3} \sum_{i=1}^{r} \left[\frac{1}{n_i} - \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{n_j} \right]^2 \right\}.$$

Wenn, schliesslich, sowohl alle p_i, wie auch alle n_i gleich sind, erhält man:

$$M = 0,$$

(48) $$E[M' - M'']^2 = \frac{2(r-1)(nr-1)}{r^3 n^2 (n-1)} p^2 q^2.$$

II.

Wenn alle p_i unter einander gleich sind, kann man auch von den Formeln des § III, 2) des zweiten Kapitels ausgehen. Man erhält dann:

(49) $$\mu'_2 = \frac{1}{r-1} \sum_{i=1}^{r} n_i [z_i - x_{(s)}]^2,$$
$$\mu''_2 = \frac{s}{s-1} x_{(s)} [1 - x_{(s)}],$$

$$\mathfrak{M}^2(v^2) = \frac{2}{r^2 n^2} \left\{ \frac{(r-1)(nr-1)}{r(n-1)} p^2 q^2 + 2 \frac{n}{n-1} (nr - r + 5) pq\varepsilon_2 + \frac{n}{n-1} (r-2) \varepsilon_2 \right\} =$$
$$= \frac{2}{r^2 n^2} \{ (r-1) p^2 q^2 + 2(nr+5) pq\varepsilon_2 + (r-2)\varepsilon_2 \}$$ anstatt

$\mathfrak{M}^2(v^2) = \frac{2}{r^2 n^2} \{ (r-1) p^2 q^2 + 2nrpq\varepsilon_2 \}$ laut Formel (103): die Näherungsformel (103) darf also insoweit, als correct, gelten, inwiefern ε_2 derselben Grössenordnung, wie $\frac{1}{n}$, ist.

$$E[\mu'_2 - \mu''_2] = 0,$$

$$(50)\quad E[\mu'_2 - \mu''_2]^2 = \frac{2}{r-1}\,\frac{s-r}{s-1}\,p^2q^2 + \frac{1}{(r-1)^2}\left[\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i} - \frac{r^2}{s}\right] pq[1-6pq].$$

Bei $p = q = \frac{1}{2}$ hat man demnach:

$$E[\mu'_2 - \mu''_2]^2 = \frac{1}{8(r-1)}\left\{\frac{s-r}{s-1} - \frac{1}{r-1}\left[\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i} - \frac{r^2}{s}\right]\right\};$$

der mittlere Fehler von $\mu'_2 - \mu''_2$ ist also bei $p = \frac{1}{2}$ um so geringer, je ungleichmässiger sich die Versuche auf die einzelnen Serien verteilen.

Die ungleichmässige Verteilung der Versuche wirkt ermässigend auf $E[\mu'_2 - \mu''_2]^2$, solange $1 - 6pq < 0$ oder $\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{12}$ bleibt. Bei $pq = \frac{1}{6}$ wird $E[\mu'_2 - \mu''_2]^2$ durch die Verteilung der Versuche auf die einzelnen Serien nicht beeinflusst. Bei $pq < \frac{1}{6}$ stellt sich $E[\mu'_2 - \mu''_2]^2$ um so grösser, je ungleichmässiger die Verteilung ist.

Sind die Grössen n_i untereinander gleich, so ergibt sich aus (49) und (50):

$$(51)\quad \begin{aligned} \mu'_2 &= \frac{n}{r-1}\sum_{i=1}^{r}[z_i - x_{(nr)}]^2, \\ \mu''_2 &= \frac{nr}{nr-1}\,x_{(nr)}[1 - x_{(nr)}], \end{aligned}$$

$$(52)\quad E[\mu'_2 - \mu''_2]^2 = \frac{2}{r-1}\,\frac{r(n-1)}{nr-1}\,p^2q^2,$$

und aus (31), bei nicht allzu kleinen p und q,

$$(53) \quad (E[\mu'_2 - \mu''_2]^k)_{n=\infty} =$$

$$= p^k q^k \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j \left(1 + \frac{2}{r-1}\right)\left(1 + \frac{4}{r-1}\right) \cdots \left(1 + \frac{2(k-j-1)}{r-1}\right).$$

Das Verteilungsgesetz von $\mu'_2 - \mu''_2$ bei $n = \infty$ und $\left(\frac{1}{pqn}\right)_{n=\infty} = 0$ hat also die Form (cf. oben S. 18):

$$y = k\, x^{\frac{r-3}{2}} e^{-\frac{r-1}{2pq}x}.$$

III.

Aus rechnerischen Gründen ist es oft zweckmässig, die Zahlen der Wiederholungen des Ereignisses A und nicht dessen Häufigkeiten den Berechnungen zu Grunde zu legen. Bezeichnet man mit w_i die Zahl der Wiederholungen von A bei den n_i Versuchen der i-ten Serie und mit w_s die Zahl der Wiederholungen von A im Laufe aller s Versuche, so hat man:

$$w_i = n_i z_i,$$

$$w_s = \sum_{i=1}^{r} w_i = s x_{(s)}.$$

Sind alle n_i gleich, so erhält man aus (43) und (44):

$$(54) \quad \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} [p_i - p_{(r)}]^2 =$$

$$= E\left\{\frac{1}{n^2 r} \sum_{i=1}^{r} \left[w_i - \frac{1}{r} w_{nr}\right]^2 - \frac{r-1}{n^2 r^2 (n-1)} \sum_{i=1}^{r} w_i [n - w_i]\right\} =$$

$$= E\left\{\frac{1}{n^2 r^2} w_{nr}[nr - w_{nr}] - \frac{nr-1}{n^2 r^2 (n-1)} \sum_{i=1}^{r} w_i [n - w_i]\right\}.$$

Anderseits erhält man, wenn alle p_i gleich sind, aus (44)

$$(55)\qquad E\,\frac{1}{s^2}\left\{w_s[s-w_s]-(s-1)\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i-1}\,w_i[n_i-w_i]\right\}=0$$

und aus (49)

$$(56)\qquad E\left\{\frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i}\left[w_i-\frac{n_i}{s}\,w_s\right]^2-\frac{1}{s(s-1)}\,w_s[s-w_s]\right\}=0.$$

Sind sowohl alle n_i, wie alle p_i gleich, so hat man einerseits:

$$(57)\qquad \begin{aligned} &E\left\{\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\left[w_i-\frac{1}{r}\,w_{nr}\right]^2-\frac{r-1}{r}\,\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{r}w_i[n-w_i]\right\}=0,\\ &E\left\{\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\left[w_i-\frac{1}{r}\,w_{nr}\right]^2-\frac{r-1}{r}\,\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{r}w_i[n-w_i]\right\}^2=\\ &\qquad\qquad=\frac{2(r-1)(nr-1)}{r^3(n-1)}\,(np)^2q^2 \end{aligned}$$

und, anderseits,

$$(58)\qquad \begin{aligned} &E\left\{\frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r}\left[w_i-\frac{1}{r}\,w_{nr}\right]^2-\frac{1}{r(nr-1)}\,w_{nr}[nr-w_{nr}]\right\}=0.\\ &E\left\{\frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r}\left[w_i-\frac{1}{r}\,w_{nr}\right]^2-\frac{1}{r(nr-1)}\,w_{nr}[nr-w_{nr}]\right\}^2=\\ &\qquad\qquad=\frac{2}{r-1}\,\frac{r(n-1)}{nr-1}\,(np)^2q^2. \end{aligned}$$

Von besonderem Interesse ist der Fall, wo p so klein ist, dass w_{nr} im Vergleich zu nr vernachlässigt werden darf. Setzt man $p=\frac{m}{n}$ und lässt dann n unbeschränkt wachsen, so erhält man aus (57) und aus (58) übereinstimmend:

$$(59)\qquad E\left\{\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\left[w_i-\frac{1}{r}\,w_{nr}\right]^2-\frac{1}{r}\,w_{nr}\right\}=0,$$

$$(60) \qquad E\left\{\frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r}\left[w_i-\frac{1}{r}w_{nr}\right]^2-\frac{1}{r}w_{nr}\right\}^2=\frac{2}{r-1}m^2.$$ [1]

In diesem Falle — d. i. im Bereiche des sogenannten »Gesetzes der kleinen Zahlen» — erhält man mithin Beziehungen, welche die Zahl n überhaupt nicht enthalten. Alle Berechnungen lassen sich ausführen, ohne dass man die genaue Grösse von n kennt: um die Formeln (59) und (60) anwenden zu dürfen, braucht man nur, berechtigt zu sein, anzunehmen, dass alle n_i untereinander gleich sind und dass n sehr gross ist im Vergleich zu der grössten der Zahlen w_i.

IV.

Bei der praktischen Verwertung der oben abgeleiteten Formeln wird man in der Regel die in denselben vorkommenden apriorischen Grössen durch empirische Werte ersetzen müssen. Am nächstliegenden ist gewiss, einfach überall $p_i = z_i$ und $q_i = 1 - z_i$ zu setzen, wie man es eben meistens zu tun pflegt. In der Praxis wird man sich wohl in der Regel an dieses Verfahren halten. Theoretisch ist dasselbe jedoch nicht einwandfrei. Man hat ja:

$$Ez_i[1-z_i] = \frac{n_i-1}{n_i}p_iq_i,$$

woraus

$$p_iq_i = E\frac{n_i}{n_i-1}z_i[1-z_i], \text{ — also } p_iq_i \neq Ez_i[1-z_i] \text{ — folgt:}$$

bei kleinen Werten von n_i kann der der Annahme $p_iq_i = Ez_i[1-z_i]$ anhaftende Fehler recht erheblich sein.

Aus

$$Ez_i^2[1-z_i]^2 = \frac{(n_i-1)^2}{n_i^3}p_iq_i + \frac{(n_i-1)(n_i-2)(n_i-3)}{n_i^3}p_i^2q_i^2$$

---

[1] Cf. Bortkiewicz, Ueber die Zeitfolge zufälliger Ereignisse, S. 62 (Bull. Inst. Intern. de Stat., t. XX, Livr. 2).

findet man in ähnlicher Weise, bei $z_i \neq \frac{1}{n_i}$,

$$p_i^3 q_i^3 = \frac{n_i^3}{(n_i-1)(n_i-2)(n_i-3)} E\left\{z_i[1-z_i]^2 - \frac{n_i-1}{n_i^2} z_i[1-z_i]\right\}.$$

Hätte man, von $p_i q_i = \frac{n_i}{n_i-1} z_i[1-z_i]$ ausgehend, $p_i^2 q_i^2$ gleich $\frac{n_i^2 z_i^2 [1-z_i]^2}{(n_i-1)^2}$ gesetzt, so hätte man den Wert von $p_i^2 q_i^2$ überschätzt. Bei $p = q = \frac{1}{2}$ würde der relative Fehler bei nicht zu kleinem n_i nicht allzu schwer ins Gewicht fallen, aber bei stark von $\frac{1}{2}$ abweichenden Werten von p und q würde er selbst bei sehr grossem n_i recht erheblich sein können.

Der in (45) vorkommende Ausdruck

$$\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{1}{n_i} p_i q_i - \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{n_j} p_j q_j\right]^2$$

lässt sich in der Weise empirisch abschätzen, dass man von

$$\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{1}{n_i} p_i q_i - \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{n_j} p_j q_j\right]^2 = \sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i^2} p_i^2 q_i^2 - \frac{1}{r}\left[\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i} p_i q_i\right]^2$$

$$= \frac{r-1}{r}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i^2} p_i^2 q_i^2 - \frac{2}{r}\sum_{i=1}^{r-1}\sum_{j=i+1}^{r}\frac{1}{n_i} p_i q_i \frac{1}{n_j} p_j q_j$$

ausgeht und für $\frac{1}{n_i} p_i q_i$ als Näherungswert $\frac{1}{n_i-1} z_i[1-z_i]$, sowie für $\frac{1}{n_i^2} p_i^2 q_i^2$ den Wert $\frac{n_i}{(n_i-1)(n_i-2)(n_i-3)}\left\{z_i^2[1-z_i]^2 - \frac{n_i-1}{n_i} z_i[1-z_i]\right\}$ einsetzt.

Da ferner

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{n_i} p_i q_i [p_i - p_{(r)}]^2 =$$

$$= \frac{(r-1)^2}{r^2} \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{n_i} p_i^3 q_i - \frac{2(r-1)}{r^2} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j \neq i} \frac{1}{n_i} p_i^2 q_i p_j +$$

$$+ \frac{1}{r^2} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j \neq i} \frac{1}{n_i} p_i q_i p_j^2 + \frac{1}{r^2} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j \neq i} \sum_{h \neq i \neq j} \frac{1}{n_i} p_i q_i p_j p_h$$

ist, so braucht man hier bloss $q_i = 1 - p_i$ zu setzen und dann p durch z, p^2 durch $z^2 - \frac{1}{n-1} z[1-z]$ u. s. w. zu ersetzen, um einen adäquaten empirischen Näherungswert auch für diesen Ausdruck eventuell zu erhalten.

V.

An die Bestimmung des Näherungswertes von $\frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} [p_i - p_{(r)}]^2$ lässt sich, wie oben (§ IV des zweiten Kapitels) die Frage nach den Werten der höheren Momente der p_i-Grössen anschliessen. Wenn die Versuchszahlen n_i untereinander gleich sind, erhält man leicht aus (36):

(61) $$\frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} [m_1^{(i)} - m_{[1,r]}]^3 =$$

$$= E \left\{ \frac{(nr + r - 1)(nr - 1)(r-2)}{r^3 (n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^{r} z_i [1 - z_i][1 - 2z_i] + \right.$$

$$\left. + \frac{nr - 2}{r^2 (n-1)} \sum_{i=1}^{r} [z_i - x_{(nr)}]^3 - \frac{r-2}{r(n-1)} x_{(nr)} [1 - x_{(nr)}][1 - 2x_{(nr)}] \right\},$$

denn

$$\sum_{j=1}^{n} [x'_{i,j} - z_i]^3 = n z_i [1 - 3z_i + 2z_i^2] = n z_i [1 - z_i][1 - 2z_i]$$

und

$$\sum_{i=1}^{nr} [x_i - x_{(nr)}]^3 = nr\, x_{(nr)} [1 - x_{(nr)}] [1 - 2x_{(nr)}].$$

Viertes Kapitel.

1.

Die Berechnung der oben mit M bezeichneten (cf. S. 8, 13, 22) Lexis'schen »wesentlichen Schwankungskomponente« (vgl. Erste Abhandlung, S. 214) kann ein mannigfaltiges statistisches Interesse bieten.

1) Als Quadrat des mittleren Fehlers der den empirischen Zahlen zu Grunde liegenden apriorischen Grössen m_1^i bezw. p_i, besitzt M einen hervorragenden unmittelbaren Erkenntniswert. Durch die Berechnung von M lässt sich ein Urteil darüber bilden, inwieweit die Grössen m_1^i bezw. p_i von den Merkmalen beeinflusst werden, auf welchen die Serienbildung beruht. Man fasse etwa die so oft behandelte, aber doch unentschiedene Frage nach dem Einflusse der Alterskombination der Eltern auf das Geschlecht der Nachkommenschaft ins Auge. Wie eifrig hat man seit Hofacker und Sadler nach dem gesetzmässigen Zusammenhange zwischen der Sexualproportion der Geborenen und dem Alter der Eltern geforscht und wie ergebnislos sind bis jetzt alle derartige Forschungen geblieben! Kaum wähnte ein Forscher eine gewisse Gesetzmässigkeit erfasst zu haben, als ein Anderer kam and an neuem empirischen Material überzeugend nachwies, dass von der eben entdeckten Regelmässigkeit keine Spur zu merken sei. Und daraufhin wiederholte sich dieselbe Geschichte in ewigem Turnus von neuem.[1] Diese Misserfolge wurzelten nicht zuletzt darin, dass man über geeignete Mittel zur Veredelung des empirischen Materials nicht verfügte und das hinter dem Schleier der zufälligen Schwankungen schimmernde Bild festzuhalten sich beeilte,

[1] Cf. etwa die Literaturübersicht bei E. Rolcke, Einfluss des Alters der Eltern auf das Geschlecht der Kinder, S. 49—52 (Allg. Stat. Archiv, Bd. IX, 1915).

ohne vorher festgestellt zu haben, dass die beobachteten Unterschiede in den statistischen Häufigkeiten über die Grenzen des rein Zufälligen hinausgehen. Die erste Frage hätte stets sein sollen, ob überhaupt merkbare Unterschiede in den Wahrscheinlichkeiten der Knabengeburt zwischen den einzelnen Elterngruppen vorhanden sind. Erst wenn man Grund hat, diese Frage bejahend zu beantworten, lässt sich mit Aussicht auf Erfolg die weitere Frage stellen, für welche Gruppen die betreffende Wahrscheinlichkeit höher und für welche sie niedriger zu veranschlagen ist. Wird das Problem in dieser Weise zergliedert, so lässt sich die Vorfrage an der Hand der oben abgeleiteten Formeln stets insoweit lösen, dass man feststellt, ob Differenzen zwischen den Wahrscheinlichkeiten von der Grösse existieren, dass sie den durch den mittleren Fehler von M bestimmten Spielraum übersteigen.

Dasselbe Verfahren kann ferner dazu benützt werden, Gruppierungen nach verschiedenen Merkmalen unter einander zu vergleichen, wobei es sich also entscheiden lässt, wo die den Forscher interessierenden Differenzen der Wahrscheinlichkeiten grösser sind. Hätte man z. B. auf diese Weise festgestellt, ob Unterschiede im Alter der Väter oder Unterschiede im Alter der Mütter oder Altersunterschiede zwischen den Eltern die Wahrscheinlichkeit der Knabengeburt stärker beeinflussen, so wäre unser Wissen von den rätselhaften Vorgängen bei der Geschlechtsbestimmung nicht unwesentlich gefördert. Sehr lehrreich könnte sich auch der Vergleich der Grösse von $\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}[p_i - p_{(r)}]^2$ für die Lebendgeborenen, einerseits, und für die Gesamtheit der Geborenen (i. e. der Lebend- und Totgeborenen), anderseits, gestalten. Die praktische Verwertbarkeit dieses Forschungsverfahrens in dessen einfacherer Form, welche von der Annahme gleicher Versuchszahlen für alle Serien ausgeht, ist relativ gering, da man nur in Ausnahmefällen ein dieser Annahme nicht zu krass widersprechendes empirisches Material zur Verfügung bekommt. Durch die oben abgeleiteten allgemeinen Formeln wird dieses methodische Hindernis beseitigt, und es steht der praktischen Anwendung dieses vielverheissenden Verfahrens

nichts im Wege ausser der zeitraubenden Kalkulationsarbeit, die freilich von Einzelforschern, welche über kein Bureaupersonal verfügen, in dem erforderlichen Umfange kaum bewältigt werden kann.[1]

2) Die Berechnung von M lässt sich unter Umständen an die Ausführung der Ausgleichung mit Vorteil anschliessen.

[1] In den Tabellen der Berliner Statistik werden z. B. für die ehelich Geborenen die Zahlen der Knaben- und Mädchengeburten seit 1878 jahraus jahrein für mehr als 1500 Elterngruppen ausgewiesen. Ein Material, fürwahr, das allein, wenn es zweckentsprechend bearbeitet wäre, die Frage nach dem Vorhandensein eines Zusammenhanges zwischen der Sexualproportion der Geborenen und dem Alter der Eltern entscheiden könnte, das aber so gut, wie brach liegt und ein weiteres halbes Jahrhundert brach liegen wird, wenn nicht inzwischen statistische Forschungsinstitute entstehen, welche mit technischen Mitteln ausreichend ausgerüstet sind, um vor grösseren Aufgaben nicht zurückzuschrecken. Die Forscher, welche sich für das Problem der geschlechtsbestimmenden Faktoren interessieren, möchte ich an dieser Stelle vor der Heranziehung der Pariser Statistik ausdrücklich warnen. Die in den Pariser Tabellen enthaltenen Zahlen scheinen nämlich zum Teil nicht auf der Beobachtung zu beruhen, sondern mehr oder weniger frei erdichtet zu sein. Die Knabenquote schwankt in einer Weise, die allem widerspricht, was wir sonst beobachten: bald sind die Schwankungen ungeheuer gross, bald sind sie im Gegenteil unglaublich gering. Im Jahre 1898 treffen wir z. B. Gruppen mit keiner einzigen Mädchengeburt und 11, 13, 17 (zweimal), 26, 30, ja 32 Knabengeburten, eine Gruppe mit 25 Mädchengeburten und keiner Knabengeburt und zahlreiche Gruppen, wo das Missverhältnis zwar nicht so grell in die Augen schlägt, aber doch kaum glaubwürdiger ist (z. B. 558 Knaben und 268 Mädchen, 60 Knaben und 155 Mädchen, 99 Knaben und 205 Mädchen u. s. w., — cf. Annuaire Statistique de la Ville de Paris für 1898). Wenn wir anderseits die 8 Jahrgänge 1890/97 ins Auge fassen, so finden wir in den betr. Tabellen 147 Gruppen mit je drei Geburten, aber darunter keine einzige, wo alle drei geborene Mädchen wären, und bloss 8 Gruppen mit je drei Knaben; unter den Gruppen mit je 4, je 5 Geburten sind die extremen Fälle gleichfalls so gut, wie nicht vertreten. Betrachtet man mithin die Tabellen in ihrer Gesamtheit etwas aufmerksamer, so bleibt kein Zweifel übrig, dass die Zahlen — wenigstens teilweise — mit der Wirklichkeit nichts zu tun haben, sondern auf willkührlichen und nirgends, so weit ich sehe, erwähnten Manipulationen beruhen. Diese »Interpolationen« sind vermutlich von den mit der Aufbereitung beauftragten unteren Beamten auf eigene Rechnung und ganz planlos vorgenommen worden, wobei es offenbar zwei »Schulen« gegeben hat: die eine neigte zur gleichmässigen Verteilung der Geburten auf Knaben und Mädchen, wogegen die andere die Extremen bevorzugte. Es ist, natürlich, möglich, — ja wahrscheinlich, — dass nicht alle Zahlen solchen unkontrollierbaren Ursprungs sind und dass einzelne Jahrgänge von einer derartigen Misshandlung überhaupt verschont blieben. Solange aber der Sachverhalt vom Pariser Statistischen Bureau nicht voll aufgeklärt wird, wozu eine erneute sorgfältigere Aufbereitung des Materials erforderlich wäre, müssen diese Tabellen für die Wissenschaft, als nicht existierend, gelten.

Etwas verdächtig sind übrigens auch die betr. Berliner Tabellen für 1884, 1886 und 1891, — namentlich in den jüngeren Altersklassen der Väter (cf. die oben zitierte Abhandlung von Rolcke, S. 59 und 68); eine Nachprüfung wäre auch hier erwünscht.

Hat man etwa eine unausgeglichene Sterbetafel in der Form von, in einjährigen Intervallen auf einander folgenden empirischen Werten der Sterbewahrscheinlichkeiten, — $p'_1, p'_2, \ldots p'_\omega$, — so besteht die Aufgabe der Ausgleichung darin, die ursprüngliche unregelmässig schwankende Reihe der p'-Werte durch eine andere, »glattere», Reihe zu ersetzen unter der Voraussetzung, dass die unregelmässigen Schwankungen der empirischen Häufigkeiten $p'_1, p'_2, \ldots p'_\omega$ Zufälligkeiten zu verdanken sind, dass aber die Reihe der, ihnen zu Grunde liegenden mathematischen Wahrscheinlichkeiten einen sprungfreien Verlauf aufweist, der eben den Einfluss des Alters auf die Sterblichkeit zum Ausdruck bringt.

Die nähere Bestimmung der p-Werte geschieht bekanntlich entweder graphisch oder »mechanisch», unter stillschweigender Annahme eines bestimmten gesetzmässigen Zusammenhanges zwischen den beiden Variablen, oder, schliesslich, unter direkter Anlehnung an einen, mehr oder weniger plausiblen, analytischen Ausdruck für diese Annahme. In allen drei Fällen verfährt man ziemlich willkührlich und hat zwischen der Scylla eines allzu weit gehenden Schematismus', der die eigenartige Wellenbewegung der empirischen Zahlen durch eine allzu einfache Kurve nivelliert, und der Charybdis einer allzu getreuen Wiedergabe der ursprünglichen Zahlen, welche rein zufällige Schwankungen fortbestehen lässt, zu manövrieren. Gegen die Gefahr einer zu weit gehenden Ausgleichung sucht man sich gelegentlich, — namentlich bei der graphischen Ausgleichung — dadurch, zu schützen, dass man auf Grundlage der mittleren Fehler der einzelnen p'-Werte beiderseits von der empirischen Kurve eine Zone absteckt, innerhalb welcher die ausgeglichene Kurve der p-Werte liegen soll. Die Festlegung der Grenzen für die zulässigen Abweichungen der einzelnen p-Werte von den entsprechenden p'-Werten lässt sich ferner dadurch ergänzen, dass man in ähnlicher Weise den Spielraum vorschreibt, innerhalb dessen gewisse Funktionen der Differenzen $p' - p$ $\left(\text{z. B.} \sum_{i=1}^{r} (p'_i - p_i)^2\right)$ sich halten sollen. Hierdurch werden wichtige objective Stützpunkte gewonnen, um sowohl der Überausgleichung, wie der nicht weit genug gehenden Ausgleichung einigermassen vorzubeugen: bleibt

etwa $\sum_{i=1}^{r} (p'_i - p_i)^2$ hinter ihrem erwartungsmässigen Werte mehr zurück, als es dem mittleren Fehler entspricht, so ist dies ein Zeichen dafür, dass die Zufälligkeiten noch nicht ausgeglichen sind.[1]

Die Berechnung von M sowohl für die Gesamtheit der p-Werte, wie namentlich für einzelne Abschnitte der p-Kurve kann weitere ähnliche Stützpunkte gewähren für das Bestreben, die Willkühr bei der Ausführung der Ausgleichung durch objectiv vorgezeichnete Daten nach Möglichkeit einzudämmen. Wenn z. B. ein bestimmter Abschnitt der p-Kurve wellenlos verläuft, wogegen die betreffenden p'-Werte grössere Schwankungen aufweisen, so lässt sich durch den Vergleich von M mit dem mittleren Fehler von M entscheiden, ob dies nicht darauf zurückgeht, dass man eine reelle Welle auf der Kurve der wahren p-Werte durch die Wahl eines ungeeigneten Ausgleichungsverfahrens, als »zufällig», mit »ausgeglichen» hat. Merkt man z. B. an einer ausgeglichenen Sterblichkeitstafel die sonst oft deutlich zu Tage tretende Abnahme der männlichen Sterblichkeit in den Jahren nach dem Militärdienst nicht, so lässt sich durch die Berechnung von M für einen passenden Altersspielraum nachweisen, ob das eben nicht auf einem »zuviel an Ausgleichung» beruht. Es wäre freilich hierzu erforderlich, über eine Reihe so dicht aufeinander folgender p'-Werte zu verfügen, dass der mittlere Fehler von M für den gewählten Altersspielraum sich hinreichend klein im Vergleich zu den fraglichen Unterschieden in der Sterblichkeit zeige.

[1] Dieses Verfahren wird gelegentlich auch in der Form angewandt, dass man bei der Ausgleichung, als Bedingung, aufstellt, dass der Wert von $\sum_{i=1}^{r} (p'_i - p_i)^2$ der mathematischen Erwartung von $\sum_{i=1}^{r} (p'_i - p_i)^2$, unter der Voraussetzung der gegenseitigen Unabhängigkeit der Versuche, genau gleich sei. Hierdurch wird der an sich richtige Gedanke, dass die Summe der quadrierten Differenzen zwischen p'_i und p_i, wenn diese Differenzen rein zufällig sind, gewisse Grenzen nach oben, wie nach unten, nicht überschreiten kann, in einer Weise überspannt, die sich wahrscheinlichkeitsrechnerisch nicht rechtfertigen lässt.

II.

1) Die Lexis'sche Dispersionstheorie gipfelt bekanntlich in der Unterscheidung der normalen, der übernormalen und der unternormalen Dispersion (bezw. Stabilität). Als normal stabil, werden Reihen von statistischen Zahlen bezeichnet, deren Schwankungen um ihren Mittelwert den aus dem stochastischen Schema einer unveränderlichen Wahrscheinlichkeit (bezw. eines unveränderlichen Verteilungsgesetzes) bei gegenseitiger Unabhängigkeit aller Versuche sich ergebenden Erwartungen entsprechen. Als übernormal gilt die Dispersion in dem Falle, wenn die Schwankungen grösser sind, als es dem Schema der normalen Dispersion entsprechen würde. Sind hingegen die Schwankungen geringer, so ist die Dispersion unternormal (bezw. die Stabilität übernormal).

Als Mittel zur Unterscheidung des Charakters der Dispersion gilt für die Vertreter der Dormoy-Lexis'schen Richtung die Grösse des Divergenzcoeffizienten: die Dispersion gilt für normal, wenn $Q^2 = 1$ (oder vielmehr, wenn die Differenz $Q^2 - 1$ sich innerhalb des Spielraums der zufälligen Schwankungen hält); ist $Q^2 > 1$, so ist die Dispersion übernormal; ist $Q^2 < 1$, so ist die Dispersion unternormal.

Wir haben oben gesehen, dass, wenn die Voraussetzungen der normalen Dispersion erfüllt sind, EQ^2 tatsächlich gleich 1 ist (zweite Abhandlung, erstes Kapitel). Dies reicht jedoch nicht, um die Verwertung der Grösse von Q^2, als eines Kriteriums, voll zu rechtfertigen: es wäre hierzu erforderlich, dass die Bedingung $EQ^2 = 1$ nicht nur eine notwendige, sondern auch eine genügende wäre, d. h. dass sie *nur* in dem Falle erfüllt sein könnte, wenn alle Voraussetzungen der normalen Dispersion zuträfen. Dass die Sache sich anders verhält, haben wir bereits gesehen (erste Abhandlung, S. 208): nicht nur der zufällige empirische Wert von Q^2, sondern auch EQ^2 kann gleich 1 sein, obgleich die einzelnen Versuche nicht unabhängig von einander sind. Man betrachte etwa das folgende stochastische Schema.

Aus r Urnen, die schwarze und weisse Kugeln enthalten, werden s Kugeln gezogen, wobei auf die i-te Urne n_i

Ziehungen entfallen und $\sum_{i=1}^{r} n_i = s$ ist. Die gezogenen Kugeln werden in die Urne *nicht* zurückgelegt. Die Zahl der in der i-ten Urne vor dem Beginn der Ziehungen enthaltenen schwarzen Kugeln sei a_i, die der weissen — b_i. Man bezeichne mit z_i die Quote der schwarzen Kugeln unter den n_i aus der i-ten Urne gezogenen Kugeln, mit $x_{(s)}$ — die Gesamtquote der schwarzen Kugeln unter allen s gezogenen Kugeln und setze $\frac{a_i}{a_i+b_i} = p_i$, $1 - p_i = q_i$.

Betrachtet man alle s Ziehungen, als ein Ganzes, und setzt in den Formeln des § I des ersten Kapitels der ersten Abhandlung

$$m_1^{(i)} = p_i,\quad m_2^{(i)} = p_i,\quad \mu_2^{(i)} = p_i q_i$$

$E x'_{h_1} x'_{h_2} - m_1^{(h_1)} m_1^{(h_2)} = 0$, wenn h_1 und h_2 Ziehungen aus verschiedenen Urnen bezeichnen,

$E x'_{h_1} x'_{h_2} - m_1^{(h_1)} m_1^{(h_2)} = -\frac{1}{a_i + b_i - 1} p_i q_i$, wenn sowohl h_1, wie h_2, Ziehungen aus der i-ten Urne bezeichnen (vgl. Formel (16) der ersten Abhandlung), so erhält man:

$$E x_{(s)} = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{r} n_i p_i = p_{(s)},$$

$$(62)\quad E x_{(s)}^2 = p_{(s)}^2 + \frac{1}{s^2} \sum_{i=1}^{r} n_i \frac{a_i + b_i - n_i}{a_i + b_i - 1} p_i q_i .$$

$$(63)\quad E \frac{s}{s-1} x_{(s)} [1 - x_{(s)}] = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{r} n_i p_i q_i$$

$$+ \frac{1}{s(s-1)} \sum_{i=1}^{r} \frac{n_i(n_i - 1)}{a_i + b_i - 1} p_i q_i + \frac{1}{s-1} \sum_{i=1}^{r} n_i [p_i - p_{(s)}]^2 .$$

Sind alle p_i untereinander gleich, so hat man:

$$(64)\quad E \frac{s}{s-1} x_{(s)} [1 - x_{(s)}] = pq \left\{ 1 + \frac{1}{s(s-1)} \sum_{i=1}^{r} \frac{n_i(n_i-1)}{a_i + b_i - 1} \right\} .$$

Setzt man anderseits in den Formeln des § I des ersten Kapitels der ersten Abhandlung

$$m_1^{(i)} = E z_i = p_i, \quad m_2^{(i)} = E z_i^2 = \frac{a_i(a_i-1)}{(a_i+b_i)(a_i+b_i-1)} +$$

$$+ \frac{1}{n_i} \frac{a_i b_i}{(a_i+b_i)(a_i+b_i-1)}, \quad \mu_2^{(i)} = p_i q_i \frac{1}{n_i} \frac{a_i+b_i-n_i}{a_i+b_i-1},$$

so findet man:

$$(65) \qquad E \frac{1}{r-1} \sum_{i=1}^{r} [z_i - z_{(r)}]^2 =$$

$$= \frac{1}{r-1} \sum_{i=1}^{r} [p_i - p_{(r)}]^2 + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} p_i q_i \frac{1}{n_i} \frac{a_i+b_i-n_i}{a_i+b_i-1}.$$

Wenn alle p_i unter einander gleich sind, folgt hieraus:

$$(66) \quad E \frac{1}{r-1} \sum_{i=1}^{r} [z_i - z_{(r)}]^2 = pq \left\{ \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{n_i} - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} \frac{n_i-1}{n_i} \frac{1}{a_i+b_i-1} \right\}.$$

In gleicher Weise erhält man:

$$(67) \quad E \frac{1}{r-1} \sum_{i=1}^{r} n_i [z_i - x_{(s)}]^2 = \frac{1}{r-1} \sum_{i=1}^{r} n_i E z_i^2 - \frac{s}{r-1} E x_{(s)}^2 =$$

$$= \frac{1}{r-1} \sum_{i=1}^{r} n_i [p_i - p_{(s)}]^2 + \frac{1}{r-1} \sum_{i=1}^{r} \frac{s-n_i}{s} \frac{a_i+b_i-n_i}{a_i+b_i-1} p_i q_i.$$

Sind alle p_i untereinander gleich, so hat man:

$$(68) \quad E \frac{1}{r-1} \sum_{i=1}^{r} n_i [z_i - x_{(s)}]^2 = pq \left\{ 1 - \frac{1}{r-1} \sum_{i=1}^{r} \frac{s-n_i}{s} \frac{n_i-1}{a_i+b_i-1} \right\}.$$

Wenn also die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen, vor dem Beginn des Experimentes für alle r Urnen die gleiche ist, so ist:

$$E\frac{s}{s-1}x_{(s)}[1-x_{(s)}] > pq > E\frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r} n_i[z_i - x_{(s)}]^2,$$

$$E\frac{s}{s-1}x_{(s)}[1-x_{(s)}] > pq > E\frac{r}{(r-1)\sum\limits_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i}}\sum_{i=1}^{r}[z_i - z_{(r)}]^2.$$

Der Divergenzcoeffizient würde demnach sich < 1 stellen und die Dispersion, als unternormal, kennzeichnen.

Wenn aber die Wahrscheinlichkeiten p_i unter einander nicht gleich sind, so ist wohl möglich, dass $E\frac{s}{s-1}x_{(s)}[1-x_{(s)}]$ entweder $E\frac{1}{r-1}\sum\limits_{i=1}^{r} n_i[z_i - x_{(s)}]^2$ oder $E\frac{r}{(r-1)\sum\limits_{i=1}^{r}\frac{1}{n_i}}\sum\limits_{i=1}^{r}[z_i - z_{(r)}]^2$ gleich ist. Im Falle, wenn alle n_i unter einander gleich sind, wäre z. B. hierzu bloss erforderlich, dass

$$\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{a_i + b_i - 1}p_i q_i = \frac{r}{r-1}\sum_{i=1}^{r}[p_i - p_{(r)}]^2$$

sei. Der Divergenzcoeffizient würde dann gleich 1 sein, und die Dispersion wäre auf Grund dessen für normal zu erklären, obgleich keine der wesentlichen Voraussetzungen der normalen Dispersion erfüllt ist: die Wahrscheinlichkeiten p_i sind verschieden, und die einzelnen Versuche sind nicht unabhängig von einander. Der Umstand, dass $Q^2 = 1$ ist, bietet also an sich noch keine Bürgschaft dafür, dass die Voraussetzungen der normalen Dispersion tatsächlich erfüllt sind.

Abgesehen von diesem prinzipiellen Einwand, lässt sich gegen die Wahl der Divergenzcoeffizienten, als Kriteriums bei der Unterscheidung des Charakters der Dispersion, die Unsicherheit der Bestimmung des mittleren Fehlers von Q^2 anführen, die jedoch in der Regel kaum allzu schwer ins Gewicht fallen kann, da es sich gezeigt hat, dass $\frac{2}{r-1}$ die Grenze darstellt, zu welcher $E[Q^2 - 1]^2$ selbst bei ungleichmässiger Verteilung der Versuche auf die Serien mit wach-

sender Zahl der Versuche strebt unter Voraussetzungen, deren Erfüllung unschwer zu controllieren ist (vgl. zweite Abhandlung, zweites Kapitel, § V).

2) An Stelle des Quotienten der Ausdrücke, welche im Zähler und im Nenner des Divergenzcoeffizienten stehen, hätte man ebenso gut deren Differenz, als Kriterium, verwenden können, und die Dispersion für normal gelten lassen, falls diese Differenz gleich 0 ist, — für übernormal, falls sie > 0 ist, — für unternormal, falls sie < 0 ist.

Versucht man die Gründe zu rekonstruieren, welche sowohl Dormoy, wie Lexis bewogen haben mögen, das erste von den beiden gleich nahe liegenden Verfahren zu bevorzugen, so dürften sie wohl hauptsächlich darauf zurückgehen, dass die annähernde Gleichheit der beiden Ausdrücke in den Abweichungen des Quotienten von 1 drastischer zum Vorschein kommt, als in den Abweichungen der Differenz von 0, — ein Vorzug, der in den 70-er Jahren des XIX. Jahrhunderts von den Vertretern des wahrscheinlichkeitstheoretischen Standpunktes in der Statistik gewiss nicht gering zu veranschlagen war angesichts der Nachklänge des kaum abgeschlossenen erbitterten Kampfes gegen die Uebertreibungen des Queteletismus. Als weniger wichtiges Nebenmotiv war vermutlich der Wunsch im Spiel, im Divergenzcoeffizienten nicht nur ein Kriterium, sondern auch ein rationelles Mass für die Abweichung der Dispersion von der »Norm» zu erhalten.

Keinem dieser Gründe kann gegenwärtig ein grösseres Gewicht beigelegt werden. Die stochastische Orientierung der statistischen Theorie bedarf keiner künstlichen Stütze mehr, und ausserdem besteht kein Unterschied mehr zwischen den beiden Verfahren in Bezug auf die Leichtfassbarkeit ihrer Ergebnisse, seit man die Notwendigkeit eingesehen hat, die Abweichungen in beiden Fällen durch die betreffenden mittleren Fehler zu dividieren. Was aber die Idee anbelangt, den Divergenzcoeffizienten als Mass für die Abweichung der Dispersion von der »Norm» zu verwerten, so hat Lexis selbst überzeugend nachgewiesen, dass zu diesem Zwecke der Wert von Q^2 ganz ungeeignet erscheint und im Falle der übernormalen Dispersion durch die Berechnung

der »wesentlichen Schwankungscomponente« ersetzt werden soll.

Es erscheint demnach die Berechnung von Q^2 gegenwärtig, als ein veraltetes Verfahren, das nur aus Rücksicht auf eingebürgerte Gewohnheiten, sowie gelegentlich zu Popularisierungszwecken gebraucht zu werden verdient. Zu Forschungszwecken bedient man sich zweckmässiger eines anderen Verfahrens. Man soll zunächst auf Grund der Formeln des § III, 2) des zweiten Kapitels (bezw. des § II des dritten Kapitels) prüfen, inwieweit die Voraussetzungen der normalen Dispersion erfüllt zu sein scheinen. Zeigt sich hierbei, dass die Dispersion ausgesprochen übernormal ist, so soll man mit Hilfe der Formeln (21) und (22) (bezw. (45)) die Grösse M und ihren mittleren Fehler berechnen.[1] Ist die Dispersion hingegen ausgesprochen unternormal, so lässt man es sein, da für den Fall der unternormalen Dispersion kein rationelles Mass vorliegt, welches ein allgemeines Interesse beanspruchen dürfte. Sieht, schliesslich, die Dispersion normal aus, so lässt sich eventuell ein Versuch machen, aufzuklären, inwieweit von dem äusseren Bilde einer normalen Dispersion auf die Erfüllung aller Voraussetzungen der normalen Dispersion geschlossen werden darf (cf. unten § IV).

III.

1) Die lebhafte Polemik, welche durch die BORTKIEWICZ'sche Untersuchung über »das Gesetz der kleinen Zahlen« ausgelöst worden ist, verleiht ein spezifisches Interesse der Frage, inwieweit bezw. unter welchen Voraussetzungen Schlüsse in Bezug auf den Charakter der Dispersion gezogen werden können, wenn man bloss über die Zahlen der Wiederholungen eines Ereignisses für eine Reihe von Versuchsserien verfügt, ohne die Zahlen der Versuche für die einzelnen Serien zu kennen.

[1] Da die allgemeinen Formeln (21) und (22) den Fall der normalen Dispersion mitumfassen, so kann man natürlich auch in der Weise vorgehen, dass man ohne weiteres die Grösse M berechnet und auf normale Dispersion schliesst, falls ihr Wert hinreichend gering im Vergleich zu ihrem mittleren Fehler ist. Der Umweg über die Formeln des § III, 2) des zweiten und namentlich des § II des dritten Kapitels hat jedoch den Vorteil, dass die Rechnungen sich einfacher gestalten, und dass solche Gruppen hinzugezogen werden können, die aus je einem Versuche bestehen.

Ob die Annahmen einer normalen Dispersion und gleich grosser Versuchszahlen für alle Serien mit der Erfahrung übereinstimmen, lässt sich in folgender Weise prüfen. Man bezeichne, wie oben (S. 26), die Zahl der Wiederholungen des Ereignisses für die i-te Serie mit w_i, die unbekannte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses mit p, die unbekannte, aber für alle Serien gleich grosse Zahl der Versuche mit n, und setze $\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} w_i = w_{(r)}$. Unter der Voraussetzung normaler Dispersion erhält man aus

$$E w_i = np,\ E w_i^2 = npq + n^2 p^2$$

genau

$$np = E w_{(r)},$$

$$npq = E \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} [w_i - np]^2 = E \frac{1}{r-1} \sum_{i=1}^{r} [w_i - w_{(r)}]^2$$

und näherungsweise

$$np = w_{(r)},$$

$$npq = \frac{1}{r-1} \sum_{i=1}^{r} [w_i - w_{(r)}]^2,$$

woraus:

$$q = 1 - p = \frac{\frac{1}{r-1} \sum_{i=1}^{r} [w_i - w_{(r)}]^2}{w_{(r)}},$$

(69) $$p = \frac{w_{(r)} - \frac{1}{r-1} \sum_{i=1}^{r} [w_i - w_{(r)}]^2}{w_{(r)}},$$

$$n = \frac{w_{(r)}^2}{w_{(r)} - \frac{1}{r-1} \sum_{i=1}^{r} [w_i - w_{(r)}]^2}$$

folgt.[1]

[1] Da man bei der obigen Bestimmung der Werte von p, q und n von

Erscheinen nun die auf diese Weise gefundenen Werte von p, q oder n aus irgend welchen Gründen unmöglich, so ist man gezwungen, die Annahmen, von welchen man ausgegangen ist, fallen zu lassen. Dies ist z. B. der Fall, wenn einer der Werte negativ ausfällt und die Abweichung von 0 zu gross ist, um auf zufällige Schwankungen zurückgeführt zu werden.

Dieses, von K. PEARSON und dessen Schülerin L. WHITAKER[1] in Vorschlag gebrachte Verfahren lässt sich systematisch ausbauen. Unter den Voraussetzungen der normalen Dispersion und gleicher Versuchszahlen kann man nämlich bei der Bestimmung der unbekannter Werte von p und von n nicht nur von den erwartungsmässigen Werten der ersten und der zweiten Potenzen von w_i ausgehen, sondern auch analoge Beziehungen für höhere Potenzen zu Grunde legen, d. h.

$$E\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} w_i^3 = n^3p^3 + 3n^2p^2q^2 + npq(q-p),$$

$$E\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} w_i^4 = n^4p^4 + 6n^3p^3q + n^2p^2q(7-11p) + npq(1-6pq)$$

u. s. w.

Man erhält auf diese Weise beliebig viele Gleichungen mit nur zwei Unbekannten: p und n. Trifft man hierbei

der Annahme der normalen Dispersion ausgeht, so hat man identisch

$$Q^2 = \frac{\frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r}[w_i - w_{(r)}]^2}{npq} = 1.$$

Diese Identität bleibt auch in dem Falle bestehen, wenn man, unter der Voraussetzung, dass $(np)_{n=\infty}$ einen endlichen Wert m annimmt, n unbegrenzt wachsen lässt. Hierbei bleibt Q^2 fortwährend identisch gleich 1, wogegen q der Einheit, als einem Grenzwerte zustrebt, so dass, bei $n = \infty$, $q = 1 = Q^2$ wird; solange aber dieser Grenzwert von q nicht erreicht wird, bleibt $q < 1$ und mithin $Q^2 > q$. Ein innerer Widerspruch der Art, wie ihn Prof. v. BORTKIEWICZ dem obigen Verfahren vorwirft (Realismus und Formalismus in der math. Statistik, S. 230), haftet somit gar nicht dem Wesen des Verfahrens an.

[1] Cf. L. WHITAKER, On the POISSON's law of small numbers Biometrika, vol. X; K. PEARSON, Skew variations in homogenous material, p. 347 (Phil. Trans., A, vol. 186).

auf keine Discrepanzen, die über die Grenzen des Zufälligen hinausgehen, so dürfen die Annahmen, von welchen man ausgegangen ist, als durch die Erfahrung bestätigt gelten. Sonst muss man sie, als nicht stichhaltig, fallen lassen.

Hat man Grund anzunehmen, dass die Wahrscheinlichkeit p so gering ist, dass w_i im Vergleich zu n ohne grösseren Fehler vernachlässigt werden darf, so lässt sich auch in einer einfacheren Weise prüfen, ob die Voraussetzungen zutreffend sind. Man kann nämlich das übliche Dormoy-Lexis'sche Kriterium anwenden, indem man von den Formeln (59) und (60) ausgeht bezw. den Wert des Divergenzcoeffizienten berechnet, der sich in diesem Falle feststellen lässt, ohne dass man die Zahl n zu kennen braucht. Dies ist das von Prof. v. Bortkiewicz für den Geltungsbereich des »Gesetzes der kleinen Zahlen» bevorzugte Verfahren. Dieses Verfahren besitzt den unbestreitbaren Vorteil einer grösseren Einfachheit. Es darf aber nicht übersehen werden, dass dasselbe in der Praxis stets, als ein Näherungsverfahren, auftritt, dessen Berechtigung auf der an ∞ grenzen sollenden Grösse der unbekannten Versuchszahl n beruht. Das Pearson-Whitaker'sche Verfahren hat hingegen den Vorzug, an keine weiteren Annahmen in Bezug auf die Grösse der unbekannten p und n gebunden und insoweit allgemeiner und prinzipiell strenger zu sein. In den Fällen, wo man a priori nicht sicher sein kann, dass n sehr gross ist, erscheint eine Nachprüfung der auf Grund von (59) und (60) erzielten Ergebnisse an der Hand des Pearson-Whitaker'schen Verfahrens keineswegs überflüssig: überzeugt man sich hierbei, dass n nicht gross sein kann, so soll man auf die Anwendung der Formeln (59) und (60) lieber verzichten.

2) Zeigt nun das eine oder das andere der obigen Verfahren, dass die ihnen zu Grunde liegenden Annahmen nicht aufrecht erhalten werden können, so entsteht die Frage, welche unter den Annahmen der Wirklichkeit widersprechen, — namentlich, ob die Unstimmigkeiten nicht allein darauf zurückzuführen sind, dass die Versuchszahlen der einzelnen Serien verschieden sind.

Bezeichnet man mit n_i die Zahl der Versuche der i-ten Serie, so hat man, wenn die Voraussetzungen der normalen Dispersion erfüllt sind,

$$E w_i = p n_i ,$$

$$E w_i^2 = p^2 n_i^2 + p q n_i .$$

Setzt man nun in der Formel (1) des ersten Kapitels

$$N = r, \quad \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} w_i = w_{(r)}, \quad \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} n_i = \frac{s}{r} = n_0 ,$$

$$m_1^{(i)} = p n_i, \quad m_2^{(i)} = p^2 n_i^2 + p q n_i, \quad \mu_2^{(i)} = p q n_i ,$$

$$m_{[1,r]} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} p n_i = p \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} n_i = p \frac{s}{r} = p n_0 ,$$

$$\mu_{[2,r]} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} p q n_i = p q \frac{s}{r} = p q n_0 ,$$

so erhält man genau

$$E w_{(r)} = E \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} w_i = p n_0 = \frac{1}{r} (p s) ,$$

$$(70) \quad E \frac{1}{r-1} \sum_{i=1}^{r} [w_i - w_{(r)}]^2 = p q n_0 + \frac{r}{r-1} p^2 \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} [n_i - n_0]^2 =$$

$$= \frac{1}{r} (p s) q + \frac{1}{r(r-1)} (p s)^2 \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} \left[\frac{n_i}{n_0} - 1 \right]^2$$

und näherungsweise

$$p n_0 = w_{(r)} ,$$

$$p q n_0 + \frac{r}{r-1} p^2 \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} [n_i - n_0]^2 = \frac{1}{r-1} \sum_{i=1}^{r} [w_i - w_{(r)}]^2 .$$

Man verfügt also über zwei Gleichungen mit drei Unbekannten — p, n_0 und $\frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} [n_i - n_0]^2$; durch Heranziehen der höheren Momente lässt sich die Lage gleichfalls nicht verbessern, da die Zahl der neu hinzukommenden Gleichungen nicht schneller wächst, als die Zahl der Unbekannten.

Ist jedoch p so klein, dass man, für $s = \infty$, $p\frac{s}{r} = m$ und $q = 1$ setzen darf, so hat man näherungsweise:

$$(71) \qquad \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} w_i = w_{(r)} = m,$$

$$(72) \qquad \frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r}[w_i - w_{(r)}]^2 = m + m^2 \frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{n_i}{n_0} - 1\right]^2,$$

woraus

$$\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{n_i}{n_0} - 1\right]^2 = \frac{\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}[w_i - w_{(r)}]^2 - \frac{(r-1)}{r} w_{(r)}}{w^2_{(r)}}$$

folgt. Im Geltungsbereiche des »Gesetzes der kleinen Zahlen» kann man somit auf diese Weise einen ungefähren Begriff davon gewinnen, wie gross die Unterschiede zwischen den Versuchszahlen sein müssen, damit die Dispersion für normal gehalten werden könne.[1]

[1] Aus (71) und (72) ergiebt sich:

$$(A) \qquad \frac{\frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r}[wi - w(r)]^2 - w(r)}{\sqrt{\frac{2}{r-1}}\,.\, m} = m\sqrt{\frac{1}{2(r-1)}}\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{ni}{n_0} - 1\right]^2$$

In ähnlicher Weise findet man aus (54), wenn n sehr gross ist und wi im Vergleich zu n vernachlässigt werden darf:

$$\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}[pi - p(r)]^2 = \frac{1}{n^2 r}\sum_{i=1}^{r}[wi - w(r)]^2 - \frac{r-1}{n^2 r}\,\frac{n}{n-1}\, w(r)$$

und

$$(B) \qquad \frac{\frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r}[wi - w(r)]^2 - w(r)}{\sqrt{\frac{2}{r-1}}\,.\, w(r)} = w(r)\sqrt{\frac{1}{2(r-1)}}\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{pi}{p(r)} - 1\right]^2$$

3) Ist die Zahl der Serien — r — hinreichend gross, so lässt sich eventuell ein tieferer Einblick in die Dispersionsverhältnisse dadurch gewinnen, dass man die Serien zu je zwei (bezw. je drei u. s. w.) in zufälliger Weise zusammenschlägt. Bezeichnet man mit w'_j die Zahl der Wiederholungen des Ereignisses für die j-te der neuen $\frac{r}{2}$ Serien und mit n'_j die Zahl der betr. Versuche, so hat man

$$E\sum_{j=1}^{r/2}[n'_j - n'_0]^2 = E\sum_{i=1}^{r}[n_i - n_0]^2$$

und erhält eine dritte approximative Gleichung, welche keine neuen Unbekannten enthält, nämlich:

$$\frac{1}{r-2}\sum_{j=1}^{r/2}\left[w'_j - \frac{2}{r}\sum_{j=1}^{r/2} w'_j\right]^2 = p q n_0 + \frac{r}{r-2}\, p^2 \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}[n_i - n_0]^2 .$$

Wenn die Dispersion normal ist, d. i. alle p_i unter einander gleich und die Einzelversuche von einander unabhängig sind, und wenn ausserdem die n_i Werte gleich sind, ist die mathematische Erwartung der Differenz $\frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r}[w_i - w(r)]^2 - w(r)$ gleich 0; durch den Quotienten derselben in ihren mittleren Fehler, der gleich $m\sqrt{\frac{2}{r-1}}$, bezw. $w(r)\sqrt{\frac{2}{r-1}}$, gesetzt wird, wird die Wahrscheinlichkeit gemessen, dass die Abweichung der obigen Differenz von 0 den Spielraum der zufälligen Schwankungen übersteigt. Die Formeln A und B zeigen, dass in dem Falle, wenn die p_i-Werte oder die n_i-Werte untereinander verschieden sind, dieser Quotient um so geringer ausfällt, je geringer m, bezw. $w(r)$, ist. Durch das übliche Forschungsverfahren werden somit Abweichungen im Verhalten der empirischen Zahlenreihe von den Erwartungen, welche sich aus den zu kontrollierenden Annahmen ergeben, um so mehr verdeckt, je geringer die durchschnittliche Wiederholungszahl des Ereignisses ist. Gleich grosse Ungleichheiten zwischen den $\frac{p_i}{p(r)}$-Werten brauchen eine um so grössere Serienzahl r, um merkbar zu werden, je geringer $w(r)$ ist. Dies dürfte wohl einer der Hauptgründe dafür sein, dass man im Geltungsbereiche des »Gesetzes der kleinen Zahlen« relativ häufig eine Dispersion trifft, welche an der Hand des üblichen Forschungsverfahrens von der normalen nicht zu unterscheiden ist.

IV.

Besonders lehrreich kann sich das Heranziehen der höheren Potenzen der w_i-Zahlen bei den Dispersionsuntersuchungen dann gestalten, wenn die Versuchszahlen n_i bekannt sind.

Geht man hierbei von dem stochastischen Schema des dritten Kapitels aus, so lässt sich auf diesem Wege ein tieferer Einblick in die Verteilung der p_i-Werte gewinnen, indem, ausser dem Näherungswerte von $\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}[p_i - p_{(r)}]^2$, auch Näherungswerte der höheren Momente der apriorischen p_i-Werte berechnet werden.

In ähnlicher Weise lässt sich gleichfalls jedes andere stochastische Schema behandeln.

Gelingt es hierbei, eine Anzahl von Gleichungen aufzustellen, welche die Zahl der das Schema charakterisierenden unbekannten Parameter übersteigt, so kommt man in die Lage, nicht nur die Werte der Constanten festzustellen, welche das empirische Material mit dem betr. Schema in Einklang setzen, sondern auch zu prüfen, ob sich das Material in das Schema widerspruchslos hineinzwingen lässt. Am einfachsten gestaltet sich die Prüfung eben für das Schema der normalen Dispersion, da man in diesem Falle bloss mit einer unbekannten Grösse — der allen w_i-Werten zu Grunde liegenden Wahrscheinlichkeit p — zu tun hat. Es genügt ja oft unter diesen Umständen die Berechnung von $\frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r} n_i\left[\frac{1}{n_i}w_i - \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{r} w_j\right]^2$, um die Unanwendbarkeit des Schemas nachzuweisen: ist nämlich die Differenz zwischen

$$\frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r} n_i\left[\frac{1}{n_i}w_i - \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{r} w_j\right]^2 \quad \text{und} \quad \frac{1}{s-1}\left[\sum_{i=1}^{r} w_i\right]\left[1 - \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{r} w_i\right]$$

(bezw. die Differenz $Q^2 - 1$) grösser, als es ihrem mittleren Fehler entspricht, so lässt sich die Annahme nicht aufrechterhalten, dass die Voraussetzungen der normalen Dispersion tatsächlich erfüllt sind. Man erhält also eine definitive ver-

neinde Antwort auf die Frage, ob das Schema der normalen Dispersion zur Erklärung des Verhaltens der empirischen Zahlen herangezogen werden darf.

Fällt hingegen die Antwort bejahend aus, so kann sie, wie wir oben gesehen haben (S. 36 ff.), nicht ohne weiteres, als definitiv gelten: es bleibt stets die Möglichkeit bestehen, das Verhalten der empirischen Zahlen auf andere stochastische Schemata zurückzuführen. Verlangt man grössere Sicherheit, so bleibt kein anderer Weg offen, als eben die höheren Momente heranzuziehen, falls man sich im Rahmen der stochastischen Behandlung der gegebenen empirischen Zahlenreihe halten soll. Diesen Weg einzuschlagen, lohnt es sich freilich bloss, wenn die Zahl der Serien — r — hinreichend gross ist.

V.

Die stochastische Behandlung einer statistischen Zahlenreihe hat den Zweck, von den empirisch-»zufälligen» Zahlenwerten zu den ihnen zu Grunde liegenden »apriorischen Voraussetzungen» vorzudringen und dieselben, soweit es geht, zu entschleiern. Das nächste Ziel, das man sich hierbei vorsetzt, ist, die allgemeine Form des stochastischen Schemas, auf welches das Verhalten der empirischen Zahlen zurückgeführt werden kann, klarzulegen. An die Seite dieser »qualitativen» Aufgabe stellt sich dann die entsprechende »quantitative», — die das betreffende Schema näher charakterisierenden Constanten mehr oder weniger genau zahlenmässig zu bestimmen.

Die ursprüngliche Fragestellung bei Dormoy und bei Lexis, die in der Unterscheidung der normalen, der übernormalen und der unternormalen Dispersion gipfelt, betont mehr die »qualitative» Seite des Problems. Die »quantitative» Seite blieb zunächst so gut, wie unbeachtet. Dies ist ohne weiteres begreiflich. Im Falle der normalen Dispersion reduziert sich das »Quantitative» auf die Bestimmung der Grundwahrscheinlichkeit p, falls die Versuchszahlen, wie stets bei Lexis, als bekannt gelten, — auf ein Problem mithin, das wegen seiner statistischen Alltäglichkeit, so zu sagen, im Vorbeigehen gelöst wird, ohne die Aufmerksamkeit auf seine

Eigenart zu ziehen. Und für die Fälle der übernormalen, sowie der unternormalen Dispersion verfügte man damals nicht über passende stochastische Schemata, deren zahlenmässiges Ausfüllen, als ein Problem für sich, erscheinen könnte.

In LEXIS' späterem Werk kommt die quantitative Forschungsrichtung zu ihren Rechten. Seine Theorie des Fehlerexcedenten geht bei der Behandlung der übernormalen Dispersion von einem bestimmten stochastischen Schema aus — dem Schema des dritten Kapitels dieser Abhandlung — und lässt in der »wesentlichen Schwankungscomponente» die wichtigste zahlenmässige Charakteristik des gewählten Schemas — den mittleren Fehler der Wahrscheinlichkeiten p_i — neben ihren Durchschnitt ($p_{(r)}$) in den Vordergrund treten. In gleicher Weise kann man von der allgemeineren Form desselben stochastischen Schemas ausgehen, die den Berechnungen des zweiten Kapitels dieser Abhandlung zu Grunde liegt, und $m_{[1,r]}$ sowohl, wie $\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}[m_1^{(i)} - m_{[1,r]}]^2$, näherungsweise zu bestimmen suchen.

Man kann auf demselben Wege einen oder mehrere Schritte weiter gehen und höhere Momente der Grössen p_i (bezw. $m_1^{(i)}$) auf Grund der empirischen z_i-Werte zu berechnen suchen, um auf diese Weise eine tiefere Kenntnis der p_i (bezw. $m_1^{(i)}$)-Grössen zu erlangen. Die Aufgabe bleibt ihrem Wesen nach genau dieselbe, wie bei der Berechnung der LEXIS'schen »wesentlichen Schwankungscomponente».

Auf gleichem Boden bleibt man auch, wenn man die Versuchszahlen, als unbekannt, betrachtet und unter Zugrundelegung eines bestimmten stochastischen Schemas — namentlich unter der Annahme der normalen Dispersion — Aufschlüsse über sie zu erhalten strebt. Diese Aufgabe ist gleichfalls ihrem Wesen nach stochastisch, und die Fragestellung, obgleich sie der PEARSON'schen Schule entstammt, fällt durchaus nicht aus dem Rahmen der Dispersionsuntersuchungen der LEXIS'schen Richtung.[1]

[1] In dieser Beziehung kann ich mich an Prof. v. BORTKIEWICZ nicht anschliessen, der von einem »gegensätzlichen Verhältnisse» der PEARSON-WHITAKER'schen Methode (vgl. oben S. 42 ff.) zu dem von ihm selbst be-

Wird nun das gewählte stochastische Schema durch die Bestimmung der Näherungswerte der sie charakterisierenden Constanten ausgefüllt, so ist die stochastische Behandlung des statistischen Zahlenmaterials am Ende: ihr Leistungsvermögen ist hiermit erschöpft und ihre Aufgabe erfüllt. Bei der Wahl der stochastisch zu bestimmenden Parameter kann man sich durch verschiedene Gesichtspunkte leiten lassen. Geht man etwa von dem Schema des zweiten Kapitels dieser Abhandlung aus unter Voraussetzung, dass die n_i-Zahlen bekannt sind, so kann, als Aufgabe der stochastischen Behandlung der z_i-Werte, die Bestimmung der Näherungswerte der einzelnen $m_1^{(i)}$-Grössen betrachtet werden. Anderseits kann man die Näherungswerte gewisser Funktionen derselben — des mittleren Fehlers, der höheren Momente — zu bestimmen suchen, — mit aus dem Grunde, dass die Spielräume der zufälligen Schwankungen für die einzelnen $m_1^{(i)}$-Grössen zu gross sind. Man kann ferner in das stochastische Ausgangsschema die Annahme einer bestimmten Form des Verteilungsgesetzes der $m_1^{(i)}$-Werte aufnehmen und die Bestimmung der Näherungswerte der Constanten dieses Gesetzes als die eigentliche Aufgabe der stochastischen Behandlung des statistischen Zahlenmaterials betrachten. Das supponierte Gesetz kann hierbei sowohl die Form eines »Verteilungsgesetzes» im Sinne der Häufigkeitscurve, d. i. eines analytischen Ausdrucks für den Zusammenhang zwischen der Grösse und der relativen Anzahl der $m_1^{(i)}$-Werte, haben, wie auch die Form eines analytischen Ausdrucks für den Zusammenhang zwischen der Grösse von $m_1^{(i)}$ und der Ordnungsnummer i annehmen, wie in den meisten Fällen der Interpolation nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Bei einer solchen Fragestellung greifen stochastische und interpolatorische Aufgaben unmittelbar ineinander, und das »Gesetz», dem die $m_1^{(i)}$-Grössen folgen, erscheint, als fertiges Product der stochastischen Bearbeitung des Zahlenmaterials. Dies ist das gemeinsame Kennzeichen der Interpolation nach der Methode der kleinsten Quadrate, des interpolatorischen

vorzugten Verfahren (Realismus und Formalismus, S. 227), ja sogar von einem neuen geradezu revolutionären Prinzip der schematischen Bestimmung der Grundzahl» (ibid., S. 239) spricht.

Verfahrens von CAUCHY, der PEARSON'schen Methoden der Frequenzcurvenberechnung u. s. w.

Die stochastische Behandlung des Zahlenmaterials lässt sich aber wohl von interpolatorischen Nebenabsichten ganz frei halten, indem man keine Annahmen über die Form des »Gesetzes» der $m_1^{(i)}$-Werte in das stochastische Ausgangsschema aufnimmt. Dann trennen sich die stochastischen und die interpolatorischen Aufgaben scharf von einander. Als Endzweck der stochastischen Arbeit erscheint dann eben die Bestimmung der Näherungswerte von $m_{[1,r]}$ von $\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}[m_1^{(i)} - m_{[1,r]}]^2$ u. s. w., und, als eine gesonderte Aufgabe für sich, lässt sich eventuell die Bestimmung des Verteilungsgesetzes von $m_1^{(i)}$ auf Grundlage der stochastisch bestimmten Näherungswerte einer Reihe von Momenten derselben betrachten. Dieses »problème des moments», wie es im Anschluss an STIELTJES[1] genannt werden mag, hat an sich mit der Stochastik nichts gemein: die Wege, die hier zu Lösungen führen, halten sich von der Wahrscheinlichkeitsrechnung fern. Aber die Ergebnisse, die auf diesem eigenartigen Gebiete einer Interpolationsrechnung, welche auf willkürliche Voraussetzungen verzichtet, erzielt werden, sind von allergrösstem Werte für den Ausbau der stochastischen Theorie der Statistik: es sei hier bloss an die grundlegenden TCHEBYCHEFF'schen Ungleichheiten[2] erinnert.

[1] Cf. STIELTJES, Recherches sur les fractions continues (Annales de la faculté de Toulouse, 1894).

[2] Cf. TCHEBYCHEFF, Oeuvres, t. II, p. 478 (russische Auflage): Wenn eine Funktion $f(x)$ stets positiv bleibt und

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2i-1} f(x)dx = 0 \text{ für } i = 1, 2, \ldots m,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2i} f(x)dx = \frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{q^{2i}} \text{ für } i = 1, 2, \ldots (m-1),$$

Das Fernhalten der Interpolationsrechnungen ist ein Kennzeichen der stochastischen Arbeiten der sozialwissenschaftlich orientierten Lexis'schen Richtung. Ein lebhaftes Interesse für die Auffindung der »Gesetze« kennzeichnet die an den Naturwissenschaften orientierte Pearson'sche Schule. In der Beurteilung des Erkenntniswertes der interpolatorisch zu erzielenden Ergebnisse gehen die beiden Richtungen zweifellos ziemlich weit auseinander. Soweit aber die Arbeiten der Pearson'schen Schule den stochastischen Boden nicht verlassen, darf m. E. von einem tieferen Gegensatz zur Lexis'schen Richtung nicht gesprochen werden. Unterschiede — und zwar zum Teil schwerwiegende — sind gewiss vorhanden. Die Vertreter der englischen Schule haben von Anbeginn in ihren stochastischen Untersuchungen das Quantitative in den Vordergrund geschoben, ohne sich um die qualitativen Voraussetzungen der auszuführenden Messungen in erforderlichem Masse zu kümmern. Viel Unheil ist ferner durch die Abneigung der englischen Forscher gegen die Begriffe der mathematischen Wahrscheinlichkeit und der mathematischen Erwartung gestiftet worden: der Verzicht auf den Gebrauch dieser Grundbegriffe hat der Klarheit der stochastischen Fragestellungen ungemein geschadet, — ja gelegentlich die Lösungsversuche auf Irrwege gelenkt. Legt man jedoch das, dem kontinentalen Auge nicht zusagende Gewand ab und holt, wo dies erforderlich ist, das Versäumte nach, so zeigt sich deutlich, dass Pearson und Lexis zur Lösung wesens-

so ist $\int_{-\infty}^{r} f(x)\,dx$ in den Grenzen

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{q\frac{r}{\sqrt{2}}} e^{-x^2}dx \pm \frac{3\sqrt{3}\,[m^2-2m+3] : [q^2r^2+1]}{2\,[m-3]^2\sqrt{m-1}}$$

enthalten. Mit wachsendem m streben die beiden Grenzen demselben Grenzwerte $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{q\frac{r}{\sqrt{2}}} e^{-x^2}dx$ zu, und die Verteilung unterscheidet sich somit bei $m = \infty$ nicht von der Gauss'schen.

verwandter stochastischer Aufgaben der Form nach oft verschiedene, aber im Grunde doch wesensverwandte Verfahren einschlagen. Als eine der wichtigsten Aufgaben der aufblühenden stochastischen Theorie der Statistik erscheint gegenwärtig eben, das von beiden Förderern derselben Erzielte zu einer die Gegensätze aufhebenden Synthese zu verarbeiten. Nicht »LEXIS gegen PEARSON», sondern »PEARSON durch LEXIS geläutert, LEXIS durch PEARSON bereichert» sollte gegenwärtig die Parole derer lauten, die, von der geistlosen Empirie der nachqueteletistischen Statistik unbefriedigt, sich nach einer rationellen Theorie der Statistik sehnen.[1]

[1] Die obigen Betrachtungen sind im Anschluss an den scharfen Angriff formuliert worden, den Prof. v. BORTKIEWICZ gegen die PEARSON'sche Richtung in der Abhandlung »Realismus und Formalismus in der math. Statistik» gerichtet hat. Was »den tiefen Gegensatz der beiden (i. e. der realistischen und der formalistischen) Richtungen» anbelangt, so will ich ihn keineswegs in Abrede stellen, falls unter Formalismus »diejenige Richtung in der math. Statistik, welche in der Auffindung descriptiver Formeln die Hauptaufgabe der Wissenschaft erblickt» (Real. u. Form , S. 245), verstanden werden soll, und nichts liegt mir ferner, als für einen derartigen »Formalismus» eintreten zu wollen. Ich glaube aber, dass der Boden dieser Definition verlassen wird, wenn z. B. das »schematische» PEARSON-WHITAKER'sche Verfahren zur Bestimmung der Versuchszahl ohne weiteres, als formalistisch, dem von BORTKIEWICZ bevorzugten »realistischen» Verfahren gegenüber gestellt wird (S. 252). BORTKIEWICZ tut L. WHITAKER Unrecht, wenn er ihre Untersuchung, als durch und durch »formalistisch» im obigen Sinne, brandmarkt (S. 245): die Abhandlung von L. WHITAKER enthält einen kräftigen »realistischen» Kern und stellt einen bedeutsamen Beitrag zur Dispersionstheorie dar. Was dann K. PEARSON selbst anbelangt, so wäre es vollends ungerecht, ihn zu den »Formalisten» zu rechnen aus dem Grunde, dass in seinem reichhaltigen »oeuvre» auch wertvolle Beiträge zur Lösung der »formalistischen» Interpolationsaufgaben enthalten sind.

The mean errors of the characteristics in logarithmic-normal distributions.

By **Sture Nydell**, Lund.

Introductory.

In his paper »On the genetic theory of frequency» (Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, Bd 12, N:o 20, and Meddelande från Lunds Astronomiska Observatorium N:o 83, 1917), Dr. Wicksell has determined the mean of the logarithm, l_0 and the dispersion, σ_l, assuming the logarithm normally distributed.

If, to make matters shorter, we make use of Napierian logarithms, the frequency function of the variate z will be

$$(1) \qquad F(z) = \frac{1}{\sigma_l \sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{\{{}^e\log(z-a) - l_0\}^2}{2\sigma_l^2}}}{z-a},$$

where, if m = mean of z, σ = dispersion, η = the real root of the equation

$$\eta^3 + 3\eta + 2S = 0$$

and S = skewness of z, we have,

$$a = m - \frac{\sigma}{\eta},$$

$$(2) \qquad l_0 = {}^e\log \frac{\sigma}{\eta\sqrt{1+\eta^2}},$$

(3) $$\sigma_l^2 = {}^e\log\,(1 + \eta^2).$$

Requested by Dr. Wicksell I have deduced expressions for the mean errors in l_0, σ_l, η, $\frac{1}{\eta}$, σ and S.

1. Mean error in the logarithmic mean l_0.

We have according to (2), after differentiation,

$$dl_0 = d\sigma \cdot \frac{1}{\sigma} - d\eta \left(\frac{1}{\eta} + \frac{\eta}{\eta^2 + 1}\right).$$

Using the relations

$$\sigma^2 = \nu_2,$$

$$S = -\frac{\nu_3}{2\,\sigma^3},$$

$$\eta^3 + 3\,\eta + 2\,S = 0,$$

where ν_2 and ν_3 are the moments of z about the mean m of the second and third order, we get by differentiation

$$d\sigma = \frac{d\,\nu_2}{2\,\sigma},$$

(4) $$d\eta = -\frac{2\,dS}{3\,(1 + \eta^2)},$$

(5) $$dS = -\frac{d\,\nu_3}{2\sigma^3} + \frac{3\,\nu_3\,d\,\nu_2}{4\,\sigma^5},$$

whence

$$d\eta = -\frac{2}{3\,(1 + \eta^2)}\left(\frac{3\,\nu_3\,d\,\nu_2}{4\,\sigma^5} - \frac{d\,\nu_3}{2\,\sigma^3}\right).$$

Inserting the expressions for $d\sigma$ and $d\eta$, we have

$$dl_0 = d\,\nu_2\left[\frac{1}{2\,\sigma^2} + \frac{\nu_3\,(1 + 2\,\eta^2)}{2\,\sigma^5\,\eta\,(1 + \eta^2)^2}\right] - d\,\nu_3\,\frac{1 + 2\,\eta^2}{3\,\sigma^3\,\eta\,(1 + \eta^2)^2}.$$

Denoting by ε_{l_0} the mean error of l_0 and by ε_{r_2}, ε_{r_3} and $r_{r_2 r_3}$ the mean errors and error-correlation of r_2 and r_3, we have according to the theory of mean errors,

$$\varepsilon_{l_0}^2 = \frac{1}{4\sigma^4}\left[1 + \frac{r_3(1+2\iota_{,}^2)}{\sigma^3\iota_{,}(1+\iota_{,}^2)^2}\right]^2 \cdot \varepsilon_{r_2}^2 + \frac{(1+2\iota_{,}^2)^2}{9\sigma^6\iota_{,}^2(1+\iota_{,}^2)^4} \cdot \varepsilon_{r_3}^2 -$$

$$- \frac{1+2\iota_{,}^2}{3\sigma^5\iota_{,}(1+\iota_{,}^2)^2}\left[1 + \frac{r_3(1+2\iota_{,}^2)}{\sigma^3\iota_{,}(1+\iota_{,}^2)^2}\right]\varepsilon_{r_2}\varepsilon_{r_3} r_{r_2 r_3}.$$

Putting $1 + \iota_{,}^2 = x$, the moments may be expressed in terms of σ and x. To this end we use the following relations, taken from »The genetic theory of frequency»,

$$r'_1 = m - a = e^{l_0 + \frac{\sigma^2_l}{2}}$$

$$r'_2 = r_2 + (m-a)^2 = e^{2l_0 + 2\sigma^2_l}$$

$$r'_3 = r_3 + 3r_2(m-a) + (m-a)^3 = e^{3l_0 + \frac{9}{2}\sigma^2_l}$$

$$r'_4 = r_4 + 4r_3(m-a) + 6r_2(m-a)^2 + (m-a)^4 = e^{4l_0 + 8\sigma^2_l}$$

$$r'_5 = r_5 + 5r_4(m-a) + 10r_3(m-a)^2 +$$
$$+ 10r_2(m-a)^3 + (m-a)^5 = e^{5l_0 + \frac{25}{2}\sigma^2_l}$$

$$r'_6 = r_6 + 6r_5(m-a) + 15r_4(m-a)^2 + 20r_3(m-a)^3 +$$
$$+ 15r_2(m-a)^4 + (m-a)^6 = e^{6l_0 + 18\sigma^2_l}$$

. . . .

$$r'_s = r_s + \binom{s}{1} r_{s-1}(m-a) + \binom{s}{2} r_{s-2}(m-a)^2 + \cdots +$$
$$+ \binom{s}{2} r_2(m-a)^{s-2} + (m-a)^s = e^{s l_0 + \frac{s^2}{2}\sigma^2_l}.$$

r'_s are the moments of z about the point $z = a$ and r_s the moments about the mean m.

Further we have

$$(6) \qquad \sigma_l^2 = {}^e\log\,(1 + \iota_l^2) = {}^e\log x,$$

and we get

$$e^{\sigma^2_l} = x,$$

$$e^{l_0} = \frac{\sigma}{\sqrt{x(x-1)}}.$$

Inserting these expressions in the above equations and solving with respect to ν'_2, ν'_3, ν'_4, ν'_5 and ν'_6 we find

$$\nu'_1 = 0$$

$$\nu'_2 = \frac{\sigma^2}{x-1}(x-1)$$

$$\nu'_3 = \frac{\sigma^3}{(x-1)^{\frac{3}{2}}}(x^3 - 3x + 2)$$

$$(7) \qquad \nu'_4 = \frac{\sigma^4}{(x-1)^2}(x^6 - 4x^3 + 6x - 3)$$

$$\nu'_5 = \frac{\sigma^5}{(x-1)^{\frac{5}{2}}}(x^{10} - 5x^6 + 10x^3 - 10x + 4)$$

$$\nu'_6 = \frac{\sigma^6}{(x-1)^3}(x^{15} - 6x^{10} + 15x^6 - 20x^3 + 15x - 5)$$

. . . .

$$\nu'_s = \frac{\sigma^s}{(x-1)^{\frac{s}{2}}}\left[\sum_{k=0}^{s-2}\left\{(-1)^k \binom{r}{k} x^{\frac{(s-k)(s-k-1)}{2}}\right\} + (-1)^{s-1}(s-1)\right].$$

With the aid of the well known formulae, (Biometrika Vol. 2, 1902—1903, p. 273),

$$(8) \qquad \varepsilon^2_{\nu_2} = \frac{\nu'_4 - \nu'^2_2}{N},$$

$$\varepsilon_{r_3}^2 = \frac{r_6 - 6\, r_4\, r_2 - r_3^2 + 9\, r_2^3}{N},$$

$$\varepsilon_{r_2}\, \varepsilon_{r_3}\, r_{r_2 r_3} = \frac{r_5 - 4\, r_3\, r_2}{N},$$

where N is the number of observations, we find, inserting the above expressions for the moments,

$$\varepsilon_{r_2}^2 = \frac{\sigma^4}{(x-1)^2 N}(x^6 - 4\,x^3 - x^2 + 8\,x - 4),$$

$$\varepsilon_{r_3}^2 = \frac{\sigma^6}{(x-1)^3 N}(x^{15} - 6\,x^{10} - 6\,x^7 + 20\,x^6 + 30\,x^4 -$$

$$- 39\,x^3 - 72\,x^2 + 108\,x - 36),$$

$$\varepsilon_{r_2}\, \varepsilon_{r_3}\, r_{r_2 r_3} = \frac{\sigma^5}{(x-1)^{\frac{5}{2}} N}(x^{10} - 5\,x^6 - 4\,x^4 + 14\,x^3 +$$

$$+ 12\,x^2 - 30\,x + 12).$$

We are now able to express ε_{l_0} in x. After some reductions we get

$$\varepsilon_{l_0}^2 = \frac{1}{36\,N} \cdot \frac{1}{(x-1)^6}(16\,x^{15} - 48\,x^{14} + 52\,x^{13} - 96\,x^{12} + 184\,x^{11} -$$

$$- 39\,x^{10} - 186\,x^9 + 219\,x^8 - 684\,x^7 + 1322\,x^6 - 396\,x^5 -$$

$$- 1786\,x^4 + 2724\,x^3 - 1795\,x^2 + 594\,x - 81),$$

or in terms of η

$$\varepsilon_{l_0}^2 = \frac{1}{36\,N} \cdot \frac{1}{\eta^2}(24 + 324\,\eta^2 + 1836\,\eta^4 + 5370\,\eta^6 + 9588\,\eta^8 +$$

$$+ 10521\,\eta^{10} + 7456\,\eta^{12} + 3492\,\eta^{14} + 1060\,\eta^{16} + 192\,\eta^{18} + 16\,\eta^{20}).$$

In most cases η is about 0,5. Even if the skewness is as great as -1, η does not exceed 0,5561. Thus we are allowed to neglect higher powers of η. Neglecting η^{12} and higher powers of η and writing

$$\varepsilon_{l_0}^2 = \frac{1}{6N}\left(\frac{4}{u} + 54 + 306\,u + 895\,u^2 + 1598\,u^3 + \right.$$

$$\left. + 1753{,}5\,u^4 + 1242{,}7\,u^5\right),$$

where

$$u = r_l^2,$$

we get an approximation sufficient in practical applications. Indeed the term $1242{,}7\,u^5$ will generally be small and can also be neglected.

Thus we finally have

$$(9)\quad \varepsilon_{l_0} = \sqrt{\frac{1}{6N}\left(\frac{4}{u} + 54 + 306\,u + 895\,u^2 + 1598\,u^3 + 1753{,}5\,u^4 + 1242{,}7\,u^5\right)}\,.$$

2. **Mean error in the logarithmic dispersion σ_l.**

Differentiating (6) we get

$$d\sigma_l = \frac{r_l\,d\,r_l}{\sigma_l(1 + r_l^2)}\,.$$

But as

$$d\,r_l = -\frac{2\,dS}{3\,(1 + r_l^2)}$$

we have

$$d\sigma_l = -\frac{2\,r_l\,dS}{3\,\sigma_l(1 + r_l^2)^2}\,.$$

Hence it follows, that

$$\varepsilon_{\sigma l}^2 = \frac{4\,r_l^2\,\varepsilon_S^2}{9\,(1 + r_l^2)^4\,\sigma_l^2}\,.$$

Proceeding in the same manner with (5), we get, after having introduced the expressions previously given for the mean errors and error-correlation of r_2 and r_3, the square mean error in S

$$\varepsilon_S^2 = \frac{4\, r_6\, r_2^2 - 12\, r_5\, r_3\, r_2 - 3\, r_4 (8\, r_2^3 - 3\, r_3^2) + 35\, r_3^2\, r_2^2 + 36\, r_2^5}{16\, N\, r_2^5}.$$

Inserting the values of the moments expressed in x, it may be written

$$\varepsilon_S^2 = \frac{1}{16\, N} \cdot \frac{x^4}{(x-1)^5} (4\, x^{13} - 8\, x^{12} + 4\, x^{11} - 12\, x^{10} + 12\, x^9 +$$

$$+ 21\, x^8 - 12\, x^7 + 6\, x^6 - 84\, x^5 + 68\, x^4 + 80\, x^3 - 130\, x^2 + 60\, x - 9),$$

and returning to η,

$$\varepsilon_S^2 = \frac{3\,(1+\eta^2)^4}{16\, N} (8 + 106\, \eta^2 + 332\, \eta^4 + 479\, \eta^6 + 404\, \eta^8 + 216\, \eta^{10}) +$$

$$+ \frac{\eta^{12} (1+\eta^2)^4 (55 + 11\, \eta^2 + \eta^4)}{4\, N}.$$

Referring to the former conclusions concerning the higher powers of η, we omit the second term in the expressions for ε_S^2.

Thus

$$\varepsilon_S = \frac{(1+u)^2}{4} \sqrt{\frac{3}{N} (8 + 106\, u + 332\, u^2 + 479\, u^3) + \frac{3\, R}{N}},$$

where $R = 404\, u^4 + 216\, u^5$.

Using this value of ε_S, we get

$$(10) \qquad \varepsilon_{\sigma_l} = \frac{1}{\sigma_l} \sqrt{\frac{u}{12\, N} (8 + 106\, u + 332\, u^2 + 479\, u^3) + \frac{u\, R}{12\, N}}.$$

3. Mean errors in η and $\frac{1}{\eta}$.

From (4) it follows that

$$\varepsilon_\eta = \frac{4}{9\,(1+\eta^2)^2}\, \varepsilon_S$$

or

$$(11) \quad \varepsilon_{\eta} = (1+u) \sqrt{\frac{1}{12N}(8 + 106\,u + 332\,u^2 + 479\,u^3) + \frac{R}{12N}} \cdot$$

Putting

$$\zeta = \frac{1}{\eta},$$

we have

$$d\zeta = -\frac{d\eta}{\eta^2} \cdot$$

The mean error of ζ is then given by the equation

$$\varepsilon_{\zeta} = \frac{1}{\eta^2} \cdot \varepsilon_{\eta},$$

which gives

$$(12) \quad \varepsilon_{\zeta} = \frac{1+u}{u} \sqrt{\frac{1}{12N}(8 + 106\,u + 332\,u^2 + 479\,u^3) + \frac{R}{12N}} \cdot$$

R has here the same meaning as before.

As

$$\zeta = \frac{1}{\eta} = \frac{m-a}{\sigma},$$

it is seen that ζ measures the distance between the mean m and the origin a in the ordinary dispersion σ as unit.

Results.

In the preceding demonstration we have for the sake of simplicity made use of Napierian logarithms. In practice, however, ordinary logarithms will be employed. In this case the formulae are, if l'_0 = the mean and $\sigma_{l'}$ = the dispersion of the ordinary logarithms,

$$(1') \qquad F'(z) = \frac{\log e}{\sigma_l \sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{\{\log(z-a) - l_0\}^2}{2\sigma_l^2}}}{z-a} .$$

$$(2') \qquad l_0 = \log \frac{\sigma}{\nu \sqrt{1+\nu^2}} ,$$

$$(3') \qquad \sigma_l^2 = \log e \,.\, \log(1+\nu^2) ,$$

$\varepsilon_{l_0} = \log e$.

$$(9') \qquad \cdot \sqrt{\frac{1}{6N}\left(\frac{4}{u} + 54 + 306u + 895u^2 + 1598u^3 + 1753{,}5u^4 + 1242{,}7u^5\right)} ,$$

$$(10') \qquad \varepsilon_{\sigma_l} = \frac{(\log e)^2}{\sigma_l} \sqrt{\frac{u}{12N}(8 + 106u + 332u^2 + 479u^3) + \frac{uR}{12N}} ,$$

$$(11) \qquad \varepsilon_\eta = (1+u) \sqrt{\frac{1}{12N}(8 + 106u + 332u^2 + 479u^3) + \frac{R}{12N}} ,$$

$$(12) \qquad \varepsilon_\zeta = \frac{1+u}{u} \sqrt{\frac{1}{12N}(8 + 106u + 332u^2 + 479u^3) + \frac{R}{12N}} .$$

$$R = 404u^4 + 216u^5 \, *$$

and the mean errors in the mean, dispersion and skewness of the original variate are

$$(13) \qquad \varepsilon_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} ,$$

$$(14) \qquad \varepsilon_\sigma = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{1}{N}(2 + 16u + 15u^2 + 6u^3 + u^4)} ,$$

$$(15) \qquad \varepsilon_S = \frac{(1+u)^2}{4} \sqrt{\frac{3}{N}(8 + 106u + 332u^2 + 479u^3) + \frac{3R}{N}} .$$

The value of ε_m is the usual mean error of the arithmetical mean and ε_σ is obtained, if the expressions for ν_4 and ν_2 in terms of x are inserted in equation 8.

* The wished number of significative figures in the mean errors may decide, if terms involving R ought to be included or not.

Applications.

1. Distribution of the age of spinsters marrying bachelors in Sweden 1910. *Bidrag till Sveriges officiella statistik. A. Befolkningsstatistik N. F. 52. 1910.* (Example 3 in »The genetic theory of frequency»). The values found in the cited paper are

$$l'_0 = 1{,}0500$$

$$\sigma_{l'} = 0{,}1808$$

$$N = 30015$$

$$\eta = 0{,}4312$$

$$\zeta = 2{,}3190.$$

For the mean errors we find with the aid of our formulae the following values:

without $1242{,}7\,u^5$	$\varepsilon_{l_0} = 0{,}01357$	with $1242{,}7\,u^5$	0,01358		
without R	$\varepsilon_{\sigma_{l'}} = 0{,}004873$	with $404\,u^4$	0,004901	with R	0,004904
»	$\varepsilon_{\eta} = 0{,}01285$	»	0,01292	»	0,01293
»	$\varepsilon_{\zeta} = 0{,}06909$	»	0,06948	»	0,06952

For the original variate we have:

$$m = 25{,}808 \qquad \sigma = 5{,}270 \qquad S = -0{,}6869,$$

with the mean errors:

$$\varepsilon_m = 0{,}03042 \qquad \varepsilon_\sigma = 0{,}03578 \qquad \varepsilon_S = 0{,}02300.$$

2. Distribution of »full pay» sickness for the Manchester Union corrected for age, given by Dr. Snow: *Some statistical problems by Sickness and Mortality data of certain friendly societies.* Journ. Roy. Stat. Soc. LXXVI, p. 445 ff. (Ex. 5 in »The genetic theory of frequency»).

The values of the characteristics are

$$l_0 = 1{,}5431$$
$$\sigma_l = 0{,}1863$$
$$N = 601$$
$$\eta = 0{,}4507$$
$$\zeta = 2{,}2187.$$

The mean errors are found to be:

without	$1242{,}7\, u^5$	$\varepsilon_{l_0} = 0.09947$	with $1242{,}7\, u^5$	0,09959		
without	R	$\varepsilon_{\sigma_l} = 0{,}03694$	with $404\, u^4$	0,03720	with R	0,03723
»		$\varepsilon_{\eta} = 0{,}09739$	»	0,09809	»	0,09817
»		$\varepsilon_{\zeta} = 0{,}4794$	»	0,4829	»	0,4832

For the original variate we have:

$$m = 101{,}56 \qquad \sigma = 17{,}24 \qquad S = -0{,}705,$$

with the mean errors:

$$\varepsilon_m = 0{,}7032 \qquad \varepsilon_\sigma = 0{,}8556 \qquad \varepsilon_S = 0{,}1772.$$

Sur la loi des erreurs.

Par **Alf Guldberg.**

Dans son traité: Calcul des Probabilités M. LOUIS BACHELIER introduit la conception des probabilités continues et donne une série des appliquations de cette nouvelle conception.

Dans les lignes qui suivent je montrerai comme on peut en se servir de procédé de M. BACHELIER[1] déduire la loi des erreurs d'observation.

Nous supposerons une suite d'observations en nombre très grand d'une même grandeur, de telle sorte que la succession de ces observations puisse être considérée comme continue et que chaque observation puisse être considérée comme un élément.

S'il s'agit d'un très grand nombre n d'observations on peut supposer que celles-ci se suivent à intervalles de temps infiniment petits egaux et considerer la variable n comme représentant le temps total.

Nous supposerons encore que les erreurs commises par les observations soient continues.

Soit $\omega(n_1, z)dz$ la probabilité pour que à la $n_1$ième observation l'erreur commise soit comprise entre z et $z + dz$.

Soit encore $\varphi(\varepsilon, z, n_1 + dn)d\varepsilon$ la probabilité pour que l'erreur augmente de la quantité ε pendant l'intervalle d'observation $n_1, n_1 + dn$ quand on sait que l'erreur était z à la $n_1$ième observation.

Nous supposons que φ dépend seulement de ε et $n_1 + dn$, φ indépendant de z et des erreurs anterieures de $n_1$ième observation.

[1] Voir p. ex. BACHELIER, l. c. p. 157 et p. 323.

La probabilité pour que l'erreur soit $z+\varepsilon$ à la $n_1+dn^{\text{ième}}$ observation ayant été z à la $n_1^{\text{ième}}$ observation est, en vertu du principe des probabilités composées

$$\omega(n_1 z)\zeta(\varepsilon, n_1+dn)\,dz\,d\varepsilon. \qquad (1)$$

Posons

$$n_1+dn=n \text{ et } z+\varepsilon=x$$

d'où $dz=dx$, ε regardé comme constant, l'expression (1) devient

$$\omega(n-dn, x-\varepsilon)\zeta(n,\varepsilon)\,dx\,d\varepsilon.$$

La probabilité de l'erreur x à la $n^{\text{ième}}$ observation s'obtient, d'après le principe des probabilités totales, en intégrant l'expression précédente pour toutes les valeurs de ε. Cette probabilité a aussi pour expression $\omega(n,x)\,dx$, on a donc

$$\omega(n,x)=\int \omega(n-dn, x-\varepsilon)\zeta(n,\varepsilon)\,d\varepsilon.$$

Developpons l'élément de l'intégrale en supposant dn infiniment petit et négligeant les puissances de ε supérieures à la second, l'equation s'écrit

$$\omega(n,x)=\left[\omega(n,x)-\frac{\partial\omega}{\partial n}dn\right]\int\zeta(n,\varepsilon)\,d\varepsilon -$$

$$-\frac{\partial\omega}{\partial x}\int\varepsilon\zeta(n,\varepsilon)\,d\varepsilon+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\int\varepsilon^2\zeta(\varepsilon, n)\,d\varepsilon.$$

On a alors

$$\int\zeta(n,\varepsilon)\,d\varepsilon=1.$$

L'intégrale

$$\int\varepsilon\zeta(n,\varepsilon)\,d\varepsilon$$

est la valeur moyenne de ε pendant l'intervalle d'observation $n-dn$, n, désignons cette integrale par

$$-\psi'(n)\,dn.$$

L'intégrale

$$\int \varepsilon^2 \varphi(n,\varepsilon)\,d\varepsilon$$

est la valeur moyenne de ε^2 pendant l'intervalle d'observation $n-dn$, n, designons cette integrale par

$$\frac{\varphi'(n)}{2}\,dn.$$

On aura donc l'équation:

$$\frac{\varphi'(n)}{4}\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\psi'(n)\frac{\partial\omega}{\partial x}-\frac{\partial\omega}{\partial n}=0. \tag{2}$$

Si l'on pose

$$x=\xi+\psi(n),\ t=\frac{\varphi(n)}{a^2}$$

a un constant, on aura:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=\frac{\partial\omega}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\partial\omega}{\partial\xi},$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}\cdot\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2=\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2},$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial n}=\frac{\partial\omega}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial\omega}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial n}=\frac{\partial\omega}{\partial\xi}\psi'(n)+\frac{\partial\omega}{\partial t}\cdot\frac{\varphi'(n)}{a^2}.$$

L'équation (2) se réduit alors a:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}-\frac{4}{a^2}\frac{\partial\omega}{\partial t}=0.$$

Il faut joindre à cette équation la condition

$$\int_{-\infty}^{\infty}\omega(t,\xi)\,d\xi=1. \tag{α}$$

Ces deux équations suffisent pour déterminer la fonction ω.

Les équations sont satisfaites si l'on pose

$$\omega(t, \xi) = \frac{1}{a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\xi^2}{a^2 t}}.$$

Car ω satisfait l'équation (α) et on aura

$$\frac{d\omega}{d\xi} = -\frac{2\xi}{a^2 t\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\xi^2}{a^2 t}},$$

$$\frac{d^2\omega}{d\xi^2} = \frac{2}{a^2 t\sqrt{\pi t}}\left(\frac{2\xi^2}{a^2 t} - 1\right) e^{-\frac{\xi^2}{a^2 t}},$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2at\sqrt{\pi t}}\left(\frac{2\xi^2}{a^2 t} - 1\right) e^{-\frac{\xi^2}{a^2 t}},$$

d'où

$$\frac{d^2\omega}{d\xi^2} - \frac{4}{a^2}\frac{d\omega}{dt} = 0.$$

La solution de l'équation (2) devient donc

$$\omega(n, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi\varphi(n)}} e^{-\frac{[x-\psi(n)]^2}{\varphi(n)}}$$

qui est la loi des erreurs cherchée.

Il est facile de reconnaitre ce que represent les fonctions φ et ψ.[1]

La valeur moyenne de l'erreur x est

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi\varphi(n)}} e^{-\frac{[x-\psi(n)]^2}{\varphi(n)}} x\,dx.$$

Posons

$$\frac{x-\psi(n)}{\sqrt{\varphi(n)}} = t$$

[1] Voir Bachelier, l. c. p. 159.

l'intégrale devient

$$M(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\psi(n) + t\sqrt{\varphi(n)}]\, e^{-t^2} dt =$$

$$= \frac{\psi(n)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt + \frac{\sqrt{\varphi(n)}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2} dt.$$

La première intégrale a pour valeur $\sqrt{\pi}$ et la seconde est nulle, on a donc

$$M(x) = \psi(n).$$

La valeur moyenne des carrés des erreurs x est

$$M(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi \varphi(n)}} e^{-\frac{[x-\psi(n)]^2}{\varphi(n)}} x^2 dx.$$

Posons encore

$$\frac{x - \psi(n)}{\sqrt{\varphi(n)}} = t$$

on aura

$$M(x^2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\psi(n) + t\sqrt{\varphi(n)}]^2 e^{-t^2} dt =$$

$$= \frac{[\psi(n)]^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt + \frac{2\psi(n)\sqrt{\varphi(n)}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2} dt + \frac{\varphi(n)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt.$$

La première intégrale a pour valeur $\sqrt{\pi}$, la seconde est nulle, et la troisième a pour valeur $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On a donc

$$M(x^2) = [\psi(n)]^2 + \frac{1}{2}\varphi(n)$$

ou

$$\psi(n) = 2[M(x^2) - [M(x)]^2].$$

Substitutions ces valeurs de $\varphi(n)$ et $\psi(n)$, la loi des erreurs s'écrit

$$(A) \qquad \omega(n, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi [M(x^2) - [M(x)]^2]}} e^{-\frac{[x - M(x)]^2}{2[M(x^2) - [M(x)]^2]}}.$$

Si $M(x) = 0$ on aura la loi des erreurs de Gauss

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi M(x^2)}} e^{-\frac{x^2}{2M(x^2)}}.$$

La loi des erreurs (A) est identique à celle que l'on déduit de l'hypothèse ou l'erreur totale x se compose des n erreurs partielles $e_1, e_2, \ldots e_n$ par addition:

$$x = e_1 + e_2 + \cdots + e_n.$$

De cette hypothèse on déduit, en effet, la loi des erreurs sous la forme[1]

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi (b - c)}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2(b-c)}}$$

où

$$a = M(e_1) + M(e_2) + \cdots + M(e_n),$$

$$b = M(e_1^2) + M(e_2^2) + \cdots + M(e_n^2),$$

$$c = [M(e_1)]^2 + [M(e_2)]^2 + \cdots + [M(e_n)]^2.$$

$M(e_1)$ signifie la valeur moyenne de e_1 etc. $M(e_1^2)$ signifie la valeur moyenne du carré de e_1 etc.

On a alors, parceque les $e_1, e_2, \ldots$ sont indépendantes

$$M(x) = M(e_1) + M(e_2) + \cdots + M(e_n) = a$$

[1] Voir E. Czuber: Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendungen etc. 3:te Auflage, B. I, p. 296.

et encore[1]:

$$M(e_1 + e_2 + \cdots + e_n)^2 - [M(e_1 + e_2 + \cdots + e_n)]^2 =$$
$$= \Sigma M(e_i^2) - \Sigma [M(e_i)]^2$$

ou

$$M(x^2) - [M(x)]^2 = b - c.$$

Le précédent procédé s'applique immédiatement a la loi des erreurs du plan et de l'espace. On retrouve ainsi particulièrement la loi des erreurs de Bravais[2] pour le plan et la loi des erreurs de M. Schols[2] pour l'espace.

[1] P. ex. Czuber, l. c., p. 77.
[2] Voir Czuber: Theorie der Beobachtungsfehler p. 378.

Litteratur.

F. LUNDBERG: *Föreläsningar i Livförsäkringsteknik.* Under särskilt beaktande av de nya bestämmelserna i Försäkringslagen, hållna vid Försäkringsföreningens utbildningskurser för försäkringstjänstemän hösten 1917.

Det er efterhaanden ikke helt faa Skrifter, der foreligger fra Direktør Lundbergs Haand om forskellige Emner indenfor Aktuarvidenskaben, og for de mange Aktuarer, der med Interesse har fulgt Dir. Lundberg i hans Fremstillinger af forskellige Emner, alle behandlede ud fra hans originale Syn paa Livsforsikringsmatematiken, byder de fem Forelæsninger i Forsikringsmatematik, som nu er udkomne, en kærkommen Lejlighed til at se Grundlinierne i Systemet udviklet i Sammenhæng.

I Slutningen af 2den Forelæsning bemærker L. selv, at der utvivlsomt kræves en vis Træning for at faa en levende Opfattelse af den Tankegang, som bestandig gaar igen i hans Undersøgelser, og dette er utvivlsomt rigtigt.

For Aktuarer, der er vant til at arbejde efter de gammeldags Methoder med Aggregattavler, kræver det ikke ringe Studium at sætte sig ind i den ejendommelige Maade at arbejde paa, som L. gør sig til Talsmand for, og selv for dem, der er vant til at ræsonnere med og arbejde praktisk med selekte Tavler, vil en Overgang til det Lundbergske System føles som en betydelig Vanskelighed.

Medens man efter det ældre, endnu i Danmark overalt anvendte System, regner Dødeligheden for at være en Funktion alene af opnaaet Alder, og ved den sædvanlige Benyttelse af selekte Tavler regner med, at den er Funktion af Alder og Forsikringstid, forlanger F. Lundberg, at man i hvert Fald i en Række Tilfælde, saaledes ved Præmiereservens Beregning, tillige skal tage Hensyn til den frivillige Afgangs Indflydelse paa de tilbageblevne Forsikredes Dødelighed.

Dødeligheden bliver altsaa — ihvertfald formelt — Funktion af tre Variable, og af disse er den ene: Udtrædelsesfrekvensen ikke arbejdet ind i Grundlaget, men skal drages ind i Beregningen efter det faktiske Forløb af Udtrædelserne.

Direktør Lundbergs System staar og falder med Anerkendelsen af, at det er nødvendigt at tage dette Hensyn, og man kunde der-

for have ønsket at faa en udførlig Begrundelse af Nødvendigheden eller i alt Fald af Hensigtsmæssigheden heraf.

Den Motivering, man til Stadighed finder anført, er den, at de tro Forsikredes Økonomi ikke maa paavirkes af den frivillige Udtrædelse, og Rigtigheden heraf er der næppe nogen, der vil bestride. En Konsekvens heraf er selvfølgelig, at Genkøbsreglerne maa være saaledes affattede, at det Underskud, som visse af de tidlige frivillige Udtrædelser medfører, kan dækkes ved Indtægten ved andre, og at Selskabet fører en Statistik, hvorigennem det er i Stand til at kontrollere, at dette virkelig finder Sted, saaledes at det i Tide kan hindre en Nytegning, der ikke tilfredsstiller denne Fordring.

Dette er et Punkt, der sikkert ofte er bleven forsømt, og hvor Direktør Lundberg har indlagt sig stor Fortjeneste ved at stille kraftige Fordringer om Indførelsen af en rationel Aktuar-Statistik. Hans Foredrag om Reformer indenfor Livsforsikringsselskabernes matematiske Statistik[1] er et Arbejde, hvorfra man kan hente mange gode Vink i denne Retning.

Hvis man kan paavise, at den frivillige Afgang har en væsentlig Indflydelse paa Dødeligheden indenfor den tiloversblevne Forsikringsbestand, og en saa væsentlig Indflydelse, at det i betydelig Grad paavirker Præmiereservens Størrelse, om man tager Hensyn til den eller ej, saa er det naturligvis nødvendigt for at naa til en retfærdig Fordeling af Overskudet at tage Hensyn hertil, men hvor det gælder at føre Bevis herfor, forekommer det mig, at Forfatteren nærmest giver op. Han indrømmer efter at have ræssoneret sig til at Beregningsgrundlaget for de udtraadte kun i Henseende til *Dødeligheden* adskiller sig fra Grundlaget for de indtraadte, at man ved Valget af denne Dødelighed er henvist til *rene Formodninger*[2]; men hermed falder efter min Mening Berettigelsen af Kravet om Hensyntagen hertil i Præmiereservens Beregning til Jorden.

Den Dødelighed, som L. vil lægge til Grund for sin Præmiereserve for de indtraadte (incl. frivillig udtraadte) er Stoltz's Udjævning af de 17 svenske Selskabers Erfaringer for livsvarige Livsforsikringer med 10-aarig Selektionsperiode[3]; men den Dødelighed, som Stoltz arbejder med, er aldeles ikke Dødelighed for indtraadte, men netop ifølge hele den Maade hvorpaa Materialet er skaffet frem, Dødeligheden for »kvarstående» Forsikringer, Lundberg vil altsaa, at man skal anvende denne Dødelighed for de indtraadte og derefter korrigere den med en Dødelighed for udtraadte, som grunder sig paa »rena antaganden».

Jeg kan derfor ikke se rettere, end at man paa det nærværende Tidspunkt ikke kan komme til nogen nøjagtigere Reserve ved Lundbergs Antagelser end ved at regne den paa den sædvanlige Maade

---

[1] Äro reformer inom livförsäkringsstatistiken erforderliga? (Föredrag i försäkringsföreningen den 5 november 1917. Stockholm 1918.)

[2] Föreläsningar, s. 34.

[3] G. Stoltz, Utjämning av sjutton svenska livförsäkringsbolags dödlighetstabeller för läkareundersökta livförsäkrade. Stockholm 1917.

af den i Kraft værende Forsikringsbestand ved Hjælp af f. Ex. STOLTZ's Tavler; men dette udelukker naturligvis ikke, at Systemet har en stor theoretisk Interesse og ogsaa i Fremtiden maaske vil kunne faa praktisk Betydning. Lundberg er selv klar over, at der kan gøres en saadan Indvendning imod hans System; men hans Argumentation imod disse Invendinger (Föreläsningarnes Pag. 39—40) forekommer mig dog ikke overbevisende.

Den første Forelæsning behandler Valget af Beregningsgrundlag og Præmieberegningen.

Efter at have motiveret Kravet om Anvendelse af selekt Dødelighed og en Rentefod af 4 % p. a. gaar han over til Bestemmelsen af Tillægets Størrelse og udvikler her, hvorledes dette bør bestemmes efter Antagelser om Størrelsen af Erhvervs-, Inkasso- og Administrationsomkostninger.

Medens L. paa dette Punkt kræver en mere fuldendt Forsikringsteknik, end der hidtil har været benyttet — særlig her i Danmark — anbefaler han til Gengæld at simplificere Arbejdet ved udelukkende at anvende *kontinuerte* Livrenter, og bestemme Præmierne ved $^1/_1$-, $^1/_2$- og $^1/_4$-aarig Præmiebetaling ved forskellige Tillæg til den kontinuerte Aarspræmie. Det forekommer mig, at alle Aktuarer kraftigt bør støtte denne Fordring, og, hvorsomhelst der indføres Ændringer i Grundlag og Tariffer, gaa over til dette System, der baade i theoretisk og praktisk Henseende byder en meget stor Fordel.

Medens Lundberg i sin første Forelæsning har mange gode praktiske Vink og Forslag til Forbedringer af de nuanvendte Systemer, anlægger han i den anden og de følgende Forelæsninger mere og mere rent theoretiske Synspunkter. Saaledes giver han i Begyndelsen af den 2den Forelæsning en udmærket Anvisning paa, hvorledes Tillæget sammensættes af Erhvervs-, Inkasso-, Administrations- og Sikkerhedstillæg; men et konkret Forslag om, hvor store Værdierne af α, β, γ og σ bør vælges, savner man fuldstændig.

Problemet »mindregode Liv« faar en ganske kort Omtale, og L. stiller sig her meget afvisende overfor de nu benyttede Systemer, hvorefter man anvender særlige Dødelighedstavler for mindregode Liv dannede ved et lavere eller højere Tillæg til Dødeligheden.

L. forkaster fuldstændigt disse Metoder med den Motivering, at det vil fordre et stort System af selekte Dødelighedstavler, og at dette vil blive alt for bekosteligt. I Stedet foreslaar han blot at forøge Sikkerhedsbelastningen med et efter Skøn bestemt Tillæg og altsaa bevare Nettopræmien (og Reservepræmien) uforandret. Som Begrundelse henviser han til, at Sikkerhedstillæget, der jo ogsaa er indført for at faa en Sikkerhedsmargin overfor Dødelighedssvingninger, bestemmes paa denne Maade. Det forekommer mig imidlertid, at der er en meget væsentlig Forskel paa de to Problemer. Sikkerhedstillæget udgør kun nogle faa % og er indlagt som Modvægt mod smaa uvisse Svingninger i Dødeligheden, medens det Tillæg, som gøres af Hensyn til et vitterlig svækket Helbred, oftest er meget stort — op til 50 % af Præmien eller mere —, og selv om der na-

turligvis altid vil være en Del Skøn ved Bestemmelsen af et saadant Tillæg, kan man dog ved Indførelsen af egnede Dødelighedstavler naa ret vidt i Henseende til ensartet Bedømmelse, ligesom de er ganske nødvendige, hvor man skal give den samme Person Tilbud paa forskellige Forsikringsformer. Endelig er det aldeles ikke givet, at man er nødt til at have selekte Dødelighedstavler for mindregode Liv. Da Underdødeligheden ved ordinære Liv i de første Aar netop er en Følge af, at de mindregode Liv er holdt udenfor, kan man ikke slutte fra de ordinære Liv til disse. Ved Indførelsen af 3 eller 4 Aggregattavler for mindregode Liv kan man naa ret vidt i Henseende til rationel Præmiebestemmelse og Præmiereserveberegning, og naar man, som Forholdet er i de tre skandinaviske Lande, har et særligt Selskab, hvis Opgave det er at forvalte de mindregode Liv, kan man ikke sige, at dette System paafører Selskaberne urimelig store Omkostninger.

Efter en Række interessante Bemærkninger om Præmiereservens Beregning efter den i den nye svenske Livsforsikringslov foreskrevne Bruttomethode gaar Dir. Lundberg over til Skildringen af det Emne, der utvivlsomt har hans største Interesse, og hvor man vil finde en Fremstilling af hans originale Syn paa Aktuarvidenskaben, nemlig Præmiereservens Beregning under Hensyn til den faktiske Afgang.

En Følge af det Princip, at de trofaste Forsikringstageres Økonomi ikke maa berøres af den frivillige Afgang, er, at Selskabet maa holde nøje Regnskab med Erhvervsudgifterne og paase, at disse virkelig dækkes af det dertil bestemte Tillæg til Nettopræmien, og at ikke andre Gevinstkilder angribes. Naar L. her kategorisk hævder, at det altid staar i Selskabernes Magt at sørge for, at dette bliver Tilfældet, idet han henviser til, at man kan sænke Provisionerne, indskrænke Nytegningen eller forhøje Præmierne, saa er dette dog vel ikke altid saa nemt i Praxis. Konkurrencehensyn paa den ene Side og paa den anden Side Hensynet til, at Bestanden indenfor en vis Tid maa naa en rimelig Størrelse, hvis den skal kunne bære sin Administration, er Vanskeligheder, som ikke uden videre kan bortelimineres. Er der fremkommet et Underskud, som ikke paa en kortere Aarrække kan bringes ned, ser jeg heller ikke rettere end, at Forsikringstagerne — i hvert Fald, hvis Selskabet er gensidigt — maa finde sig i at se deres Bonus formindsket, ligesom de utvivlsomt har et Krav paa det Overskud, som en dygtig Ledelse har frembragt ved at fremskaffe en solid Bestand. Lundbergs Krav om, at man skal holde nøje Regnskab med Anskaffelsesomkostningerne, og være klar over, hvorledes de dækkes, vil ingen Livsforsikringsmand nægte Berettigelsen af. Overhovedet har L. indlagt sig stor Fortjeneste ved den udførlige Beskrivelse han i Forelæsningerne og navnlig i sit Foredrag om Reformer indenfor Livsforsikringsstatistiken hat givet af, hvorledes en rationel Statistik, der tillader Beregning af Status i baade denne og andre »Planer», kan føres.

I den femte Forelæsning behandler L. Spørgsmaalet om Beregningen af Forretningens Overskud fordelt efter de enkelte Gevinstkilder.

Han gør ombyggelig Rede for, hvorledes man ud fra de Summer og Præmier, som man har summeret op til Brug ved Reserveopgørelsen, kan faa en simpel Beregning af den forventede Dødelighed og Rente og de fra de i Aarets Løb indgaaende Præmier disponible Beløb til Anskaffelse, Administration og Inkasso.

Overfor disse Beløb skal man nu stille de i Aarets Løb faktisk afholdte Udgifter til Dødsfaldsudbetalinger m. m. og den faktisk opnaaede Renteindtægt.

Det siger sig selv, at det er vanskeligt i en Forelæsning (paa 13 Sider) at give en udtømmende Skildring af den matematiske Statistik, som den ideelle Aktuar burde føre. For den der vil læse dette Kapitel med Udbytte, kan jeg anbefale at lægge den Oversigt over den matematiske Statistik ved Siden, som findes bag i Lundbergs Afhandling om Reformer indenfor Livsforsikringsselskabernes Statistik. Lundbergs Fordring gaar ud paa, at Beregningsgrundlaget skal udvise en Dødelighed og Rentefod, et Administrationstillæg, Inkassotillæg og Anskaffelsetillæg svarende nær til de virkelige Forhold og kun indeholdende den strængt nødvendige Sikkerhedsmargin, og at Aktuaren gennem en Statistik, der uden at være alt for bekostelig dog skal komme de virkelige Forhold meget nær, Aar for Aar skal kontrollere, at der ikke er for store Afvigelser mellem det valgte Grundlag og de virkelige Forhold.

At den Aktuar, der er i Stand til at gennemføre dette Program, og som kan faa Selskabets Ledelse til at tage Konsekvenserne af de Resultater, som han derved kommer til, paa en ideel Maade udfylder sin Stilling, kan der næppe være nogen Tvivl om. Lundbergs Forelæsninger har overhovedet den store Fordel frem for de Fremstillinger, man ellers ser af Aktuarvidenskaben, at de i en ganske anden Grad end disse tager Sigte paa det praktiske Aktuararbejde. Det er f. Ex. karakteristisk, at han saa at sige ikke beskæftiger sig med de specielle Forsikringsformer, som ellers optager en uforholdsmæssig Plads i Forhold til den Rolle, de spiller. Han berører saaledes heller ikke Spørgsmaalet om Fremstilling af Dødelighedstavler eller andre af Aktuarens Forarbejder. Han tager fra Begyndelsen Sigte paa sin Hovedopgave, at fremstille hvorledes man efter hans Mening bør beregne Præmiereserven under ganske bestemte Forudsætninger, og at man anerkender disse er en Betingelse for, at man overhovedet kan faa noget praktisk brugbart Resultat af nogen Del af hans System.

Man kan nu ikke lade være med at opkaste det Spørgsmaal: Hvilken praktisk Betydning vil Indførelsen af Lundbergs Beregningsmaade faa? Her synes jeg unægtelig, at det havde været paa sin Plads at faa en Sammenstilling af nogle Talexempler, hvoraf man tydelig kunde have set, hvormeget det betyder.

Jeg har for at faa en Forestilling herom beregnet Virkningen af, at man beregner Præmiereserven efter hans Methode paa 2 Exempler: Det ene er en Bestand af livsvarige Livsforsikringer for Personer, der er 20 Aar ved Indtrædelsen, det andet en Bestand af

Livsforsikringer med Udbetaling om 20 Aar for 30-aarige Personer. For at faa en tydelig Virkning har jeg tænkt mig, at Bestanden er saa slet, at den i Løbet af 5 Aar reduceres til Halvdelen, idet Afgangen andrager:

1' Aar: 15 % af den oprindelige Bestand.
2' » 15 % » » » »
3' » 10 % » » » »
4' » 5 % » » » »
5' » 5 % » » » ».

Til Sammenligning har jeg medtaget Reserven for den samme Bestand beregnet efter en Aggregattavle: Hafnia's skandinaviske Dødelighedstavler. Som Selekttavle er anvendt G. STOLTZ's Udjævning af de 17 svenske Selskabers Erfaringer for livsvarige Livsforsikringer med en Selektionstid af 10 Aar og en Rentefod af 4 %. I alle 3 Tilfælde er Reserven zillmereret med 25 ⁰/₀₀ af Summen. Man ser, at Selektionsreserven gaar op til at andrage 2 à 3 ⁰/₀₀ af Forsikringssummen, altsaa et ikke ubetydeligt Beløb.

Sammenligning mellem Præmiereserven beregnet efter Lundbergs Metode, efter en Selekttavle og en Aggregattavle.

20-aarig Person. Livsvarig Livsforsikring. 1 000 Kr.

Antal Aar efter Tegningen	Alder	Den i Kraft værende Bestand i % af den oprindelige	Præmiereserve beregnet efter		
			Lundbergs Metode	Selekttavle	Aggregattavle
0	20	100	÷ 25,00	÷ 25,00	÷ 25,00
1	21	85	÷ 13,71	÷ 14,07	÷ 14,95
2	22	70	÷ 5,03	÷ 5,94	÷ 6,91
3	23	60	+ 0,84	÷ 0,41	÷ 1,09
4	24	55	+ 5,18	+ 3,91	+ 3,62
5	25	50	8,86	7,54	7,65
6	26	50	12,60	11,64	12,19
7	27	50	16,65	15,95	16,90
8	28	50	20,96	20,48	21,78
9	29	50	25,55	25,22	26,83
10	30	50	30,37	30,16	32,05

30-aarig Person. Livsforsikring med Udbetaling ved Alder 50. Sum 1 000 Kr.

Antal Aar efter Tegningen	Alder	Den i Kraft værende Bestand i % af den oprindelige	Præmiereserve beregnet efter		
			Lundbergs Metode	Selekttavle	Aggregattavle
0	30	100	÷ 25,00	÷ 25,00	÷ 25,00
1	31	85	+ 9,60	+ 9,21	+ 8,30
2	32	70	34,16	33,15	32,09
3	33	60	52,34	50,93	49,97
4	34	55	69,28	67,85	67,18
5	35	50	83,12	81,61	81,24
6	36	50	103,46	102,25	102,16
7	37	50	124,44	123,55	123,87
8	38	50	146,27	145,65	146,42
9	39	50	168,97	168,60	169,82
10	40	50	192,82	192,55	194,12

Hvis det derfor var givet, at den frivillige Udtrædelse spiller den Rolle for Dødeligheden, som Lundberg forudsætter, kan man ikke afvise hans Methode med en Henvisning til, at det kun drejer sig om en relativt ubetydelig Forøgelse af Reserven; men derimod faar man unægtelig ved at regne 2 smaa Exempler som disse igennem ikke nogen Bekræftelse paa Lundbergs Paastand om, at hans Methode betyder en Lettelse fremfor den almindelige Reserveberegning ved en Selekttavle, og det forekommer mig heller ikke, at hans Afhandling om Beregning af Præmiereserven ved Anvendelse af Selekttavler er egnet til at give dette Indtryk. Naar dertil kommer, at Rigtigheden af den Forudsætning om Dødeligheden blandt de udtraadte, hvorpaa hele Systemet hviler, er meget problematisk, kan jeg ikke se rettere, end at man for Øjeblikket bør stille sig afventende overfor Tanken om at indføre saadanne Methoder, selv om det System, der her er bygget op, i theoretisk Henseende maa siges at danne et smukt afsluttet Hele, som baade i sine bærende Tanker og i en Række Detaljer gør Krav paa mere end almindelig Interesse.

Bj. Drachmann.

Den ryska dödlighetsundersökningen av år 1916. (Tables de mortalité russes des 9 compagnies d'assurances, Petrograd, A. Benke, Novij Pereulok, 2. 1916.)

År 1916, kort före utbrottet av den ryska revolutionen publicerades en undersökning av dödligheten inom 9 ryska livförsäkringsbolag, som erbjuder mer än vanligt av intresse. Redan genom sitt yttre, en diger volym på över 500 sidor kvartformat, ådagalägger densamma, att ett stort arbete blivit nedlagt på undersökningen och detta intryck stärkes yttermera, då man går att göra sig bekant med innehållet af volymen, hvilket förutom en inledande text på ryska och franska språken utgöres av en mängd belysande diagram och fullständiga sammanställningar av alla till undersökningen hörande sifferuppgifter, från de primära och de för härledande av dödlighetstalen erforderliga sammanställningarna av dessa ända till dödlighetstalen, sådana de framstodo efter en första mekanisk utjämning, och de slutligen utjämnade.

Det som emellertid gör denna publikation i främsta rummet intressant är det mångfaldiga och på nya uppslag rika vetenskapliga arbete, som blivit därå nedlagt.

Ifrågavarande undersökning hade nog länge varit påtänkt. Men först år 1911 skreds till åtgärd för förverkligande af planen. Under några decennier hade ryska livförsäkringsmän, bolagens chefer och aktuarier då och då sammankommit till möten för att dryfta spörsmål berörande det gemensamma arbetsområdet. På en dylik kongress i huvudstaden nedsattes sistnämnda år en kommitté af aktuarier för att uppgöra en plan för den påtänkta undersökningen och med uppdrag att speciellt belysa frågan om de metoder, som borde vid en blivande dödlighetsundersökning komma ifråga. Detta sitt uppdrag fullgjorde de till kommittén hörande aktuarierna, c:a 12 till antalet, på ett mycket fullständigt sätt inom en kort tid. Sommaren 1912, ungefär vid tiden för den internationella aktuariekongressen i Amsterdam, förelade de ofvannämnda sammanslutning färdigt ett arbete, omfattande 14 särskilda afhandlingar berörande särskilda beaktansvärda spörsmål. Bland författarena märkas främst aktuarien vid Rysslands äldsta livförsäkringsbolag *Schisn*, Jastremsky och Schetaloff, aktuarien vid *Rossija*, hvilka anlagt nya synpunkter på problemet och kommit fram med självständiga förslag, som åtminstone undertecknad ej tidigare känt till. Det som härvid främst faller i ögonen är användandet av *teorierna för statistiska seriers stabilitet* såsom underlag för avgörande av flere på gången av den blivande undersökningen i väsentlig mån inverkande principfrågor. För herrarna här, som nyligen åhört den ryske vetenskapsmannen, professor Tschuproffs av allt att döma mycket belysande och intressanta framställning, är det ju lätt att inse, att intresset för dylika frågor är bland representanter för den matematiska statistiken inom Ryssland helt livligt och att där redan föreligger en viss tradition i tillämpande av dessa teorier på särskilda praktiska problem. Men att detta skett i det omfång, jag nu skall

försöka antyda, är möjligen ej tidigare här heller känt Nämnda JASTREMSKY använde sig av nämnda teori för att klargöra, huru det föreliggande materialet, vilket omfattade livförsäkringar, afslutade under tidsperioden 1835—1910, lämpligen borde uppdelas efter olika tidsperioder, för att de erhållna dödlighetstalen kunde anses för resp. period typiska. Genom en provundersökning av försäkrade inom bolaget Schisn under en längre period, om jag erinrar mig rätt, från femtio—sextiotalet till 1910, konstaterade han då, med tillämpande av Lexis dispersionsteori, att i åldrarna under 50 år sådana avvikelser från medeldödligheten förekommo, vilka ej mera kunde hänföras till kategorin af tillfälliga divergenser utan ange att bestående förändringar i dödligheten inträdt. Han kommer på grund af sina undersökningar till det resultat, att materialet med avseende å den tidsperiod, till vilken det hänför sig, uppdelas i tre grupper, den första omfattande åren 1835—1860, den andra för åren 1860—1885 och den tredje 25-årsperioden 1886—1910. Han påyrkar vidare, att män och kvinnor skola behandlas var för sig, att försäkringar på livstid särskiljas från liv- och kapitalförsäkringarna och att jämte aggregattabeller selekta tabeller böra utarbetas, speciellt för de till den senare tidsperioden hörande grupperna, för vilka material av tillräcklig omfattning synes föreligga. I en uppsats av SCHETALOFF, berörande de teoretiska grunderna för avgörandet av frågan om statistiska seriers stabilitet, polemiserar han mot den av JASTREMSKY använda LEXIS'ska metoden och anser densamma böra ersättas av andra förfaringssätt, som ge ett säkrare mått på *dispersionen* än den av JASTREMSKY använda.

Även i ett annat syftemål har JASTREMSKY begagnat sig av det LEXIS'ska förfarandet, av honom bearbetat och omformat, nämligen i betraktelserna över existensen af en så kallad selektionskoefficient. Om dödlighetskoefficienten, d. ä. talet som angiver för en försäkrad person, hörande till en viss åldersklass, sannolikheten att dö inom ett år betecknas med q_t, då det är frågan om dödligheten under det t:te försäkringsåret, $q_{(5)}$, då slutdödlighet afses, d. v. s. den dödlighet, som äger rum under tiden efter utgången av selektionsåren, så vill JASTREMSKY bevisa, att det existerar en formel $q_t = \varphi_t \cdot q_{(5)}$ i vilken φ_t är oberoende av åldern. Denna teori har JASTREMSKY närmare utvecklat i en uppsats med titel *Der Auslese Koeffizient*, publicerad i »Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft» år 1912, den enda ingående framställning på annat språk än ryska jag funnit rörande sagda ryska undersökningar. Jag behöver här ej närmare ingå på innehållet i denna uppsats. Som bekant, ådagalägger han här med stöd av de år 1909 publicerade österrikisk-ungerska dödlighetstabellerna, att de värden man erhåller genom att direkt ur tabellerna uttaga förhållandet mellan dödlighetskoefficienten för en viss åldersklass under det första försäkringsåret till dödlighetskoefficienten för samma åldersklass ur den s. k. abgestuzte Tabelle, d. v. s. tabellen som utvisar slutdödligheten efter 10 resp. 5 års försäkringstid, för de olika åldersklassernas vidkommande skilja sig i så ringa mån från ett *medelvärde*

han härleder, att avvikelserna från detta medelvärde kunna anses såsom *tillfälliga* i det dispersionskoefficienten håller sig till ett värde mycket nära enheten. På grund härav föreslog Jastremsky tillämpande av denna princip å den planerade undersökningen. I särskilda avhandlingar ha kolleger till Jastremsky undersökt andra dödlighetstabeller såsom Alte Leipzigers, de 60 engelska bolagens, medan Engelbrecht tidigare i samma syfte granskat Gothatabellen. Alla dessa undersökningar anför Jastremsky såsom stöd för sin koefficientteori.

Efter dessa grundliga förarbeten, af vilkas innehåll blott några typiska frågor här af mig berörts, skred man så under sommaren 1912 till att fixera närmare riktlinjer för dödlighetsundersökningen. Jastremsky's samtliga här av mig berörda förslag blevo härvid godkända, men tillika uppkommo nya frågor, som fordrade sin tid till nödig utredning, innan avgörandet kunde träffas. En viktig sådan var frågan om lämplig räkne-enhet. Å ena sidan framhölls betydelsen af ett resultat på grundvalen av personräkning, å andra sidan, och särskilt i fråga om de selekta tabellerna var det nödigt att behandla varje på särskild läkareundersökning grundad försäkring skild för sig oberoende av om försäkringen i fråga hänförde sig till tidigare försäkrad person eller ej. Denna fråga löstes så, att för alla viktigare grupper av det i enlighet med redan nämnda synpunkter uppdelade materialet dubbel kalkyl skulle genomföras, i det samtliga dödlighetskoefficienter skulle bestämmas på grundvalen av både personräkning och urvalsräkning.

En annan fråga, som behandlades med sällsynt grundlighet och intresse, var sättet för den frivilliga afgångens inverkan på antalet under ett års risk varande inom varje åldersklass. Här uppstod återigen meningsskiljaktighet mellan de redan nämnda teoretikerna. Frågan var ju av särskild betydelse, emedan sagda avgång isynnerhet under de första försäkringsåren inom den ryska livförsäkringen varit ovanligt stark. Därför ville Schetaloff ha ett så noggrant beaktande av försäkringstiden för varje före försäkringstidens slut avgången, att densamma skulle bestämmas på *en dag* när. Häremot anfördes av Jastremsky, att en så ytterlig noggrannhet hade desto mindre skäl för sig, som de avgångna i fråga om dödlighetsförhållanden väl ej voro ett med de övriga alldeles homogent bestånd. Han förordade sålunda Sprague's metod att hänföra avgångstidpunkten för alla under förra hälften av ett år avgångna till årets början och för de övriga till årets slut. Denna tvistefråga avgjordes så, att Schetaloff fick anställa en provundersökning å i Rossija under en viss tidsperiod försäkrade personer för att med exakta siffror kunna angiva den ena och den andra metodens inverkan på antalet försäkrade resp. försäkringar under ett års risk. På grund av denna provundersökning, vars resultat också i detalj ingår i den ryska publikationen över själva dödlighetsundersökningen, beslöts att Sprague's metod skulle tillämpas vid allt som hänförde sig till de tvenne tidigare tidsperioderna, medan åter för tidsperioden 1886—1910 försäkringstiden för de frivilligt avgångna skulle beaktas på *en månad* när.

Slutligen ägnades särskild uppmärksamhet åt frågan om *utjämningsmetod*. Även i detta avseende framställdes flera förslag, bland vilka sedermera tvenne blevo föremål för noggrannare utredning och bägge även kommo till användning vid framställande av de definitiva resultaten av undersökningen.

Det ena förslaget åsyftade en utjämning enligt GOMPERTZ-MAKEHAM'S formel med beräknande av parametrarna enligt minsta kvadratmetoden och de detaljanvisningar österrikaren ROSMANITH givit.

Den andra metoden hade utförligt behandlats av JASTREMSKY i en av de tidigare nämnda avhandlingarna under titel: *La theorie de divergence pour l'étude de l'evolution de la mortalité*. Då i inledningen till dödlighetsundersökningen ingår en överblick över huvudprinciperna i detta förfarande, skall jag här endast i korthet beröra detsamma. Utgångspunkt för den anförda metoden är tanken, att den utjämnade dödlighetskurvan y_x bör bestämmas så, att de av densamma angivna värdena för dödligheten för olika åldrar x, jämförda med motsvarande värden för de outjämnade dödssannolikheterna W_x, giva differenser $W_x - y_x$, vilka möjligast noggrant följa GAUSS' fellag. Härvid bör nödig hänsyn tagas till vikten g av de olika observationsresultaten, beräknad enligt formeln $g = \frac{s}{y(1-y)}$, vari s betecknar antalet risker, d. v. s. i förevarande fall antal under ett års risk stående personer resp. försäkringar i ifrågavarande åldersklass. Vid denna beräkning av g skulle approximativa värden för y_x, erhållna genom en första utjämning, användas. Genom att successivt ersätta y_x med en hel funktion av första, andra, tredje o. s. v. graden kan man steg för steg komma till så noggrann överensstämmelse, man önskar, mellan de på denna väg erhållna differenserna $W_x - y_x$ och de med ledning av sannolikhetskalkylen teoretiskt beräknade. För att avgöra, när tillräcklig sådan överensstämmelse kan anses äga rum, angivas tre särskilda förfaringssätt, vilka samtliga gå ut på kalkyler med kvantiteten

$$\sqrt{g}\,(W_x - y_x),$$

d. v. s. ofta berörda differenser, reducerade till viktsenheten.

Vid den slutliga prövningen av dessa båda utjämningsmetoder, beslöt kommittén förorda den senare, då densamma, enligt kommitténs uppfattning, bättre var ägnad att säkerställa en god utjämning.

Efter denna redogörelse för de för undersökningen bestämmande teoretiska synpunkterna må här anföras sifferuppgifter till belysande av omfånget av det statistiska materialet ävensom resultatet av undersökningen för de olika gruppernas vidkommande. Såsom redan nämnt, uppdelades det totala materialet på olika tidsperioder, olika försäkringsarter, enligt de olika räkneenheter som kommo till användande och många andra synpunkter i ett otal olika grupper. För *på livstid försäkrade män* erhöllos sålunda sex olika aggregattabeller, en för varje av de tre tidsperioderna på grundvalen av personräkning och en likaså

för varje period enligt urvalsräkning. Detta materials omfattning framgår av följande tablå:

Män	I	tidsperioden.	Urvalsräkning	63 250	observ.-år,	2 073	dödsfall
»	II	»	»	220 325	»	5 687	»
»	III	»	»	367 704	»	6 688	»
»	I	»	Personräkning	56 333	»	1 832	»
»	II	»	»	204 868	»	5 219	»
»	III	»	»	347 727	»	6 272	»

Ur nämnda material härledas vidare tre selekta tabeller, en för varje av de berörda tidsperioderna. För de åtta första åren angivas sålunda *selektionskoefficienterna* och för slutdödligheten fullständiga tabeller.

För på *bestämd tid försäkrade män, blandad liv- och kapitalförsäkring* uppgjordes tre särskilda aggregattabeller, en på grund av urvalsräkning för den andra tidsperioden, och tvenne för den senaste perioden, av vilka den ena enligt personräkning, den andra enligt urvalsräkning. Från den tidigaste tidsperioden fanns så litet av denna kategori försäkringar, att det ej räckte till för uppställande av dödlighetstabell. Även selekta tabeller uppgjordes för de tvenne senaste tidsperioderna, en för varje. Omfattningen av detta material belyses av följande tablå:

Män	II	tidsperioden.	Urvalsräkning	37 820	observ.-år,	580	dödsfall
»	III	»	»	665 171	»	5 536	»
»	III	»	Personräkning	619 750	»	5 157	»

För beräkning av de selekta tabellerna, d. v. s. slutdödlighetstabellen, var materialet avsevärt mindre, då ju allt som hörde till selektionsåren föll bort. Sålunda återstod av sist anförda tal blott följande för bestämmande av sagda dödlighet efter de första 8 årens förlopp.

Män	II	tidsperioden	19 130	observationsår,	377	dödsfall
»	III	»	118 430	»	1 700	»

Det ringa materialet är antagligen orsaken till vissa abnormiteter i den för II tidsperioden härledda selekta tabellen (se nedan).

Alla föregående uppgifter hänföra sig till normalt försäkrade män. För försäkrade kvinnor finnas blott tvenne dödlighetstabeller härledda, vardera hänförande sig till den senaste tidsperioden, nämligen en aggregattabell för livstidsförsäkringar och en för blandade liv- och kapitalförsäkringar. Till följd av materialets ringa omfattning bli dessa tabeller för kvinnor utan nämnvärd betydelse.

Här nedan lämnas utdrag ur de viktigaste tabellerna i den ryska undersökningen. För att lämna prov på resultatet av de olika utjämningsmetoderna, är slutdödligheten bland män, blandade liv- och kapitalförsäkringar angiven såväl enligt Jastremsky's utjämningsför-

Tabeller, utvisande slutdödligheten efter det 8:de försäkringsåret.

Ålder	Livstidsförsäkring. Män			Blandad liv- och kapitalförsäkring. Män		
	1835—1860	1861—1885	1886—1910	1861—1885	1886—1910	1886—1910 Gompertz-Makeham ska metoden
35	0,01518	0,00919	0,00668	0,00368	0,00699	0,00694
40	0,01460	0,01149	0,01007	0,00806	0,00866	0,00850
45	0,01706	0,01604	0,01480	0,01350	0,01101	0,01131
50	0,02194	0,02254	0,02122	0,01905	0,01620	0,01639
55	0,02941	0,03126	0,03005	0,02897	0,02607	0,2552
60	0,04042	0,04311	0,04232	—	0,04214	0,4185
65	0,05652	0,05958	0,05941		0,06562	0,07072
70	0,08084	0,08279	0,08306	—	—	—
75	0,11609	0,11545	0,11534	—	—	—
80	0,16658	0,16089	0,15865	—	—	—
85	0,23719	0,22303	0,21567	—	—	—

Aggregattabeller.

Ålder	Livstidsförsäkring. Män Urvalsräkning			Blandad liv- och kapitalförsäkring. Män		
				Urvalsräkning		Personräkning
	1835—1860	1861—1885	1886—1910	1861—1885	1886—1910	1886—1910
25	0,00846	0,00688	0,00698	0,00795	0,00467	0,00452
30	0,01064	0,00708	0,00745	0,00721	0,00375	0,00381
35	0,01251	0,00847	0,00870	0,00754	0,00505	0,00511
40	0,01450	0,01111	0,01090	0,00923	0,00740	0,00740
45	0,01725	0,01528	0,01448	0,01291	0,01065	0,01061
50	0,02167	0,02147	0,02013	0,01957	0,01560	0,01561
55	0,02889	0,03036	0,02877	0,03060	0,02406	0,02418
60	0,04027	0,04286	0.04159	—	0,03881	0,03903
65	0,05744	0,06009	0,06001		0,06364	0,06380
70	0,08223	0,08337	0,08572	—	—	—
75	0,11674	0,11414	0,12065		—	—
80	0,16329	0,15143	0,16700	—	—	—
85	0.22445	0,20591	0,22716	—	—	—

farande som enligt den Gompertz-Makeham'ska metoden. Likaså är bland aggregattabellerna dödligheten bland samma grupp män angiven såväl enligt urvalsräkning som personräkning. Intressant är att se, att användandet av den ena eller andra räkneenheten ger mindre differenser i slutresultatet än nämnda tvenne utjämningsförfaranden.

Vid uppskattande av de försäkrades ålder har förfarits så, att alla, som vid tidpunkten för räkningen hade fyllt $(x - {}^1/_2)$ år men ej ännu uppnått $(x + {}^1/_2)$ års ålder, räknades till åldersklassen x.

Till slut må här ännu angivas selektionskoefficienterna för de 8 första försäkringsåren, sådana de härleddes för blandade liv- och kapitalförsäkringar under den sista tidsperioden.

1	försäkringsåret;	selektionskoefficienter	0,683
2	»	»	0,854
3	»		0,953
4	»	»	0,882
5	»	»	0,876
6	»	»	0,858
7		»	0,892
8	»	»	0,898.

Hälsingfors den 16 januari 1919.

H. M. J. Relander.

J. du Saar: *Over Sterfteformules en Lijfrenten. (Dissertation.) Groningen 1917. (139 S.)*

Forfatteren har i dette Skrift givet en historisk-kritisk Oversigt over de Formler, man i Tidernes Løb har benyttet til Fremstilling af Dødeligheden, særlig blandt forsikrede Personer. Hertil knyttes en Undersøgelse af de Fordele, der er forbundet med Benyttelsen af de forskellige Formler, idet Forf. ligesom vistnok det store Flertal af praktiske Aktuarer staar paa det Standpunkt, at Værdien af en Dødelighedsformel maa bedømmes ikke blot under Hensyn til den Nøjagtighed, hvormed den gengiver Iagttagelserne, men tillige under væsentlig Hensyntagen til de Lettelser, den kan medføre for Aktuarens praktiske Arbejde. Det sidste Hensyn fører bl. a. til Forkastelse af saadanne Formler, der er overlæssede med Konstanter, eller fører til Udtryk, der ikke lader sig integrere under endelig Form eller i det mindste kan tabelleres paa overskuelig Maade.

Af Bogens otte Afsnit er de vigtigste det rent historiske Afsnit III om de ældste Dødelighedsformler, Afsnit IV om Dødelighedsformlerne efter 1860 og Afsnit VIII om Egenskaberne ved den Makeham'ske Formel. Forfatteren har med megen Flid gennempløjet den ret store og temmelig spredte Literatur om disse Æmner, uden at overse de fra de mindre Lande hidrørende Bidrag; dog savner man i § 76 en Vurdering af den af Gram i det schweiziske Aktuartidsskrift foreslaaede stykkevise Udjævning ved Orthogonalfunktioner.

Enkelte med Dødelighedsstatistiken beslægtede Æmner er medtaget i Bogen: saaledes indeholder denne et særligt Afsnit om Formler for Invaliditet og Sygelighed, og i Afsnit III S. 19—24 finder man en Fremstilling af den omkring 1760 førte kuriose Diskussion mellem DANIEL BERNOULLI og D'ALEMBERT om Koppevaccinationens Virkninger.

Bogen bærer naturligvis som Helhed Præg af sin Bestemmelse som Habilitationsskrift: saaledes synes Afsnit VII, der gör udförligt Rede for Beregningen af Livrenter paa Grundlag af DE MOIVRE's Hypothese, nutildags kun at have akademisk Interesse. Paa et enkelt Punkt har Forf.s historiske, og paa et andet hans kritiske Sans svigtet ham: ukorrekt er saaledes Udtalelsen S. 137 om, at det i de sædvanlig brugte Lærebøger ikke omtales, at naar Makeham's Lov gælder, kan Beregningen af Livrenter paa flere Liv føres tilbage til Livrenter paa eet Liv, naar blot samtidig Rentefoden ændres;[1] og Paastanden S. 8 om, at man kommer til μ_x ved at vælge *Tidsenheden* uendelig lille, turde nærmest være en Reminiscens fra JØRGENSEN's Bog[2] og bør ikke tages alvorligt.

Afhandlingen er i øvrigt skrevet i et klart og bredt Sprog, saaledes at Læsningen ikke er forbundet med Vanskelighed, selv for den, der — som Anmelderen — savner Fortrolighed med det hollandske Sprog. Den, der interesserer sig for Dødelighedsformler, vil sikkert hilse Bogen velkommen som et nyttigt Hjælpemiddel til at skaffe sig Overblik over det Arbejde, der hidtil er udført paa dette specielle Omraade.

J. F. S.

Dødelighetsundersøkelser blandt livrenteforsikrede i otte norske livsforsikringsselskaper indtil aaret 1914. Utarbeidet paa vedkommende selskapers foranstaltning. Kristania 1918.

Efter en av aktuarien O. GRAN i december 1912 inledd diskussion i norska aktuarieföreningen angående beräkningsgrunder vid livränteförsäkring föreslog föreningen, att de norska livförsäkringsbolagen ville tillsätta en kommitté för att avgiva förslag angående val av dödlighetstabell, räntefot och bruttotillägg vid livränteförsäkring. Kommittén, som förutom aktuarien GRAN bestod av aktuarierna G. HOLTSMARK och R. MAGELSSEN, framlade sitt betänkande i juni 1914.

Vid behandling av kommitténs förslag vid ett sammanträde i norska aktuarieföreningen yttrades från flera håll tvivel om de föreslagna hypotetiska dödlighetstabellernas lämplighet som beräkningsgrund och uttalades önskvärdheten av att bolagens egen dödlighetserfarenhet bland livränteförsäkrade blev bearbetad, innan val av ny tabell företogs. Samma synpunkter gjorde sig gällande vid förslagets behandling vid möte mellan livförsäkringsbolagens direktörer. Med anledning härav uppdrogs åt kommittén att verkställa en undersökning av dödligheten bland livränteförsäkrade enligt bolagens hela erfarenhet.

[1] Se allerede Text-Book, 1e Udg. p. 212—3.

[2] N. R. JØRGENSEN: Grundzüge einer Theorie der Lebensversicherung p. 63.

Arbetet påbörjades i april 1915 och resultatet har framlagts i en redogörelse under ovanstående titel. Undersökningen är baserad på från åtta norska livförsäkringsbolag erhållna uppgifter angående samtliga intill 1914 års utgång tecknade genast började eller uppskjutna livränteförsäkringar. Materialets omfattning framgår av efterföljande tabell över antalet utskrivna kort.

	Män	Kvinnor	Summa
Genast började livräntor	538	3,704	4,242
Uppskjutna livräntor	1,549	5,518	7,067
Summa	2,087	9,222	11,309

På grundval av detta observationsmaterial hava utarbetats aggregattabeller för såväl män som kvinnor dels vid försäkring av genast började livränta, dels vid försäkring av uppskjuten livränta, varjämte utarbetats en selekt dödlighetstabell för kvinnor vid försäkring av genast började livränta. Vid upprättande av aggregattabellerna valdes person som räkneenhet, vid upprättande av den selekta tabellen användes däremot försäkring som räkneenhet. För aggregattabellerna för kvinnor gjordes en uppdelning av materialet i livränteförsäkrade inträdda före 1890 och inträdda under perioden 1890—1914.

Materialet för aggregattabellerna omfattade följande antal dödsfall.

	Genast började livränta			Uppskjuten livränta		
	0—39 år	40—59 år	60—97 år	0—39 år	40—59 år	60—97 år
Män	3	10	180	46	28	53
Kvinnor . .	6	70	1,072	126	92	123

Vid upprättandet av den selekta dödlighetstabellen för kvinnor vid försäkring av genast började livränta har materialet delats i tre grupper, den första omfattande de fem första försäkringsåren, den andra omfattande de därpå följande fem försäkringsåren och den tredje gruppen omfattande materialet från och med elfte försäkringsåret. Fördelningen av dödsfallen på dessa tre grupper var följande.

	0—39 år	40—59 år	60—97 år
De 5 första försäkringsåren	2	55	246
6:e—10:e försäkringsåren	5	81	584
11:e och följande försäkringsår	1	13	955

Såsom av dessa tabeller framgår, grupperar sig materialet, då det gäller genast började livränta, huvudsakligen omkring de högsta åldrarna. Någon utjämning av dessa tabeller har därför icke ansetts möjlig, liksom ej heller av tabellerna för uppskjutna livräntor på grund av det ringa antalet dödsfall. I stället har verkställts en jämförelse mellan observerade antalet döda och det beräknade antalet vid tilllämpning av de tidigare föreslagna hypotetiska dödlighetstabellerna. Den observerade dödligheten utgjorde nedanstående % av den beräknade.

	Kvinnor				Män
	De 5 första försäkr.-åren	6:e—10:e försäkr.-åren	11:e och följ. försäkr.-år	Aggregat	Aggregat
Genast började livr:a	74,4	89,5	104,2	94,3	116,3
Uppskjuten livränta	—	—	—	81,2	96,9

Av denna jämförelse framgår, dels att inträdesurvalet spelar en icke oväsentlig roll, dels att dödligheten bland kvinnliga livränteförsäkrade varit lägre än vad den föreslagna hypotetiska dödlighetstabellen antager. Kommittén slutar därför sin redogörelse för undersökningen med att som sin åsikt framhålla, att, därest man icke kan påräkna högre ränta än den vid premieberäkningen antagna (4 %), den föreslagna dödlighetstabellen för kvinnor icke torde kunna anses tillräkligt betryggande annat än sedan försäkringarna varit gällande i minst 10 år, men att, om man under de närmaste 10 åren kan påräkna 5 eller 5 ½ % ränta, räntevinsten torde, bortsett möjligen från de högsta inträdesåldrarna, vara mer än tillräcklig för att täcka förlusten på grund av underdödligheten under de 10 första försäkringsåren.

Den föreliggande intressanta undersökningen bekräftar den även här i Sverige gjorda erfarenheten, att dödligheten bland personer, som teckna livräntor, är synnerligen låg, framförallt bland kvinnor. Anmälaren har haft tillfälle jämföra resultatet av den norska undersökningen med de resultat, till vilka professor Fredholm kommit vid en för några år sedan verkställd undersökning av dödligheten bland livränteförsäkrade inom vissa svenska bolag. Jämföres antalet observerade dödsfall bland kvinnor, vilka tecknat genast började livräntor, enligt den norska erfarenheten med det antal, som borde avlidit, därest man tillämpar den av professor Fredholm på grundval av det svenska materialet uppgjorda dödlighetstabellen, finner man för åldrar fr. o. m. 60 år en förvånansvärd överensstämmelse (1,072 observerade dödsfall mot 1,067,2 beräknade).

P. Rq.

Die neuen dänischen Sterblichkeitstafeln für minderwertige Leben.

Von Bj. Drachmann.

Historisches.

Versicherung minderwertiger Leben hat in Dänemark lange stattgefunden. Erstens haben die Lebensversicherungsgesellschaften in Dänemark — wie überall — Personen aufgenommen, deren Gesundheitszustand eine geringere als die normale war. Die hierbei gewöhnlich verwendete Methode bestand darin, dass man der betreffenden Person ein höheres Alter als das wirkliche beilegte. Wenn der Gesundheitszustand eine so schlechte war, dass die Alterserhöhung mehr als 10 Jahre betragen musste, wenn die Prämie als hinreichend geschätzt werden konnte, wurde der Antrag gewöhnlich abgelehnt. Es war im allgemeinen die Regel, dass die Alterserhöhung auch bei der Berechnung der Prämienreserve und des Rückkaufswerts in Rechnung gebracht wurde. Karenzzeit entweder gewissen Todesursachen gegenüber oder allgemeine Karenz kam natürlich auch vor. Während also die meisten Gesellschaften die schlechteren Risiken ganz ablehnten, konnte jede Person bei der Gesellschaft »Danmark» in der sogenannten »Unterabteilung» eine Versicherung bekommen. Die Prämien wurden nach einer sehr strengen Sterblichkeitstafel ausgerechnet, und für alle Versicherungen galt eine 5-jährige Karenz.

Gleichzeitig mit der Entwickelung der praktischen Frage nach der Versicherung minderwertiger Leben gingen aber auch theoretische Untersuchungen, vor allen die Arbeiten von Dr. Jens Pedersen. In seiner Abhandlung: »Ueber

die Versicherung minderwertiger Leben» hat er in interessanter Weise die Hauptlinien des Problems aufgezogen und gezeigt, wie man aus der Todesursachenstatistik gewisse Sterblichkeitstafeln für minderwertige Leben herstellen kann.

Im Jahre 1916 kam ein Verband zwischen den meisten dänischen Lebensversicherungsgesellschaften mit Ausnahme Hafnia's zu Stande, in der Absicht zu einer besseren Lösung der Frage zu gelangen, indem man durch einen gegenseitigen Quotenvertrag das Risiko auf viele Hände verteilte und gleichzeitig an Stelle der strengen Bedingungen »Danmark»'s differenzierte, für die einzelnen Fälle angemessene Prämien, »Karenzbestimmungen» und sonstige Restriktionen zu verwenden versuchte. Das alte Princip »Danmark»s, dass man jedermann eine Versicherungsmöglichkeit bieten sollte, wurde stets festgehalten.

Ungefähr zu derselben Zeit hatte man sich auch in Hafnia mit dem Problem beschäftigt, und eine Gesellschaft: »Dana» gegründet, deren Hauptaufgabe die praktische Lösung desselben sein sollte. Als die zwei Institutionen nebeneinander ungefähr ein Jahr bestanden hatten, wurden sie in der Weise vereinigt, dass »Hafnia» in den Quotenvertrag eintrat und »Dana» das Portefeuille des bestehenden Verbandes übernahm und danach das ganze Geschäft verwaltete und verteilte.

Als erstes Resultat der Erfahrungen des Komités für minderwertige Leben wurde am 8. November 1916 im dänischen Aktuarverein von Dr. Jens Pedersen ein Vortrag gehalten, der die Herstellung von Sterblichkeitstafeln für minderwertige Leben behandelte.[1]

Dr. Pedersen's Aufstellungen in diesem Vortrag, die übrigens von der Gesellschaft »Norske Folk» als Grundlage ihrer Sterblichkeitstafeln angewandt worden ist, gab Anlass dazu, dass das dänische Komité für minderwertige Leben einen Ausschuss niedersetzte mit der Aufgabe, drei Sterblichkeitstafeln wie die von Dr. Pedersen erwähnten zu berechnen. Der Ausschuss bestand aus den Herren Direktor Lønborg, Dr. Pedersen, Dr. Salomonsen, Professor Fløystrup und Dr. Hassing. Nachdem »Dana» dem Koncern

[1] Dr. Jens Pedersen: Om Dødelighedstavler for mindregode Liv. København 1918.

beigetreten war, wurde der Unterzeichnete als Aktuar in »Dana» in dem Ausschuss aufgenommen und bekam die Aufgabe, die praktische Durchführung der Gedanken und die rechnerische Arbeit zu leiten. Das Ergebnis waren die im Anhang abgedruckten Tafeln, die seitdem bei der Bestimmung der Prämien verwendet worden sind.

Die Herstellung der einzelnen Tafeln.

A. Die Tuberkulosetafel.

Wenn es auch innerhalb der Gruppe von Tuberkulösen einen bedeutenden Unterschied in dem Grade gibt, in welchem die Personen, die eine Versicherung suchen, von der Krankheit angegriffen sind, von denen, die nur wegen des Vorkommens der Tuberkulose in der Familie suspekt sind, bis an Personen, die mehrmals auf einem Sanatorium behandelt worden sind oder sogar an einem frischen Process in den Lungen leiden, handelt es sich doch in allen Fällen um eine Klasse von Menschen, deren Sterblichkeit im Verhältniss zu der normalen in dem jüngeren Alter (von 20 bis 30 Jahren) ein Maximum aufweist; kommt die Person über dieses kritische Alter hinaus, nähert sich ihre Sterblichkeitswahrscheinlichkeit immer mehr der normalen.

Dieses Verhältniss kann man natürlich sehr leicht in einer Sterblichkeitsformel darstellen; es ist nur die Frage, um wieviel man die Sterblichkeit erhöhen soll. Dies ist aber nur eine Zweckmässigkeitsfrage, weil man aus praktischen Gründen nicht unbegrenzt viele Tuberkulosetafeln haben kann. Nun stellt sich in der Praxis heraus, dass ein sehr bedeutender Teil von den Tuberkulösen, die im Komité behandelt worden sind, in nicht allzu hohem und nicht allzu geringem Grade an der Krankheit leiden; sie haben was man eine »mittlere» Tuberkulose nennen möchte, für welche das Komité im allgemeinen einen Prämienzuschlag von etwa 25—30 % bei einer 25-jährigen Versicherung geben wollte.

Ob die so durch Schätzung gefundene Prämie sich für die betreffenden Versicherungen als hinreichend erweisen wird, davon kann man zur Zeit nichts bestimmtes sagen.

Erst wenn man nach mehreren Jahren von den Erfahrungen mit dieser Gruppe eine wirkliche Sterblichkeitstafel hergestellt haben wird, kann diese Frage beantwortet werden. Bis dann hat man in der Frage, *wie stark* die Sterblichkeit erhöht werden muss, nur das Urteil der Fachmänner. Will man aber ein solches prinzipiell nicht gelten lassen, wie wird dann je ein neues Risiko in die Versicherung hineingebracht werden können?

Wird dagegen die Frage gestellt, wie die Erhöhung der Sterblichkeit auf die Prämie der einzelnen Versicherungsarten einwirkt, und wie es in den verschiedenen Altern wirkt, dann ist eine recht grosse Einheitlichkeit und Systematik zu erreichen, und bis zu einem gewissen Grade kann auch erzielt werden, dass diese Systematik etwas Reellem — den wirklichen Verhältnissen — entspricht.

Es verhält sich nämlich so, dass während in Ermangelung direkt beobachteten Materials die Grundlage für eine Herstellung einer korrekten Sterblichkeitstafel fehlt, hat man, wie Dr. Blaschke[1] und Dr. Pedersen gezeigt haben, in der Todesursachenstatistik ein Mittel, wodurch man die relative Gefährlichkeit der verschiedenen Krankheiten in den verschiedenen Altern bestimmen kann, und besonders für eine so gewöhnliche Todesursache wie die Tuberkulose liegt hier ein Material von bedeutendem Umfang vor.

Das Material ist in der Form gegeben, dass man für die verschiedenen Alter den Prozent der gesammten Todesfälle, die auf die Tuberkulose fallen, kennt.

Zum Beispiel hat man in dem Material Dr. Pedersen's direkt die 10-jährige Lebenswahrscheinlichkeit für Personen, die dazu prädestiniert sind an Tuberkulose, Herzkrankheit oder desgleichen zu sterben.

Dass diese Lebenswahrscheinlichkeit nicht dieselbe ist wie die einer Person, die einer vorgelegten Gruppe Tuberkulöser angehört, ist klar, teils weil einige von diesen gesund werden und später aus irgendwelchem Grunde sterben, teils weil von der komplementären Gruppe gewisse Personen späterhin von der Tuberkulose angegriffen werden und daran

[1] Blaschke: Denkschrift zur Lösung der Problems der Versicherung minderwertiger Leben. Wien 1895.

sterben, wodurch sie zu den Zahlen in der Todesursachenstatistik beitragen.

Will man daher eine Sterblichkeitstafel für Tuberkulöse herstellen, so muss man von derselben verlangen:

1) dass sie in allen Altern eine grössere Sterblichkeit als die normale aufweist;

2) dass sie dieselben charakteristischen Züge wie die reine Tuberkulosensterblichkeit aufweist, besonders dass sie das charakteristische Maximum der reinen Tuberkulosensterblichkeit im Verhältniss zu der normalen hat;

3) dass die Erhöhung der Sterblichkeit einen Prämienzuschlag von der obengenannten Grösse ergibt.

Um dies zu erzielen, kann man als einfachste Annahme setzen:

$$\mu_x^t = \mu_x + k\,{}^T\mu_x \qquad (1)$$

wo

${}^t\mu_x$ die gesuchte Sterblichkeitsintensität,

μ_x die normale »

und

${}^T\mu_x$ die Intensität der reinen Tuberkulosensterblichkeit bedeutet.

Bei der Wahl der normalen Sterblichkeit hat man sowohl die wirklichen Verhältnisse als die von den dänischen Gesellschaften angewandten Sterblichkeitstafeln zu berücksichtigen.

Die hauptsächlich verwendeten Tafeln sind: »Statsanstaltens Forsørgertavle», »Statsanstaltens Forsikrertavle» und Hafnias Sterblichkeitstafel für skandinavische Leben. Von diesen hat man Hafnias Tafel bevorzugt, weil sie zweifellos eine Sterblichkeit darstellt, die der normalen näher kommt als die der zwei anderen ziemlich veralteten Tafeln. Ausserdem gehen die Gesellschaften mehr und mehr dazu über, diese Tafel zu verwenden.

Die Hafnia-Tafel ist von Prof. Thiele durch eine sehr lange und unbequeme Formel ausgeglichen worden, deren besonderes Vorteil darin zu suchen ist, dass man durch dieselbe Formel auch die Kindersterblichkeit darstellen kann. Für die Alter von 15 Jahren an giebt es eine von Fräulein Karen Eibe vorgenommene Ausgleichung nach der Make-

hamschen Formel, deren Resultat mit Professor THIELE's sehr gut übereinsstimmt. Hätte man nicht darauf Rücksicht nehmen müssen, dass die Prämienerhöhung im Vergleich zu den Tariffen der dänischen Gesellschaften regelmässig verlaufen sollte, wäre die $DM^{(5)}$-Tafel bevorzugt worden; so aber wurde die obengenannte Tafel von Frl. EIBE benutzt.

Nachdem die normale Tafel gewählt war, handelte es sich darum die reine Tuberkulosetafel herzustellen. Hier sind die Untersuchungen von Dr. PEDERSEN[1] aus 1909 zu Grunde gelegt. Aus seiner Tabelle IV a hat man, indem man die Zahlen der Gruppen: 5 und 6 addiert, für $x = 15 . 25 . 35 \ldots 75$ observierte Werte für $\log {}_{10}p_x$ berechnen können. Es wurde zunächst versucht, diese Werte nach einer Makehamschen Formel auszugleichen, indem $\log {}_{10}p_x$ wie bekannt durch diese Formel ausgedrückt werden kann, wenn es μ_x wird. Dies ist aber nicht gelungen. Dagegen wurde ein ganz gutes Resultat erzielt, indem man

$$\log {}_{10}p_x = a + b\,10^{\gamma x} + c\,10^{-\delta x}$$

setzte, und für γ denselben Wert wie in der normalen Tafel verwendete. Nach mehreren Versuchen wurde für δ der Wert $0{,}08$ gewählt. a, b und c wurden dann nach der Methode der kleinsten Kvadrate bestimmt. Als Resultat ergab sich:

$$a = 0{,}095133 \quad b = 0{,}0012850 \quad c = -0{,}48136$$

während:

$$\gamma = 0{,}039862 \quad \delta = 0{,}080 .$$

Ein Vergleich zwischen den berechneten und den observierten Werten von $\log {}_{10}p_x$ gibt das folgende Resultat:

	$\log {}_{10}p_x$		
Alter	ber.	obs.	b : 0
15	0,0699	0,0704	÷ 0,0005
25	0,1031	0,1023	+ „ 8
35	0,1263	0,1299	÷ „ 34
45	0,1749	0,1772	÷ „ 23
55	0,2952	0,2976	÷ „ 24
65	0,5962	0,5952	+ „ 10

[1] Dr. JENS PEDERSEN: Ueber die Versicherung minderwertigen Leben.

Hiernach kann man leicht $\log l_x = A \div Bx - C\,10^{\gamma x} - D\,10^{\delta x}$ berechnen. Man findet

$$A = 0{,}18209 \quad B = 0{,}0095133 \quad C = 0{,}00085444 \quad D = 0{,}57201$$

und zuletzt

$${}^T\mu_x = \alpha + \beta\,10^{\gamma x} + \eta\,10^{-\delta x}$$

indem

$$\alpha = B : M \quad \beta = C\gamma : M^2 \quad \eta = \div D\delta : M^2$$

d. h.

$$\alpha = 0{,}021904 \quad \beta = 0{,}00018058 \quad \eta = \div 0{,}24263.$$

Für die normale Sterblichkeitsintensität gilt die Formel:

$$\mu_x = 0{,}0030591 + 0{,}000094393 \,.\, 10^{\gamma x}. \qquad (2)$$

Nach einigen Versuchen wurde für die Konstante k in der Formel (1) der Wert 0,4 gewählt.

Aus (1) ergiebt sich dann:

$${}^t\mu_x = 0{,}0118207 + 0{,}000166625 \,.\, 10^{\gamma x} - 0{,}097052 \,.\, 10^{-\delta x}$$

und:

$$\log {}^t l_x = 0{,}094565 - 0{,}00513361\,x - 0{,}000788390 \,.\, 10^{\gamma x} - 0{,}228809 \,.\, 10^{-\delta x}$$

nach welcher Formel die im Anhang abgedruckte Tuberkulosentafel berechnet ist. Die Konstante 0,094565 ist in der Weise bestimmt, dass $\log {}^t l_{15} = 0$ wird.

Die Tuberkulosentafel wird hauptsächlich für solche Versicherte verwendet, die an der Tuberkulose leiden oder gelitten haben oder der Tuberkulose verdächtig sind. Die Graduation geschieht niemals durch Alterserhöhung, weil der Charakter der Tafel dadurch verändert wird. Im allgemeinen wird für die Fälle, wo der Betreffende an einer frischen Tuberkulose leidet, eine Karenzzeit von etwa 5 Jahren verwendet. Nur in den schlimmsten Fällen wird ein prozentischer Zuschlag zur Prämie gefordert. Die Tafel ergibt

recht hohe Prämien für die milderen Fälle. Diese Ungerechtigkeit wird jedoch dadurch vermindert, dass es die Regel ist, dass dem Versicherten nach einigen Jahren die Möglichkeit geöffnet wird, durch ein neues ärztliches Zeugnis sich von dem Prämienzuschlag ganz oder teilweise zu befreien.[1]

Ausser den Tuberkulösen sind bisweilen andere minderwertige Leben nach der Tuberkulosentafel behandelt worden, wenn es sich um eine Krankheit handelte, deren Verlauf ein ähnlicher ist wie derjenige der Tuberkulose. Für die Fälle, wo die Tafel zweifellos zu streng ist, wird die Minimaltafel, ev. mit einem Prämienzuschlag, verwendet.

Beispiele von Prämien und Prämienreserven finden sich im Anhang Pag. 183 und 187.

B. Die Herztafel.

Ebenso wie bei der Tuberkulose zeigt sich in der Praxis bei den Herzkrankheiten, dass es eine grosse Menge von Fällen gibt, wo die Herzkrankheit als eine »mittlere« anzusehen ist, für welche das Komité die Praxis hatte für einen 25-jährigen einen Zuschlag von:

ca. 20 % für eine Versicherung mit Auszahlung im Alter 50
» 35 % » » » » » » 60

zu verlangen.

Es war zu erwarten, dass es schwieriger sein würde für diese Gruppe mit Hilfe der Todesursachenstatistik eine Sterb-

[1] Man hat die Frage aufgeworfen, ob es prinzipiell erlaubt sei einen Prämienzuschlag nach mehreren Jahren wegen eines neuen Attestes wegfallen zu lassen. Die Antwort dürfte sein, dass es von der Grösse des Zuschlags abhängt. Wenn der Zuschlag so gering ist, dass er nach der Bemessung des Risikos am Beginn der Versicherung als für die ganze Versicherungszeit passend angesehen werden muss, darf man ihn später nicht wegfallen lassen. Wenn es sich dagegen um einen grösseren Zuschlag handelt, der wegen besonderer Verhältnisse gefordert ist, die als vorübergehend anzusehen sind, muss der Betreffende die Möglichkeit haben sich später davon zu befreien, und es muss ausdrücklich in der Police angeführt werden, nach wievielen Jahren der Zuschlag ev. wegfallen kann. Ein typisches Beispiel erster Art ist die 5—10 jährige Alterserhöhung, mit welcher die Syfilitiker in der Regel angenommen werden; ein Beispiel der Zuschläge zweiter Art ist der Tropenzuschlag.

lichkeitstafel zu berechnen; denn die Gruppe der Personen, die an einer Herzkrankheit sterben, und die der Personen, die an einer Herzkrankheit in den jüngeren Jahren leiden, fallen wahrscheinlich nicht so nahe zusammen wie die analogen Gruppen der Tuberkulösen. Während nämlich die Tuberkulose im allgemeinen als einzige Todesursache hervortritt, werden vielfach Todesfälle, bei denen eine Herzschwäche ein wesentliches Moment gewesen ist, einer anderen Todesursache zugeschrieben. (In der Statistik findet man nämlich nur die Hauptursache.) Dieser Umstand lässt erwarten, dass die »reine Herzsterblichkeit» als eine zu kleine auskommen wird. Daher sind bei der Wahl der Todesursachen auch einige mitgerechnet worden, die zwar nicht als Herzkrankheiten anzusehen sind, aber wohl wahrscheinliche Todesursachen für Personen von dieser Gruppe sind. Hierbei ist zu bemerken, dass die Tafel auch für Syfilitiker anwendbar sein sollte.[1]

Aus Dr. PEDERSEN's Statistik Tab. IV a S. 46 wurden die folgende Todesursachen bei der Bestimmung der reinen Herzsterblichkeit mitgenommen:

Syfilis,
Chronische Gehirnkrankheit,
Rückenmarkkrankheit,
Chronische Leberkrankheit,
Herz- und Gefässkrankheit,

und aus der Dekrementtabelle für diese Todesursachen wurden demnach, ganz wie bei der der Tuberkulosentafel, die Werte von $\log p_{x.\overline{10|}}$ gebildet und nach der Methode der kleinsten Kvadrate ausgeglichen. Es ergab sich als Resultat:

$$\log p_{x.\overline{10|}} = 0{,}009340 + 0{,}00047217 \,.\, 10^{0{,}045305\,.\,x}. \qquad (3)$$

Für die Werte von x von 15—55 ist die Übereinstimmung sehr gut, wie die folgende Tabelle zeigt:

[1] Für die leichtesten Syfilisfälle ist die Tafel jedoch als zu streng anzusehen.

x	log p obs.	log p ber.	Δ
15	0,0114	0,0116	— ,0002
25	,0147	,0157	— ,0010
35	,0273	,0275	— ,0002
45	,0638	,0610	+ ,0018
55	,1554	,1558	— ,0004

Die hierzu gehörigen Werte von ${}^{H}\mu_x$ zeigten eine ganz überraschend geringe Sterblichkeit, eine Sterblichkeit, die in den jüngsten Jahren beträchtlich unter der normalen liegt, und in den höheren Altern nur 1,5 bis 2mal der normalen beträgt.

Dass eine Person, die an einer Herzkrankheit leidet, eine geringere Sterblichkeit als eine normale Person aufweisen sollte, kann man natürlich nicht annehmen. Wenn man zu diesem Resultat kommt, muss man es dem Umstand zuschreiben, dass die Herzkrankheiten gewöhnlich nicht als selbständige Todesursachen in der Statistik vorkommen. Besonders auffallend ist der Umstand, dass in den jüngern Altern fast keine Sterblichkeit vorhanden ist. Man darf hieraus jedenfalls entnehmen — was auch mit der allgemeinen Erfahrung übereinstimmt —, dass die Sterblichkeit Herzleidender in den jüngeren Jahren von der normalen nur wenig abweicht. Nach einiger Überlegung hat man daher eine Herztafel gewählt, die dadurch bestimmt wurde, dass man in der Formel (1) $k = 1$ setzte und ausserdem den Koeffizienten des Exponentialgliedes in ${}^{H}\mu_x$ um 50 % erhöhte.

Für die reine Herztafel findet man aus:

$$ {}^{H}\mu_x = 0{,}0021506 + 0{,}000061699 \cdot 10^{0{,}045305\,x} \tag{4} $$

und hieraus in Verbindung mit (2):

$$ {}^{h}\mu_x = 0{,}0052097 + 0{,}000034393 \cdot 10^{0{,}039862\,x} + 0{,}000092548 \cdot 10^{0{,}045305\,x} $$

woraus man leicht findet:

$$ \log {}^{h}l_x = A - Bx - C\,10^{\beta x} - D\,10^{\varkappa x} $$

wo:

$$A = 0{,}0375494,\ B = 0{,}0022625,\ C = 0{,}00044663,\ D = 0{,}00038529,$$

$$\gamma = 0{,}039862,\ \varkappa = 0{,}045305,$$

nach welcher Formel die im Anhang abgedruckte Herztafel berechnet worden ist. A ist in derselben Weise wie bei der Tuberkulosetafel bestimmt worden.

Die Herztafel hat sich bei der Arbeit des Komités als sehr nützlich erwiesen. Ungefähr die Hälfte der Fälle werden nach dieser Tafel, ev. mit 2—5 Jahren Alterserhöhung, berechnet.

C. Die Albuminurietafel.

Die dritte Tafel, welcher der Name: Albuminurietafel gegeben ist, ist für solche Personen bestimmt, deren Sterblichkeitswahrscheinlichkeit die ganze Versicherungszeit hindurch als beträchtlich erhöht angesehen werden darf. Die häufigsten Krankheiten, die dieser Kategorie beigezählt werden, sind: Die Albuminurie, die Zuckerkrankheit und der chronische Alkoholismus. Ausserdem wird diese Tafel in einer Reihe von Fällen verwendet, wo es sich um spezielle Krankheiten handelt, für welche aus der Todesursachenstatistik kein Resultat zu erwarten ist; und auch für die obenerwähnten Krankheiten sind die Zahlen in Dr. PEDERSEN's Statistik so klein, dass sie für die Konstruktion einer reinen Albuminurietafel nicht verwendbar schienen. Die Tafel wurde daher in der einfachen Weise konstruiert, dass aus der Sterblichkeitsintensität der normalen Tafel die der Albuminurietafel dadurch gebildet wurde, dass das konstante Glied mit 3, das Exponentialglied mit 4 multipliziert wurde.

Die Sterblichkeitsintensität und die Dekrementtabelle wurden somit nach der Formel gerechnet:

$$^{a}\mu_x = 0{,}0091773 + 0{,}00037757 \,.\, 10^{0{,}039862 \,.\, x}$$

und:

$$\log {}^{a}l_x = 0{,}066862 - 0{,}0039856\,x - 0{,}0017865 \,.\, 10^{\gamma x}.$$

Die Tabelle findet sich im Anhang. Sie wird von dem Komité oft angewendet, meist ohne Karenzzeit. Bei den

schlimmsten Fällen wird eine Alterserhöhung gebraucht; im allgemeinen genügten jedoch die Prämien, wie man sie aus der Tabelle berechnet, und diese sind auch, wie man aus den Beispielen Seite 184 ersehen wird, sehr hoch. Dies hängt aber mit der dänischen Auffassung der Gefährlichkeit der Albuminurie zusammen.

Die Minimaltafel.

Nachdem die Verwendung dieser drei Tafeln ein paar Monate versucht war, erwies es sich als erforderlich eine Tafel zu beschaffen, die eine geringere Sterblichkeit als die drei obenbeschriebenen aufwies. Diese Tafel wurde »Minimaltafel» genannt, weil sich aus dieser Tafel die billigsten Prämien des Komités berechneten.

Die Tafel, deren Hauptzweck ist für alle diejenigen Personen zu gelten, für welche die anderen drei Tafeln zu streng scheinen, wird natürlich oft mit Alterserhöhung gebraucht.

Bei der Konstruktion dieser Tafel war eigentlich nur zu berücksichtigen, dass die Prämien nirgends niedriger als die der teilnehmenden dänischen Gesellschaften, und dass sie nicht zu hoch für die besten der vorkommenden minderwertigen Leben würden. Nach Vergleichung mit den am meisten verwendeten Tafeln wurde die Minimaltafel dadurch bestimmt, dass das konstante Glied ihrer Sterblichkeitsintensität 2mal, das Exponentialglied $1\frac{1}{2}$mal dem der normalen Tafel gesetzt wurde. Dass das konstante Glied stärker erhöht werden muss, beruht darauf dass der Sterblichkeitsintensität der Hafnia-Tafel überall der Addend 0,00125 hinzugefügt ist, sodass diese Grösse eigentlich unsrer normalen Tafel addiert werden muss, wenn sie im Verhältniss zu der Hafnia-Tafel gesehen werden soll.

Die Minimaltafel ist somit nach den Formeln berechnet worden:

$$^{m}\mu_x = 0{,}0061182 + 0{,}000141590 \,.\, 10^{\gamma x}$$

$$\log {}^{m}l_x = 0{,}042512 - 0{,}0026571\,x - 0{,}00066994 \,.\, 10^{\gamma x}$$

$$\gamma = 0{,}039862.$$

Tabellen und Beispiele finden sich im Anhang.

Die praktische Verwendung der Tafeln.

Prämien- und Prämienreservenberechnung.

Die Schwierigkeit für den Versicherungsmathematiker, der mit minderwertigen Leben arbeiten muss, liegt in dem Umstand, dass er sowohl den Grad als die Art der Krankheit berücksichtigen muss.

Bei den vorliegenden Tafeln ist die Art der Krankheit als Basis der Teilung gelegt. Die rationellste Methode den Grad zu berücksichtigen wäre wohl, dem Konstanten k in der Gleichung (1) verschiedene Werte zu geben. Dies würde aber die Herstellung einer grossen Menge von Tafeln fordern und muss daher als unpraktisch abgewiesen werden. In der Praxis muss man entweder eine Alterserhöhung oder einen prozentischen Zuschlag zur Prämie benutzen. Die erste Methode giebt einen grossen Zuwachs der Sterblichkeit in den hohen Altern, ein kleineres in den niedrigen, und infolgedem eine grosse Prämienreserve. Die zweite Methode bedeutet bei Todesfallsversicherung und gemischter Versicherung eine konstante Erhöhung der Sterblichkeit und beeinflusst die Reserve gar nicht.

Welche von den Methoden man bevorzugen will, hängt von der Natur des vorliegenden Falles ab. In der Regel wird man ohne Schaden bei der Herz-, Albuminurie- und Minimaltafel Alterserhöhung verwenden können, während bei der Tuberkulosetafel ein einfacher Prämienzuschlag benutzt werden kann.

Wenn die Grundlage für die Bestimmung der Nettoprämien gewählt ist, muss man für die Bildung der Bruttoprämien eine Regel bestimmen.

Um das Tabellenmaterial nicht allzu gross zu machen, wurden nur kontinuierte Leibrenten bei der Berechnung der Nettoprämien benutzt. Dieses Verfahren, das von Dr. F. Lundberg so stark empfohlen worden ist, erleichtert die Rechnenarbeit bedeutend und führt zu den einfachsten Formeln für Prämienreserve und Rückkaufswert.

Da die Kosten bei den minderwertigen Leben grösser als bei den normalen sein müssen, ist ein Zuschlag zur Nettoprämie von etwa 20 % als passend angesehen und die Brutto-

prämien aus den kontinuierten Nettoprämien durch Multiplikation mit folgenden Faktoren gebildet:

Für	$\frac{1}{1}$	jährige	Prämienzahlung	1,17
»	$\frac{1}{2}$	»	»	1,19
»	$\frac{1}{4}$	»	»	1,20

Die Monatsprämien, die den Volksversicherungen mehr ähnlich sind und daher etwas höher sein dürfen, werden durch Multiplikation mit 1,26 gebildet.

Die Berechnung der Prämienreserve wird nach denselben Tafeln, nach welchen die Prämien berechnet sind, stattfinden. Dies ist natürlich mit grösserer Mühe verbunden als die gewöhnliche Methode, die z. B. in »Sverige» benutzt wird, wo die Reserve nach derselben Tafel für alle Versicherungen berechnet wird; diese Methode ist aber wenig rationell. Wenn von zwei Versicherungen die eine nach der Herztafel, die andere nach der Tuberkulosetafel berechnet wird, ist es klar, dass die nach der Herztafel berechnete einen viel grösseren Rückkaufswert in den ersten Jahren haben muss, als die andere, und infolgedem muss auch eine grössere Prämienreserve für die erstere vorhanden sein.

Eine Methode, die fast immer zu hohe Reserven giebt, ist die Verwendung einer Alterserhöhung, die dieselbe Nettoprämie wie die bei der Prämienberechnung gefundene giebt; allein eine Reserve, die sicher allzu hoch ist, ist gar nicht wünschenswert. Sie wird das finanzielle Resultat des Geschäfts als geringere vermuten lassen, als es wirklich ist, und giebt daher Anlass zu Ungerechtigkeiten bei der Gewinnverteilung.

Natürlich muss man, wenn das finanzielle Resultat sich günstiger als erwartet gestaltet, eine grössere Sicherheitsreserve hinlegen als es bei normalen Leben notwendig ist, weil die Grundlage hier eine unsichere ist; aber die eigentliche Prämienreserve muss nach derjenigen Sterblichkeit berechnet werden, die als die wahrscheinlichste anzusehen ist.

Im Anhang finden sich Beispiele von Prämienreserven nach den neuen Tafeln. Zum Vergleich sind die Reserven für dieselben Versicherungen nach der Hafnia-Tafel mit oder ohne Alterserhöhung mitgenommen. Die Beispiele sind lebenslängliche Lebensversicherung und gemischte Versicherung mit

einer Dauer von 30 Jahren. Die letztere ist sowohl für Eintrittsalter 20 als 30 berechnet, damit man die Bedeutung einer 10-jährigen Alterserhöhung innerhalb der Tafeln sehen kann.

Es muss nur noch einmal ausdrücklich betont werden, dass wir gar nicht der Ansicht sind, dass wir bei der Herstellung dieser Tafel wirkliche Sterblichkeitstafeln, die für längere Zeit verwendbar sein werden, berechnet haben.

Es handelt sich hier nur um ein vorläufiges Hilfsmittel, dessen hauptsächlichster Zweck ist, in die Prämien- und Prämienreservenberechnung, sowie in die Berechnung der Rückkaufswerte und Policeänderungen System zu bringen, und eine Grundlage für die statistischen Untersuchungen der Zukunft durch eine geeignete Gruppenteilung der minderwertigen Leben zu schaffen.

Kopenhagen, im November 1918.

Beispiele von Prämien für minderwertige Leben.

Art der Versicherung	Alter	Minimaltafel			Tuberkulosetafel		
		Netto-prämie	Brutto-prämie	Er-höhung	Netto-prämie	Brutto-prämie	Er-höhung
Lebenslängliche Lebensversicherung	15	13,98	16,36	22 %	18,20	21,29	58 %
	20	15,99	18,71	24 %	20,97	24,53	63 %
	25	18,57	21,73	25 %	23,97	28,04	61 %
	30	21,89	25,61	25 %	27,66	32,36	59 %
	35	26,22	30,68	25 %	32,42	37,93	56 %
	40	31,96	37,39	26 %	38,73	45,31	53 %
	45	39,63	46,37	27 %	47,23	55,26	52 %
	50	50,05	58,56	28 %	58,87	68,88	51 %
Gemischte Versicherung bis 50	15	20,44	23,92	11 %	23,71	27,74	29 %
	20	24,95	29,19	11 %	28,82	33,73	28 %
	25	31,46	36,81	10 %	35,55	41,60	25 %
	30	41,41	48,45	9 %	45,57	53,32	21 %
	35	58,19	68,09	8 %	62,38	73,00	16 %

Art der Versicherung	Alter	Minimaltafel			Tuberkulosetafel		
		Netto-prämie	Brutto-prämie	Er-höhung	Netto-prämie	Brutto-prämie	Er-höhung
Gemischte Versicherung bis 60	15	16,17	18,92	17 %	19,87	23,26	43 %
	20	18,94	22,16	17 %	23,32	27,29	45 %
	25	22,66	26,52	17 %	27,34	31,99	42 %
	30	27,76	32,48	15 %	32,60	38,15	36 %
	35	35,03	40,99	14 %	40,01	46,81	31 %
	40	45,96	53,78	13 %	51,11	59,80	26 %

Beispiele von Prämien für minderwertige Leben.

Art der Versicherung	Alter	Herztafel			Albuminurietafel		
		Netto-prämie	Brutto-prämie	Er-höhung	Netto-prämie	Brutto-prämie	Er-höhung
Lebenslängliche Lebensversicherung	15	15,94	18,65	39 %	21,38	25,01	87 %
	20	18,79	21,98	45 %	24,78	28,99	91 %
	25	22,54	26,37	50 %	29,24	34,21	96 %
	30	27,49	32,16	56 %	35,17	41,15	100 %
	35	34,13	39,93	62 %	43,12	50,45	105 %
	40	43,22	50,57	68 %	53,98	63,16	111 %
	45	55,90	65,40	77 %	69,00	80,73	119 %
	50	73,96	86,53	87 %	90,12	105,40	129 %
Gemischte Versicherung bis 50	15	20,73	24,25	13 %	25,16	29,43	37 %
	20	25,59	29,93	13 %	30,26	35,40	35 %
	25	32,53	38,06	14 %	37,53	43,90	32 %
	30	43,04	50,36	13 %	48,51	56,75	28 %
	35	60,57	70,87	12 %	66,61	77,93	24 %
Gemischte Versicherung bis 60	15	17,08	19,98	23 %	22,12	25,87	60 %
	20	20,37	23,83	26 %	25,84	30,24	60 %
	25	24,77	28,98	27 %	30,80	36,03	59 %
	30	30,81	36,04	28 %	37,54	43,92	56 %
	35	39,33	46,03	28 %	47,06	55,05	54 %
	40	52,05	60,89	28 %	60,91	71,29	50 %

Beispiele von Prämienreserven bei der Minimaltafel.

20-jährige Person: Gemischte Versicherung auf 30 Jahre.
Die Summe: 10,000 Kr.

Versicherungsjahr	Alter	Prämienreserve bei folgenden Tafeln:		
		Minimaltafel	Hafnias Tafel	Hafnias Tafel + 11 Jahre
0	20	0	0	0
5	25	982	972	1,042
10	30	2,159	2,159	2,264
15	35	3,572	3,593	3,694
20	40	5,279	5,321	5,377
25	45	7,368	7,414	7,411
30	50	10,000	10,000	10,000
Nettoprämie		24,95 ‰	23,10 ‰	25,01 ‰

30-jährige Person: Gemischte Versicherung auf 30 Jahre.
Die Summe: 10,000 Kr.

Versicherungsjahr	Alter	Prämienreserve bei folgenden Tafeln:		
		Minimaltafel	Hafnias Tafel	Hafnias Tafel + 8 Jahre
0	30	0	0	0
5	35	1,038	1,031	1,106
10	40	2,250	2,250	2,362
15	45	3,664	3,680	3,787
20	50	5,330	5,370	5,425
25	55	7,351	7,411	7,392
30	60	10,000	10,000	10,000
Nettoprämie		27,77 ‰	24,74 ‰	28,03 ‰

Beispiele von Prämienreserven bei der Albuminurietafel.

20-jährige Person: Gemischte Versicherung auf 30 Jahre.
Die Summe: 10,000 Kr.

Versicherungsjahr	Alter	Prämienreserve bei folgenden Tafeln:		
		Albuminurietafel	Hafnias Tafel	Hafnias Tafel + 21 Jahre
0	20	0	0	0
5	25	1,006	972	1,147
10	30	2,189	2,159	2,425
15	35	3,584	3,593	3,848
20	40	5,239	5,321	5,459
25	45	7,280	7,414	7,382
30	50	10,000	10,000	10,000
Nettoprämie		30,25 ‰	23,10 ‰	30,00 ‰

30-jährige Person: Gemischte Versicherung auf 30 Jahre.
Die Summe: 10,000 Kr.

Versicherungsjahr	Alter	Prämienreserve bei folgenden Tafeln:		
		Albuminurietafel	Hafnias Tafel	Hafnias Tafel + 18 Jahre
0	30	0	0	0
5	35	1,159	1,031	1,256
10	40	2,439	2,250	2,631
15	45	3,843	3,680	4,060
20	50	5,404	5,370	5,584
25	55	7,271	7,411	7,360
30	60	10,000	10,000	10,000
Nettoprämie		37,55 ‰	24,74 ‰	37,15 ‰

Beispiele von Prämienreserven bei der Tuberkulosetafel.

20-jährige Person: Gemischte Versicherung auf 30 Jahre.
Die Summe: 10,000 Kr.

Versicherungsjahr	Alter	Prämienreserve bei folgenden Tafeln: Tuberkulosetafel	Hafnias Tafel	Hafnias Tafel + 19 Jahre
0	20	0	0	0
5	25	956	972	1,118
10	30	2,082	2,159	2,381
15	35	3,449	3,593	3,806
20	40	5,134	5,321	5,436
25	45	7,249	7,414	7,389
30	50	10,000	10,000	10,000
Nettoprämie		28,82 ‰	23,10 ‰	28,63 ‰

30-jährige Person: Gemischte Versicherung auf 30 Jahre.
Die Summe: 10,000 Kr.

Versicherungsjahr	Alter	Prämienreserve bei folgenden Tafeln: Tuberkulosetafel	Hafnias Tafel	Hafnias Tafel + 14 Jahre
0	30	0	0	0
5	35	990	1,031	1,194
10	40	2,153	2,250	2,499
15	45	3,532	3,680	3,920
20	50	5,173	5,370	5,501
25	55	7,238	7,411	7,371
30	60	10,000	10,000	10,000
Nettoprämie		32,60 ‰	24,74 ‰	32,57 ‰

Beispiele von Prämienreserven bei der Hertztafel.

20-jährige Person: Gemischte Versicherung auf 30 Jahre.
Die Summe: 10,000 Kr.

Versicherungsjahr	Alter	Prämienreserve bei folgenden Tafeln:		
		Herztafel	Hafnias Tafel	Hafnias Tafel + 13 Jahre
0	20	0	0	0
5	25	1,029	972	1,064
10	30	2,241	2,159	2,287
15	35	3,667	3,593	3,715
20	40	5,356	5,321	5,387
25	45	7,395	7,414	7,406
30	50	10,000	10,000	10,000
Nettoprämie		25,59 ‰	23,10 ‰	25,68 ‰

30-jährige Person: Gemischte Versicherung auf 30 Jahre.
Die Summe: 10,000 Kr.

Versicherungsjahr	Alter	Prämienreserve bei folgenden Tafeln:		
		Herztafel	Hafnias Tafel	Hafnias Tafel + 12 Jahre
0	30	0	0	0
5	35	1,149	1,031	1,159
10	40	2,444	2,250	2,447
15	45	3,883	3,680	3,870
20	50	5,497	5,370	5,470
25	55	7,397	7,411	7,378
30	60	10,000	10,000	10,000
Nettoprämie		30,81 ‰	24,74 ‰	30,80 ‰

Minimaltafel. $\frac{7}{8}$ % $\frac{1}{4}$ jährlicher Zins.

Alter nächsten Geburtstag	q_x	l_x	D_x	N_x	$\bar{M}_x$	$\bar{N}_x$	$\bar{a}_x$
15	0,00668	1,00000	0,59291	12,52719	0,16676	12,229	20,625
16	673	0,99332	56878	11,93428	16287	11,648	20,479
17	679	98662	54560	11,36550	15910	11,091	20,328
18	686	97991	52333	10,81990	15545	10,557	20,172
19	693	97318	50193	10,29657	15191	10,044	20,011
20	701	96643	48138	9,79464	14850	9,5525	19,844
21	709	95964	46163	9,31326	14517	9,0812	19,672
22	718	95282	44265	8,85163	14196	8,6286	19,493
23	729	94595	42441	8,40898	13881	8,1954	19,310
24	740	93903	40687	7,98457	13578	7,7794	19,120
25	752	93205	39002	7,57770	13280	7,3811	18,925
26	766	92500	37381	7,18768	12990	6,9992	18,724
27	781	91788	35823	6,81387	12707	6,6333	18,517
28	797	91067	34324	6,45564	12430	6,2827	18,304
29	815	90336	32883	6,11240	12160	5,9466	18,084
30	834	89595	31496	5,78357	11894	5,6249	17,859
31	855	88841	30162	5,46861	11634	5,3167	17,627
32	879	88074	28877	5,16699	11378	5,0214	17,389
33	904	87293	27641	4,87822	11126	4,7390	17,145
34	933	86494	26450	4,60181	10878	4,4685	16,894
35	964	85679	25303	4,33731	10633	4,2097	16,637
36	00997	84843	24198	4,08428	10391	3,9622	16,374
37	01034	83985	23133	3,84230	10150	3,7256	16,105
38	1075	83104	22107	3,61097	099118	3,4995	15,830
39	1120	82198	21117	3,38990	096746	3,2835	15,549
40	1168	81263	20162	3,17873	94387	3,0771	15,262
41	1222	80298	19240	2,97711	92029	2,8802	14,970
42	1280	79300	18350	2,78471	89684	2,6921	14,671
43	1345	78266	17491	2,60121	87331	2,5131	14,368
44	1415	77194	16660	2,42630	84979	2,3422	14,059
45	1492	76080	15857	2,25970	82614	2,1797	13,746
46	1577	74922	15081	2,10113	80242	2,0251	13,428
47	1670	73716	14330	1,95032	77855	1,8781	13,106
48	1772	72459	13603	1,80702	75450	1,7385	12,780
49	01883	71147	12900	1,67099	73031	1,6060	12,450
50	02005	69778	12218	1,54199	70599	1,4802	12,115

Minimaltafel. [%] jährlicher Zins.

Alter nächsten Geburtstag	q_x	l_x	D_x	N_x	M_x	N_x	a_x
50	0,02005	0,69778	0,12218	1,54199	0,070599	1,4802	12,115
51	2139	68348	11558	1,41981	68137	1,3614	11,779
52	2286	66853	10918	1,30423	65649	1,2491	11,441
53	2447	65290	10298	1,19505	63143	1,1431	11,100
54	2624	63656	096960	1,092105	60610	1,0431	10,758
55	2817	61949	91128	0,995145	58054	0,94910	10,415
56	3029	60165	85473	904017	55473	86088	10,072
57	3261	58303	79992	818544	52877	77808	9,727
58	3516	56362	74679	738552	50255	70086	9,385
59	3795	54340	69534	663873	47624	62873	9,042
60	4101	52237	64555	594339	44983	5616	8,700
61	4437	50056	59740	529784	42336	4994	8,360
62	4804	47797	55091	470044	39682	4422	8,026
63	5207	45464	50608	414953	37040	3893	7,693
64	5649	43064	46294	364345	34417	3408	7,362
65	6133	40602	42152	318051	31814	2967	7,038
66	6664	38087	38187	275899	29250	2565	6,716
67	7246	35529	34403	237712	26729	2202	6,401
68	7884	32942	30805	203309	24266	1876	6,091
69	8583	30340	27400	172504	21877	1585	5,785
70	09349	27740	24194	145104	19568	1327	5,487
71	10189	25160	21192	120910	17356	1101	5,195
72	11109	22620	18401	099718	15252	09029	4,907
73	12119	20141	15823	81317	13272	07320	4,627
74	13225	17745	13463	65494	011423	05855	4,350
75	14437	15455	011324	52031	0097139	04620	4,080
76	15766	13290	0094042	407060	81549	3585	3,812
77	17223	11270	77020	313024	67500	2732	3,547
78	18820	094126	62121	236004	55021	2038	3.280
79	20570	077310	49276	173883	44109	1483	3,009
80	22489	062345	38377	0124607	34732	01046	2,725
81	24592	04928	29295	0086230	2682	007094	2,421
82	26897	03810	21873	56935	2029	4545	2,078
83	29424	03875	15944	35062	1502	2665	1,672
84	32194	02114	11316	19118	1086	1313	1,160
85	35230	01509	0007802	0007802	0007676	000365	0,468

Tuberkulosetafel. $\frac{7}{8}$ % $\frac{1}{4}$ jährlicher Zins.

Alter nächsten Geburtstag	μ_x	l_x	D_x	N_x	M_x	$\bar{N}_x$	$\bar{a}_x$
15	0,00636	1,00000	0,59291	11,59866	0,19912	11,301	19,059
16	745	0,99310	56865	11,00575	19512	10,719	18,850
17	838	98526	54484	10,43710	19071	10,162	18,652
18	917	97665	52158	9,89226	18602	9,6294	18,462
19	00984	96740	49895	9,37068	18116	9,1193	18,277
20	01043	95764	47700	8,87173	17621	8,6314	18,095
21	094	94746	45577	8,39473	17123	8,1650	17,915
22	139	93694	43527	7,93896	16626	7,7195	17,735
23	179	92614	41552	7,50369	16132	7,2944	17,555
24	216	91510	39651	7,08817	15646	6,8884	17,373
25	250	90389	37823	6,69166	15168	6,5011	17,188
26	283	89251	36068	6,31343	14701	6,1317	17,000
27	314	88100	34384	5,95275	14243	5,7796	16,809
28	344	86937	32768	5,60891	13798	5,4438	16,613
29	374	85764	31218	5,28123	13363	5,1239	16,413
30	405	84580	29733	4,96905	12939	4,8192	16,208
31	437	83387	28310	4,67172	12527	4,5290	15,998
32	470	82184	26946	4,38862	12125	4,2528	15,783
33	504	80971	25639	4,11916	11735	3,9899	15,562
34	541	79748	24387	3,86277	11354	3,7400	15,336
35	581	78513	23187	3,61890	10983	3,5020	15,103
36	623	77266	22037	3,38703	10621	3,2760	14,866
37	669	76005	20935	3,16666	10268	3,0612	14,622
38	718	74729	19879	2,95731	099221	2,8571	14,373
39	772	73436	18866	2,75852	095842	2,6635	14,118
40	831	72125	17894	2,56986	092534	2,4796	13,857
41	895	70794	16963	2,39092	089288	2,3054	13,591
42	01965	69442	16069	2,22129	086106	2,1402	13,319
43	02041	68065	15211	2,06060	082977	1,9838	13,042
44	125	66662	14387	1,90849	079898	1,8358	12,760
45	216	65232	13596	1,76462	076861	1,6960	12,474
46	316	63770	12836	1,62866	073868	1,5639	12,183
47	426	62277	12106	1,50030	070911	1,4392	11,888
48	546	60749	11405	1,37924	067994	1,3216	11,588
49	677	59183	10731	1,26519	065107	1,2110	11,285
50	821	57579	10082	1,15788	062248	1,1069	10,979

Tuberkulosetafel. $\frac{7}{8}$ % $\frac{1}{4}$ jährlicher Zins.

Alter nächsten Geburtstag	q_x	l_x	D_x	N_x	M_x	N_x	a_x
50	0,02821	0,57579	0,10082	1,15788	0,062248	1,1069	10,979
51	02979	55934	094588	1,057072	59414	1,0094	10,671
52	03152	54246	88591	0,962484	56613	0,91763	10,358
53	03341	52514	82825	873893	53832	83198	10,045
54	03549	50737	77281	791068	51076	75195	9,730
55	03777	48913	71952	713787	48343	67735	9,414
56	04026	47041	66829	641835	45645	60802	9,098
57	04300	45125	61911	575006	42967	54370	8,782
58	04600	43161	57189	513095	40318	48410	8,465
59	04928	41155	52663	455906	37707	42921	8,150
60	05288	39107	48328	403243	35130	37874	7,837
61	05683	37020	44182	354915	32598	33248	7,525
62	06116	34901	40227	310733	30110	29028	7,216
63	06590	32754	36459	270506	27676	25200	6,912
64	07110	30586	32881	234047	25308	21731	6,609
65	07680	28407	29492	201166	23004	18616	6,312
66	08304	26227	26296	171674	20782	15825	6,018
67	08989	24056	23293	145378	18641	13350	5,731
68	09740	21906	20485	122085	16595	11162	5,449
69	10562	19793	17875	101600	14654	092451	5,172
70	11464	17730	15464	083725	12822	075803	4,902
71	12452	15733	13252	068261	011111	061464	4,638
72	13536	13817	011240	055009	0095247	049230	4,380
73	14724	11997	0094252	0437698	80688	038916	4,129
74	16025	10289	78061	0343446	67491	030319	3,884
75	17452	087039	63775	0265385	55675	023240	3,644
76	19016	072543	51333	0201610	45235	017494	3,408
77	20730	059476	40645	0150277	36145	012913	3,177
78	22610	047893	31609	0109632	28363	0093119	2,946
79	24670	037818	24104	0078023	21826	65394	2,713
80	26927	029224	17989	53919	16440	44468	2,472
81	29402	022052	13109	35930	12098	29024	2,214
82	32115	016220	093119	228205	086890	17889	1,921
83	35089	011593	064275	135086	060759	10091	1,570
84	38348	0080308	043002	070811	041333	047818	1,112
85	41921	0053777	027809	027809	027361	012848	0,462

Herztafel. $\frac{7}{8}$ % $\frac{1}{4}$ jährlicher Zins.

Alter nächsten Geburtstag	μ_x	l_x	D_x	N_x	$\overline{M}_x$	$\overline{N}_x$	$\bar{a}_x$
15	0,00603	1,00000	0,59291	12,08493	0,18218	11,786	19,879
16	611	0,99394	56913	11,49202	17864	11,206	19,689
17	620	98784	54627	10,92289	17521	10,648	19,492
18	631	98168	52427	10,37662	17185	10,113	19,290
19	642	97546	50310	9,85235	16859	9,5991	19,080
20	655	96917	48274	9,34925	16540	9,1064	18,864
21	669	96276	46313	8,86651	16228	8,6332	18,641
22	684	95629	44426	8,40338	15923	8,1793	18,411
23	701	94969	42609	7,95912	15622	7,7442	18,175
24	720	94297	40858	7,53303	15325	7,3271	17,933
25	740	93612	39172	7,12445	15033	6,9268	17,683
26	763	92910	37547	6,73273	14745	6,5433	17,427
27	788	92193	35981	6,35726	14460	6,1758	17,164
28	816	91455	34471	5,99745	14177	5,8235	16,894
29	847	90698	33015	5,65274	13896	5,4864	16,618
30	881	89918	31610	5,32259	13617	5,1632	16,334
31	918	89115	30255	5,00649	13339	4,8541	16,044
32	00960	88282	28945	4,70394	13061	4,5580	15,747
33	01006	87420	27681	4,41449	12783	4,2751	15,444
34	056	86523	26459	4,13768	12505	4,0043	15,134
35	112	85589	25277	3,87309	12224	3,7458	14,819
36	174	84617	24134	3,62032	11942	3,4987	14,497
37	242	83603	23028	3,37898	11658	3,2628	14,169
38	317	82541	21957	3,14870	11370	3,0380	13,836
39	401	81427	20919	2,92913	11079	2,8236	13,498
40	493	80258	19912	2,71994	10783	2,6196	13,156
41	594	79029	18936	2,52082	10484	2,4253	12,808
42	707	77737	17988	2,33146	10179	2,2408	12,457
43	831	76375	17068	2,15158	098699	2,0656	12,102
44	01968	74938	16173	1,98090	095542	1,8994	11,744
45	02120	73424	15304	1,81917	092338	1,7419	11,382
46	288	71824	14457	1,66613	89052	1,5932	11,020
47	473	70136	13634	1,52156	85716	1,4527	10,655
48	678	68354	12833	1,38522	82317	1,3204	10,289
49	02904	66474	12052	1,25689	7884	1,196	9,924
50	03154	64491	11292	1,13637	7531	1,079	9,558

Herztafel. $\frac{7}{8}$ % $\frac{1}{4}$ jährlicher Zins.

Alter nächsten Geburtstag	q_x	l_x	D_x	N_x	M_x	N_x	a_x
50	0,03154	0,64491	0,11292	1,13637	0,07531	1,079	9,558
51	3431	62404	10553	1,02345	7173	0,9700	9,192
52	3737	60207	098324	0,917934	6807	8682	8,830
53	4076	57903	091325	819610	6437	7734	8,469
54	4449	55488	084519	728285	6063	6854	8,110
55	4863	52965	077912	643766	5685	6043	7,756
56	5320	50338	71510	565854	5305	5296	7,406
57	5825	47613	65325	494344	4926	4611	7,059
58	6384	44795	59353	429019	4545	3989	6,720
59	7002	41897	53611	369666	4168	3424	6,386
60	7685	38933	48113	316055	3795	2916	6,060
61	8441	35919	42869	267942	3430	2461	5,740
62	09276	32876	37893	225073	3072	2057	5,429
63	10201	29827	33200	187180	2727	1702	5,127
64	11222	26800	28810	153980	2396	1392	4,833
65	12352	23823	24733	125170	2081	1125	4,548
66	13603	20926	20980	100437	1786	08965	4,273
67	14985	18140	17565	079457	1511	07042	4,009
68	16515	15500	14495	061892	1260	05440	3,753
69	18206	13032	011769	047397	01033	04130	3,509
70	20077	10762	0093864	0356281	008314	03075	3,276
71	22148	087153	73410	0262417	6560	02242	3,054
72	24436	069062	56179	0189007	5062	01596	2,841
73	26969	053420	41967	0132828	3811	01108	2,640
74	29772	040234	30526	0090861	2792	007473	2,448
75	32871	029421	21557	60335	1985	4891	2,269
76	36301	02082	1473	38778	1365	3093	2,100
77	40095	01422	09718	24048	09061	1884	1,939
78	44295	009324	06154	14330	05771	1101	1,789
79	48940	005853	03731	08176	03517	06145	1,647
80	54079	003498	02153	04445	02039	03266	1,517
81	59766	001981	01178	02292	01121	01641	1,393
82	66059	001057	006068	011145	005797	007761	1,279
83	73024	0005274	002924	005077	2805	003427	1,172
84	80730	0002446	001310	002153	1261	001407	1,074
85	89258	0001047	0005414	0008443	05230	05317	0,982

Albuminurietafel. $\frac{7}{8}$ % $\frac{1}{4}$ jährlicher Zins.

Alter nächsten Geburtstag	μ_x	l_x	D_x	N_x	$\bar{M}_x$	N_x	$\bar{a}_x$
15	0,01067	1,00000	0,59291	10,95312	0,22164	10,654	17,969
16	082	0,98931	56648	10,36021	21539	10,075	17,785
17	097	97859	54115	9,79373	20936	9,5210	17,594
18	115	96783	51687	9,25258	20352	8,9920	17,397
19	134	95701	49359	8,73571	19784	8,4868	17,194
20	154	94613	47127	8,24212	19233	8,0045	16,985
21	177	93516	44985	7,77085	18696	7,5440	16,770
22	202	92411	42931	7,32100	18173	7,1047	16,549
23	230	91294	40960	6,89169	17664	6,6851	16,321
24	259	90165	39068	6,48209	17165	6,2853	16,088
25	292	89022	37251	6,09141	16678	5,9035	15,848
26	328	87864	35508	5,71890	16202	5,5400	15,602
27	368	86687	33832	5,36382	15735	5,1932	15,350
28	411	85492	32224	5,02550	15276	4,8632	15,092
29	458	84274	30677	4,70326	14825	4,5488	14,828
30	510	83033	29189	4,39649	14381	4,2493	14,558
31	567	81765	27759	4,10460	13943	3,9648	14,283
32	630	80469	26383	3,82701	13510	3,6941	14,002
33	698	79141	25059	3,56318	13082	3,4368	13,715
34	773	77780	23785	3,31259	12659	3,1927	13,423
35	856	76382	22558	3,07474	12240	2,9610	13,126
36	.01946	74944	21375	2,84916	11822	2,7413	12,825
37	02045	73464	20235	2,63541	11407	2,5332	12,519
38	153	71939	19136	2,43306	10994	2,3365	12,210
39	272	70365	18077	2,24170	10583	2,1504	11,896
40	402	68741	17055	2,06093	10173	1,9748	11,579
41	544	67062	16069	1,89038	097643	1,8092	11,259
42	701	65327	15117	1,72969	093555	1,6533	10,937
43	02872	63532	14198	1,57852	089470	1,5068	10,613
44	03060	61677	13311	1,43654	085397	1,3692	10,286
45	266	59757	12455	1,30343	081325	1,2404	9,959
46	492	57772	11629	1,17888	077261	1,1200	9,631
47	03739	55722	10832	1,06259	073199	1,0078	9,304
48	04011	53604	10064	0,95427	069160	0,9033	8,976
49	308	51423	093235	0,853615	065130	0,8065	8,650
50	634	49176	086107	0,760380	061129	0,7168	8,324

Albuminurietafel. 3 % ¼ jährlicher Zins.

Alter nächsten Geburtstag	q_x	l_x	D_x	N_x	$\bar{M}_x$	N_x	$\bar{a}_x$
50	0,04634	0,49176	0,086107	0,760380	0,061129	0,7168	8,324
51	04991	46866	79250	674273	57154	6341	8,001
52	05383	44499	72671	595023	53219	5582	7,681
53	05812	42078	66365	522352	49336	4886	7,363
54	06282	39610	60334	455987	45511	4253	7,050
55	06798	37104	54580	395653	41760	3679	6,740
56	07363	34569	49109	341073	38095	3161	6,436
57	07983	32017	43927	291964	34533	2696	6,137
58	08662	29462	39037	248037	31087	2281	5,844
59	09407	26918	34444	209000	27774	1914	5,557
60	10223	24403	30157	174556	24611	1592	5,277
61	11117	21936	26181	144399	21617	1310	5,003
62	12098	19533	22514	118218	18797	1067	4,738
63	13173	17216	19163	095704	16171	08584	4,480
64	14351	15004	16129	76541	13751	06825	4,231
65	15642	12916	13409	60412	011545	5349	3,989
66	17057	10969	10998	47003	009558	4133	3,757
67	18609	09178	08887	36005	7793	3140	3,533
68	20310	07556	7066	27118	6249	2344	3,318
69	22174	06111	5519	20052	4920	1718	3,112
70	24217	04847	4228	14533	3799	01232	2,914
71	26456	03762	3169	010305	2868	008642	2,727
72	28911	02854	2322	007136	2116	5912	2,546
73	31603	02109	1657	4814	1520	3937	2,376
74	34553	01515	1149	3157	1060	2546	2,216
75	37786	01056	07737	20084	07181	1595	2,062
76	41330	007110	5031	12347	4695	09644	1,917
77	45214	4614	3153	07316	2958	05609	1,779
78	49473	2875	1898	4163	1789	03130	1,649
79	54141	1713	1092	2265	1034	01666	1,526
80	59257	09721	005984	11731	005690	008425	1,408
81	64865	05228	3108	005747	2968	4016	1,292
82	71012	02652	1523	2639	1461	1783	1,171
83	77751	01261	06991	1116	06740	07194	1,029
84	85137	005588	02992	04177	02906	0246	0,822
85	93232	002292	01185	01185	01168	00194	0,419

A remark on correlation.

By Alf Guldberg.

In the following lines we consider phenomenons which are characterized by two variables x and y, for instance: mariages which are characterized by the age of the husband and by the age of the wife. We suppose that we deal with a great frequency-distribution of our phenomenon. If we know the law for the frequency-distribution of our phenomenon, we could from the analytical form of the law study the different questions, that are of interest for the statistician.

We shall call the values of the variables for which the phenomenon occur most frequently the most probable values of the variables; farther, when we give a fix value to one of the variables, say x, that value of the other variable, here y, for which the phenomenon occur moss frequently is called the most probable value of the other variable, here y (the y-mode).

An important question by phenomenons dependent of two variables in statistics is whether a variation of the one variable, say x, causes a variation of the most probable value of the other variable, here y-mode.

We use then the following definition: we deal with a great frequency-distribution of a phenomenon which is characterized by two variables x and y, if a variation of the one variable, say x, causes a variation of the most probable

value of the other variable, here y-mode, the variables are said to be correlated.[1]

An illustration of a phenomenon dependent on two variables gives the following correlation-table (G. N. YULE: An introduction to the theory of statistics, p. 159).

Correlation between the age of wife and the age of husband for all husbands and wifes in England and Wales, who were resident together on the night of the census 1901. Table based on 5317520 pairs; condensed by omitting 000 s.

	Ages of Wives															Total
Ages of husband	15—	20—	25—	30—	35—	40—	45—	50—	55—	60—	65—	70—	75—	80—	85	
15—	2	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4
20—	16	173	46	4	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	204
25—	4	185	402	84	10	2	1	—	—	—	—	—	—	—	—	688
30—	1	41	265	411	84	12	2	1	—	—	—	—	—	—	—	817
35—	—	9	69	251	369	80	12	2	1	—	—	—	—	—	—	793
40—	—	3	17	71	219	309	66	12	2	1	—	—	—	—	—	700
45—	—	1	6	20	66	178	252	59	10	2	1	—	—	—	—	595
50—	—	—	2	8	19	57	146	195	44	10	2	—	—	—	—	483
55—	—	—	1	3	8	18	46	110	141	35	6	1	—	—	—	369
60—	—	—	—	1	3	8	16	39	81	101	23	4	1	—	—	277
65—	—	—	—	1	1	3	6	11	26	53	58	13	2	1	—	175
70—	—	—	—	—	1	1	2	5	8	18	31	31	6	1	—	104
75—	—	—	—	—	—	1	1	2	3	5	10	14	12	2	—	50
80—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	1	2	4	5	3	1	18
85—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	1	1	—	4
Total	23	414	808	854	781	669	550	437	317	226	134	68	27	8	1	5317

From this correlation table we see, that the most probable values of the variables x (the age of husband) and y (the age of wife) are x between 30—35 and y between 30—35.

[1] Professor PEARSON's wellknown definition is: »Two organs in the same individual — — — are said to be correlated, when a series of the first organ of a definite size being selected, the *mean* of the sizes of the corresponding second organs is found to be a function of the size of the selected first organ. If the mean is independent of this size, the organ is said to be non-correlated« (Phil. Trans. Roy. Soc. A. 187 p. 253). We use *mode*, when PEARSON use *mean*. If the frequencydistribution follows BRAVAIS law the modes and means coincide.

We see farther, if x has a value between 20—25, the most probable value of y is between 20—25, and if x has a value between 25—30, the most probable value of y is between 25—30 etc. The two variables x and y are then, after our definition, correlated.

If we know the analytical form $f(x, y)$ for the law for the frequency-distribution of our phenomenon, the problem of correlation is a simple maximum problem. We have only to a given value of one of the variables, say x, to determine the values of the other variable, here y, for which $f(x, y)$ becomes a maximum.

The difficulty problem is to determine the law for our phenomenon.

If we deal with a phenomenon, which depends on a single variable x, we know, that many such phenomenons have a frequency-distribution, that follow the Gaussian law of probability $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}$.

It then seems reasonable to assume, that certain phenomenons, that depend on two variables, should follow the generalized Gaussian law of error, first deduced for the errors of observations for the plan by Bravais. We shall next give a simple deduction of Bravais's law.[1]

The french astronomer Bravais proposed himself in 1846 the problem to determine the probability for the occurrence of errors of observations, that occur, by the determination of the Cartesian coordinates of a point in the plane.

We shall with (x, y) sign the errors of observations on the coordinates of the point.

Let now $F(x, y)\,dx\,dy$ be the probability for the occurrence of errors lying between x and $x + dx$, y and $y + dy$. We suppose, that $F(x, y)$ may be developed after the theorem of Maclaurin:

$$F(x, y) = F(0, 0) + \frac{1}{1}\left[\left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}\right)_{0,0} x + \left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\right)_{0,0} y\right] +$$

$$\frac{1}{1.2}\left[\left(\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2}\right)_{0,0} x^2 + 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right)_{0,0} xy + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{0,0} y^2\right] + \cdots$$

[1] Cfr. Bertrand: Calcul des Probabilités, p. 267.

We assume now, that it is equal probability to make positive or negative errors, or:

$$F(x,y) = F(-x,-y).$$

We then have:

$$\left(\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\right)_{0,0} = 0, \quad \left(\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\right)_{0,0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^3 F(x,y)}{\partial x^3}\right)_{0,0} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y}\right)_{0,0} = 0, \; \ldots$$

We suppose farther, that the observations are so accurately, that powers higher, than the second of the errors may be neglected. $F(x, y)$ reduces then to

$$F(x,y) = F(0,0) + \frac{1}{1 \,.\, 2}\left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)_{0,0} x^2 + 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)_{0,0} xy + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{0,0} y^2\right].$$

But when we always may neglect x^4 before x^2, etc., we may write

$$G + ax^2 + 2bxy + cy^2 = G \,.\, e^{\frac{a^2x^2 + 2bxy + cy^2}{G}}.$$

If we now suppose, that infinite great powers are impossible, the function $F(x, y)$ is, in reality, assimilated to the exponential form of Bravais

$$F(x,y) = G \,.\, e^{-k^2x^2 - 2\lambda xy - k'^2y^2}. \qquad \text{(I)}$$

The constants G, k, k', λ having the known values[1]

$$G = \frac{\sqrt{k^2k'^2 - \lambda^2}}{\pi}$$

[1] Cfr. Bertrand: Calcul des Probabilités, p. 229 f.

$$k^2 = \frac{\sigma_y^2}{2[\sigma_x^2\sigma_y^2 - M^2(x,y)]}, \quad k'^2 = \frac{\sigma_x^2}{2[\sigma_x^2\sigma_y^2 - M^2(x,y)]}$$

$$\lambda = \frac{-M(xy)}{2[\sigma_x^2\sigma_y^2 - M^2(x,y)]}$$

σ_x^2, σ_y^2, $M(xy)$ denoting the probable values of x^2, y^2, xy.

If we introduce the coefficient of correlation (r)

$$r = -\frac{\lambda}{k \cdot k'} = \frac{M(xy)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

we may write the expression (1) on the well-known form.

$$F(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{x^2}{\sigma^2_x} - \frac{2r}{\sigma_x\sigma_y}xy + \frac{y^2}{\sigma^2_y}\right]}. \quad \text{(II)}$$

If we now have a frequency-distribution of a statistical phenomenon, dependent on two variables x and y, that *follows* BRAVAIS's law the problem of correlation is, when x has a given value x_0, to determine that value of y, for which $z = F(x_0, y)$ has a maximum. We find immediately:

$$y = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot x_0 \quad \text{(a)}$$

that is, when x_0 vary, the equation for a plane perpendiculary to the xy-plane cutting the xy-plane in the so called line of regression of y on x. When we give y the value y_0 and seek the value of x, for which $z = F(x, y_0)$ has a maximum, we find

$$x = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} \cdot y_0 \quad \text{(b)}$$

that is, when y_0 vary, the equation for a plane perpendiculary to the xy-plane cutting the xy-plane in the line of regression of x on y. If we sign by γ the angel between the two lines of regression, we see, that

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{1-r^2}{r}\frac{\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x + \sigma_y}.$$

From the expression (II) of $F(x,y)$, we see, that we must have $1 - r^2 > 0$, ɔ: $r^2 < 1$. If r^2 approach to 1, we see that the two lines of regression approach to each other; if $r = 0$ the two lines of regression are perpendicular to each other. In the case $r = 0$, the equations (a) and (b) are

$$y = 0, \ x = 0$$

that show, that the most probable value of y (resp. x) is independent of x (resp. y). We have no correlation.

It seems to me that it has been some dissent in the theory of correlation with respect to the two conceptions »independence» of the two variables and »correlation» of the variables. The variables are independent, by our definition of correlation, either there is correlation or not ($r \gtrless 0$ or $r = 0$). The conception correlation depends on the *law* for the phenomenon.[1]

The dissent I suppose, dates from the following reasoning. If the error x in the abscisse of the point follows the law of error $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}$ and the error y in the ordinate of the point follows the law $\frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2y^2}$, we shall have, when the errors in x and y are independent, for the point (x, y) a law of error of the form $\frac{h \cdot k}{\pi} e^{-h^2x^2-k^2y^2}$. BRAVAIS's has found an expression of the form (II); the size of the term $e^{-\frac{2r}{\sigma_x\sigma_y}xy}$ or the coefficient r must then be a sign, that the errors x and y not are indepedent, but are »correlated»,[2] that is, that these exist certain common causes, that influence on the size of the errors x and y.

We observe that when this reasoning was valid, the coefficient r must in every case give a measure for the cor-

[1] In his well-known treatise »An introduction to the theory of statistics» Mr. G. YULE remarks on p. 317 »that properties of the correlation-coefficient could be deduced, *whitout reference to the form* of the distribution of the frequency». But it seems, that Mr YULE is not aware of that his deduction on p. 170, in which he supposes that »the means lie exactly on a straight line» involves the aquaintance of the frequency-distribution of the phenomenon.

[2] See W. P. ELDERTON: Frequency curves and correlation, p. 112.

relation between x and y. But it seems to be the general opinion that r ceases to be a satisfactory measure of the correlation when the regression not is linear.[1]

In this connexion I may mention »spurious» correlation. By »certain arrangement of statistical material it is possible to obtain a significant value for a correlation coefficient, when in reality the two functions are absolutely uncorrelated. Such a result is called 'spurious' correlation».[2]

The meaning is, that the two variables are independent, in spite of $r \neq 0$. The explanation is, I think, the material has a frequency-distribution according to BRAVAIS's law.

To make clear the ideas of the above mentioned reasoning we remember that all deductions of the Gaussian law of error $\varphi(x)$ is, as GAUSS shows,[3] in reality founded upon the hypothesis, that the errors are so small that powers higher than the second of the errors may be neglected and $\varphi(x) = \varphi(-x)$, by these special assumptions the first power of the errors do not appear in the law. The product of the laws of errors for the errors on the abscisse and the ordinate of the point can therefore not involve a member dependent on xy.

If we on the other side go the deduction of the law of errors $F(x, y)$ for the plan under analogous assumptions, that higher powers than the second of the errors may be neglected and $F(x, y) = F(-x, -y)$, we see, that the term x^2, xy, y^2 are equally significant, and we are, as shown above, directly led to BRAVAIS's law:

$$F(x, y) = G \cdot e^{-k^2x^2 - 2\lambda xy - k'^2 y^2}$$

where the variables x and y are independent. The independence of the variables x and y follows also from SCHOLZ's deduction of BRAVAIS's law.[4]

[1] See W. P. ELDERTON: l. c., p. 116; W. JOHANNESEN: Elemente der exakten Erblichkeitslehre, p. 334.
[2] See W. P. ELDERTON: l. c., p. 122.
[3] See BERTRAND: Calcul des Probabilités, p. 267.
[4] See BERTRAND: l. c., p. 229.

Bemerkungen zur Theorie der statistischen Funktion.

Von K.-G. Hagström.

§ 1.

In einer früheren Arbeit[1] habe ich u. a. verschiedene kritische Anmerkungen über die Ansichten der Korrelationisten veröffentlicht. Um leicht entstehende Missverständnisse gleich von Anfang an zu vermeiden, möchte ich einige Ergänzungen zur angeführten Arbeit geben. Ich schicke folgende Erklärungen voraus.

Es sei $F(x, y)$ die Korrelationsfunktion zweier statistischer Veränderlichen ξ und η. Man sagt, dass $F(x, y)$ von dem *normalen Typus* ist, wenn sie die Form

$$F(x, y) = \frac{\sqrt{\delta}}{\pi} e^{-\varphi(x, y)}$$

hat, wo

$$\varphi(x, y) = \alpha x^2 - 2\beta x y + \gamma y^2,$$
$$\alpha\gamma - \beta^2 = \delta > 0.$$

Wir werden weiter sagen, dass $F(x, y)$ von dem *Streifentypus* ist, wenn sie in der unmittelbaren Umgebung einer gewissen Funktionskurve $f(x, y) = 0$ der xy-Ebene gross, sonst aber verschwindend klein oder $= 0$ ist. Diese Funktionen treten bei den meisten physikalischen Messungen auf, und der Physiker schliesst immer ohne Skrupel, wenn der »Streifen» ge-

[1] Der Begriff der statistischen Funktion. Skandinavisk Aktuarietidskrift 1919 S. 1—52.

nügend schmal ist, dass sie einen bestimmten funktionalen Zusammenhang der beobachteten Erscheinungen offenbaren.

Diejenige Theorie von statistischen Veränderlichen und Funktionen, welche wir in der angeführten Arbeit studiert haben, und welche auf die Begriffe Verteilungsfunktion und Korrelationsfunktion aufgebaut wird, kann offenbar alle in der Praxis vorkommenden Fälle mit genügender Genauigkeit approximieren. Für die theoretischen Ausführungen kann es aber nützlich sein, eine Verallgemeinerung der Theorie einzuführen. Wir werden die neue Theorie als *allgemeine Theorie*, die gewöhnliche Theorie im Gegensatz dazu als *einfache Theorie* bezeichnen.

Die allgemeine Theorie wird durch folgende Definitionen begründet:

a) ξ soll eine statistische Veränderliche heissen, wenn es eine *nicht abnehmende* positive Funktion $s(x)$ gibt, für die

$$\lim_{x \to -\infty} s(x) = 0, \ \lim_{x \to +\infty} s(x) = 1,$$

so dass die Wahrscheinlichkeit, dass ξ ins Intervall $-\infty < x \leqq a$ fällt, durch die Zahl $s(a)$ ausgedrückt wird.

b) ξ und η sollen statistische Funktionen von einander heissen, wenn es eine positive Funktion $S(x, y)$ gibt, welche gewisse unten anzugebende Bedingungen erfüllt, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass gleichzeitig ξ ins Intervall $-\infty < x \leqq a$, η ins Intervall $-\infty < y \leqq b$ fallen, durch die Zahl $S(a, b)$ ausgedrückt wird. Die Bedingungen für $S(x, y)$ sind:

$$S(x', y') \geqq S(x, y),$$

wenn

$$x' \geqq x, y' \geqq y;$$

$$\lim_{x, y \to -\infty} S(x, y) = 0;$$

$$\lim_{x, y \to +\infty} S(x, y) = 1.$$

Die Funktionen $s(x)$ und $S(x, y)$ werden als *Summenfunktionen* bezeichnet.

Wenn man mit $P(a_1, a_2)$ die Wahrscheinlichkeit dafür bezeichnet, dass ξ ins Intervall $a_1 < x < a_2$ fällt, so ergibt sich nach dem Satz des Entweder-Oder:

$$P(a_1, a_2) = s(a_2) - s(a_1).$$

Ist $s(x)$ differentiierbar und $s'(x) = p(x)$, so fällt man auf die einfache Theorie zurück und erhält:

$$P(a_1, a_2) = \int_{a_1}^{a_2} p(x)\,dx.$$

Nun kann man aber auch in der allgemeinen Theorie die gewöhnlichen Momentintegrale u. s. w. berechnen, wenn man nur den Begriff des STIELTJES'schen Integrals einführt. Man erhält z. B. für das quadratische Moment:

$$m_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,d\,s(x).$$

und dieses Integral wird, wenn $s(x)$ eine Treppenkurve mit den Sprungstellen

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$$

und den Treppenhöhen

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$$

bedeutet,

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2.$$

Die allgemeine Theorie umfasst also auch den Fall von diskreten Punkten, den CHARLIER als »homograden» Fall bezeichnet. Die Verallgemeinerung scheint eben as Verdienst zu haben, dass sie die vom theoretischen Standpunkt unna-

türliche Trennung der Statistik in homograde und heterograde Statistik beseitigt.

Für den Fall von zwei Veränderlichen, ξ und η, ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, dass gleichzeitig ξ ins Intervall $a_1 < x \leqq a_2$, η ins Intervall $b_1 < y \leqq b_2$ fallen,

$$= S(a_2, b_2) - S(a_1, b_2) - S(a_2, b_1) + S(a_1, b_1).$$

Wenn die Ableitung

$$\frac{\partial^2 S(x, y)}{\partial x \partial y} = F(x, y)$$

existiert, so hat man wieder den einfachen Fall und die eben berechnete Wahrscheinlichkeit wird

$$= \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} F(x, y)\, dx\, dy.$$

Man wird jetzt die allgemeine Theorie auf alle Funktionen $S(x, y)$ ausdehnen können, für welche man das entsprechende STIELTJES'sche Integral definieren kann. Es sei also $S(x, y)$ von der Eigenschaft, dass, wenn $f(x, y)$ eine z. B. kontinuierliche Funktion bezeichnet, die Summen

$$\sum \sum m_{ik} \{S(x_{i+1}, y_{k+1}) - S(x_i, y_{k+1}) - S(x_{i+1}, y_k) + S(x_i, y_k)\}$$

und

$$\sum \sum M_{ik} \{S(x_{i+1}, y_{k+1}) - S(x_i, y_{k+1}) - S(x_{i+1}, y_k) + S(x_i, y_k)\},$$

wo m_{ik} und M_{ik} die untere, bzw. obere, Grenze von $f(x, y)$ im kleinen Rechteck bezeichnen, einen gemeinsamen Limes haben, wenn die Teilintervalle irgendwie gegen Null streben. Dieser Limes wird das STIELTJES'sche Integral genannt und soll durch

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int f(x, y)\, d^2 S(x, y)$$

bezeichnet werden.

Man erhält in dieser allgemeinen Theorie für den Korrelationskoeffizienten[1]

$$r^2 = \frac{\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int x\, y\, d^2 S(x, y)\right)^2}{\int_{-\infty}^{+\infty}\int x^2\, d^2 S(x, y) \,.\, \int_{-\infty}^{+\infty}\int y^2\, d^2 S(x, y)}\,.$$

Dem homograden Fall entspricht hier eine Art von Treppenfläche für $S(x, y)$. Wenn die Sprungstellen

$$x_1, y_1;\ x_2, y_2;\ \ldots\ x_n, y_n$$

und die Treppenhöhen

$$p_1;\ p_2;\ \ldots\ p_n$$

sind, so ergibt sich

$$r^2 = \frac{(\Sigma\, p_i\, x_i\, y_i)^2}{\Sigma\, p_i\, x_i^2 \,.\, \Sigma\, p_i\, y_i^2}\,.$$

§ 2.

Aus den Aussagen der Korrelationisten kann man nicht genau erkennen, was sie unter Abhängigkeit und Unabhängigkeit zweier Phänomene verstehen. Man könnte zunächst fragen, ob man nicht die Zerlegbarkeit der Korrelationsfunktion $F(x, y)$ in $p(x) \,.\, q(y)$ als Definition der Unabhängigkeit

[1] Man setzt wie gewöhnlich voraus, dass

$$\int\int x\, d^2 S(x, y) = \int\int y\, d^2 S(x, y) = 0.$$

annehmen soll. Dem widerspricht aber die Auffassung von statistischer Abhängigkeit, von der in III unten die Rede sein wird. Wir wollen aber die Tatsache, dass die Korrelationsfunktion zerlegbar ist, durch die Worte »im gewöhnlichen Sinne unabhängig» bezeichnen.

Über den Korrelationskoeffizienten hat man den folgenden Satz:

I. *Wenn* ξ *und* η *im gewöhnlichen Sinne von einander unabhängig sind, so ist* $r = 0$.

Man hat nämlich in diesem Fall

$$M_{11} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int xy\,p(x)\,q(y)\,dx\,dy = 0,$$

wenn wie gewöhnlich der Punkt, dessen Koordinaten Mittelwerte sind, als Koordinatenanfang gewählt wird.

Die richtige Umkehrung von I ist der folgende Satz:

II. *Wenn man weiss, dass* $r \neq 0$ *ist, so sind* ξ *und* η *nicht von einander unabhängig, im gewöhnlichen Sinne.*

Im folgenden wird die Unrichtigkeit gewisser Sätze dargelegt, von welchen man vielleicht nach dem Studium der Arbeiten der Korrelationisten glauben könnte, dass sie bewiesen oder auch nur beweisbar wären.

III. Folgender Satz ist falsch: *wenn* $r = 0$ *ist, so sind* ξ *und* η *in der Meinung von einander unabhängig, dass sie nicht als Funktionen von unabhängigen Veränderlichen angesehen werden können, welche ganz oder teilweise dieselben sind.*

Diese Auffassung von dem Zusammenhang statistischer Veränderlichen stimmt offenbar mit der Auffassung vieler Korrelationisten überein. Man vergleiche die Definition von Galton[1], wo er sagt: »Co-relation must be the consequence of the two organs being partly due to common causes». Dass der angeführte Satz falsch ist, geht aus folgendem Beispiel

[1] Co-relations and their Measurement, chiefly from Anthropometric Data. Proc. Roy. Soc. Vol. XLV, 1889; p. 135.

hervor:

$$\xi \overset{h}{\sim} t_1 + t_2,$$

$$\eta \overset{k}{\sim} t_1 - t_2,$$

$$t_1 \overset{c}{\sim} 0, \; t_2 \overset{c}{\sim} 0.$$

Man sieht auch, dass $F(x, y)$ in $p(x) \,.\, q(y)$ zerlegt werden kann. Es ist folglich mit dieser Auffassung von Zusammenhang statistischer Veränderlichen nicht möglich, die oben in Frage gestellte Definition der Unabhängigkeit aufzustellen.

IV. Folgender Satz ist falsch: *wenn* $r = 0$, *so sind* ξ *und* η *in der Meinung von einander wenig abhängig, dass* $F(x, y)$ *jedenfalls nicht vom Streifentypus mit sehr schmalem Streifen sein kann.*

Wie wir in § 1 gesagt haben, ist der Fall des Streifentypus mit schmalem Streifen mit dem idealen Fall des Physikers identisch. Es wäre also schon etwas, wenn man zeigen könnte, dass, wenn $r = 0$, dieser Fall nicht vorhanden sein kann. Dass die Sache sich nicht so verhält, geht aus einem im folgenden gegebenen Beispiel hervor.

Es sei $g(x)$ irgendeine eindeutige (genügend normale) Funktion von x und der Bereich O der xy-Ebene werde durch folgende Ungleichungen definiert:

$$-1 < x < +1,$$

$$g(x) - \varepsilon \leq y \leq g(x) + \varepsilon.$$

Wir definieren jetzt $F(x, y)$ folgendermassen:

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ ausserhalb } O, \\ \dfrac{1}{4\varepsilon} \text{ innerhalb und auf der Grenze von } O. \end{cases}$$

Man hat zunächst:

$$M_0(x) = \int_{g(x)-\varepsilon}^{g(x)+\varepsilon} F(x, y)\, dy = \frac{1}{2},$$

$$M_1(x) = \int_{g(x)-\varepsilon}^{g(x)+\varepsilon} y\,F(x,y)\,dy = \frac{1}{2}\,g(x),$$

$$M_2(x) = \int_{g(x)-\varepsilon}^{g(x)+\varepsilon} y^2\,F(x,y)\,dy = \frac{1}{2}\,g(x)^2 + \frac{\varepsilon^2}{6}.$$

Es folgt, dass

$$M_{00} = \int\int F(x,y)\,dx\,dy = 1,$$

$$M_{10} = \int\int x\,F(x,y)\,dx\,dy = 0,$$

$$M_{01} = \int\int y\,F(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} g(x)\,dx.$$

Um den Korrelationskoeffizienten bilden zu können, müssen wir $M_{01} = 0$ annehmen, also

$$\int_{-1}^{+1} g(x)\,dx = 0,$$

was einer Variabeltransformation in y gleichkommt. Es ergibt sich nun

$$M_{20} = \int\int x^2\,F(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{3},$$

$$M_{11} = \int\int x\,y\,F(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_{-}^{+1} x\,g(x)\,dx,$$

$$M_{02} = \int\int y^2 F(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} g(x)^2\,dx + \frac{\varepsilon^2}{3},$$

und somit

$$r^2 = \frac{\frac{1}{4}\left(\int\limits_{-1}^{+1} x\,g(x)\,dx\right)^2}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{+1} g(x)^2\,dx + \frac{\varepsilon^2}{3}\right)}.$$

Es ist offenbar, dass man, um den idealen Fall des Physikers zu haben, ε sehr klein annehmen muss. Man findet, dass in unserem Fall r gegen eine bestimmte Grenze konvergiert, wenn ε verschwindet. Man erhält für r

$$r \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \frac{\int\limits_{-1}^{+1} x\,g(x)\,dx}{\left(\int\limits_{-1}^{+1} g(x)^2\,dx\right)^{1/2}}.$$

Unsre Aufgabe ist, ein Beispiel zu konstruieren, für das $r \rightarrow 0$ für $\varepsilon \rightarrow 0$. Dies bietet keine Schwierigkeit dar: man setze $g(x)$ gleich einer beliebigen geraden Funktion, für welche

$$\int\limits_{0}^{1} g(x)\,dx = 0$$

ist, also beispielsweise

$$g(x) = |x| - \frac{1}{2}.$$

Die entsprechende Korrelationsfunktion, für welche r gegen 0 strebt, wenn der Zusammenhang gegen den idealen Physikerfall konvergiert, ist in der Figur 1 angedeutet worden. In dem schraffierten Bereich ist $F(x, y) = \frac{1}{4\varepsilon}$, sonst $= 0$.

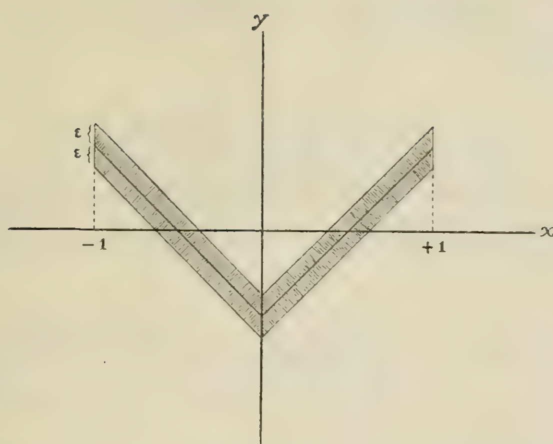


Fig. 1.

Es muss bemerkt werden, dass der Grenzübergang natürlich nicht ausgeführt wird, weil im Grenzfalle $F(x, y)$ nicht existiert. Man hat aber r konstant $= 0$ für alle ε. Unser Satz ist demnach bewiesen.

Im Vorbeigehen wollen wir die Eigentümlichkeit konstatieren, dass für $g(x) = a \,.\, x$ der Korrelationskoeffizient r gegen 1 strebt. In diesem Fall kann man, wie wir sehen werden, auch sagen, dass r ein Mass der Annäherung genannt werden kann. Es lassen sich im übrigen selbstverständlich Funktionen $g(x)$ konstruieren, für die r gegen eine beliebige Zahl zwischen 0 und 1 konvergiert.

V. Folgender Satz ist falsch: *wenn* $r = 0$, *so kann* $F(x, y)$ *in* $p(x) \,.\, q(y)$ *zerlegt werden.*

Hierdurch wird gezeigt, dass die Einführung der oben genannten Definition der Unabhängigkeit statistischer Variablen der Korrelationstheorie ebenfalls kein Heil bringen könnte. Denn nach dieser Einführung wäre der Satz, dass wenn $r = 0$, ξ und η von einander unabhängig sind, dennach nicht richtig.

Ein beweisendes Beispiel ist dem Verfasser von Herrn

G. BOHLMANN freundlichst mitgeteilt worden und wird folgendermassen konstruiert.

Es seien

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \psi_1(x), \psi_2(y)$$

irgend vier differentiierbare Verteilungsfunktionen von je einer Veränderlichen, wobei φ_2 verschieden von φ_1, ψ_2 verschieden von ψ_1 und

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i(x)\,dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_i(x)\,dx = 1,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i(x)\,x\,dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_i(y)\,y\,dy = 0 \qquad (i = 1, 2).$$

Wenn man jetzt mit p_1, p_2 zwei von 0 verschiedene positive Konstanten versteht, so dass

$$p_1 + p_2 = 1$$

ist, so ist

$$F(x, y) = p_1 \varphi_1(x) \psi_1(y) + p_2 \varphi_2(x) \psi_2(y)$$

eine Funktion, für welche

$$\int\int_{-\infty}^{+\infty} F(x, y)\,dx\,dy = 1.$$

Wird die Funktion F als Korrelationsfunktion zweier Veränderlichen ξ und η gedeutet, so ist, behauptet ich, das gesuchte Beispiel gefunden. Es ist zunächst $M_{11} = 0$, also auch $r = 0$.

Nehmen wir jetzt an, dass F sich in $p(x) \cdot q(y)$ zerlegen liesse, so folgt durch Differentiation von

$$F(x,y) = \sum_{i=1}^{2} p_i \varphi_i(x) \psi_i(y) = p(x)\, q(y),$$

dass

$$\frac{p_1 \varphi'_1(x) \psi_1(y) + p_2 \varphi'_2(x) \psi_2(y)}{p_1 \varphi_1(x) \psi_1(y) + p_2 \psi_2(x) \psi_2(y)} = \frac{p'(x)}{p(x)}$$

also von y unabhängig ist. Durch Differentiation nach y folgt

$$0 = \begin{vmatrix} \Sigma p_i \varphi'_i(x) \psi'_i(y) & \Sigma p_i \varphi'_i(x) \psi_i(y) \\ \Sigma p_i \varphi_i(x) \psi'_i(y) & \Sigma p_i \varphi_i(x) \psi_i(y) \end{vmatrix} =$$

$$= p_1 p_2 \begin{vmatrix} \psi'_1(y) & \psi'_2(y) \\ \psi_1(y) & \psi_2(y) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varphi'_1(x) & \varphi'_2(x) \\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \end{vmatrix},$$

also entweder

$$\frac{\varphi'_1(x)}{\varphi_1(x)} = \frac{\varphi'_2(x)}{\varphi_2(x)} \text{ oder } \frac{\psi'_1(y)}{\psi_1(y)} = \frac{\psi'_2(y)}{\psi_2(y)}.$$

Aus der ersten Gleichung schliessen wir, dass

$$\varphi_2(x) = k\, \varphi_1(x)$$

und durch Integration von 0 bis ∞

$$\varphi_2(x) = \varphi_1(x),$$

aus der zweiten in derselben Weise

$$\psi_2(y) = \psi_1(y).$$

Beides ist ausgeschlossen, also ist auch nicht

$$F(x,y) = p(x) \,.\, q(y).$$

Man kann im besonderen wählen:

$$\varphi_1(x) = \psi_1(x) = \frac{k_1}{\sqrt{\pi}} e^{-k_1^2 x^2},$$

$$\varphi_2(x) = \psi_2(x) = \frac{k_2}{\sqrt{\pi}} e^{-k_2^2 x^2},$$

$$p_1 = p_2 = \frac{1}{2},$$

$$F(x, y) = \frac{1}{2\pi}\left(k_1^2 e^{-k_1^2(x^2+y^2)} + k_2^2 e^{-k_2^2(x^2+y^2)}\right).$$

§ 3.

In der einfachen Korrelationstheorie ist folgender Satz sinnlos: *Wenn $r = 1$ ist, so sind die Variablen einander proportional.*

In der Wirklichkeit verhält es sich so, dass in dieser Theorie r immer < 1 ist. Wir betrachten z. B. das Integral

$$I = 1 - r^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \left(\frac{y}{\sqrt{M_{02}}} - r\cdot\frac{x}{\sqrt{M_{20}}}\right)^2 F(x, y)\, dx\, dy$$

und beweisen leicht, dass es nicht $= 0$ werden kann. Sei $F(x, y)$ summierbar im Sinne von LEBESGUE. Wir haben

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int F(x, y)\, dx\, dy = 1,$$

und es kann also $F(x, y)$ nicht »fast überall» (d. h. mit Ausnahme einer Menge vom Inhalt 0) gleich Null sein. Es muss vielmehr eine Menge geben, deren Mass $\neq 0$ ist, wo $F(x, y) > 0$ ist. Das Integral I, über einen diese Menge enthaltenden Bereich erstreckt, muss also > 0 sein, weil $\frac{y}{\sqrt{M_{02}}} - r\frac{x}{\sqrt{M_{20}}}$

nicht in einer solchen Menge identisch gleich Null sein kann. Das Integral I, über die ganze Ebene erstreckt, ist also sicher auch nicht $= 0$.

In der allgemeinen Theorie ist der entsprechende Satz, wenn richtig, jedenfalls noch nicht bewiesen. In diesem Fall existiert aber der Fall $r = 1$. Dies geht aus dem folgenden Beispiel hervor.

Auf der Geraden g,

$$y = x \operatorname{tg} \alpha,$$

sei eine nicht abnehmende Funktion $s(z)$ gegeben, wo z die Entfernung von Origo bedeutet, und es sei

$$\lim_{z \to -\infty} s(z) = 0,$$

$$\lim_{z \to +\infty} s(z) = 1.$$

Die Vorzeichen seien so gewählt, dass g auf der in Fig. 2 angegebenen Weise läuft, und z werde im vierten Quadrant negativ, im ersten positiv gerechnet. Wir definieren jetzt die Summenfunktion $S(x, y)$ von ξ und η durch die Gleichung

$$S(x, y) = s(z),$$

wo z den Parameterwert des Schnittpunktes von g mit dem Winkel $(-\infty, y)(x, y)(x, -\infty)$ bezeichnet. Wir nehmen an, dass das STIELTJES'sche Integral mit $s(z)$ gebildet werden kann und ferner dass

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z\, d\, s(z) = 0$$

ist. Man hat für jeden Punkt (x, y) unterhalb g:

$$S(x, y) = S(x + \varepsilon, y),$$

$$S(x, y + \varepsilon) = S(x + \varepsilon, y + \varepsilon);$$

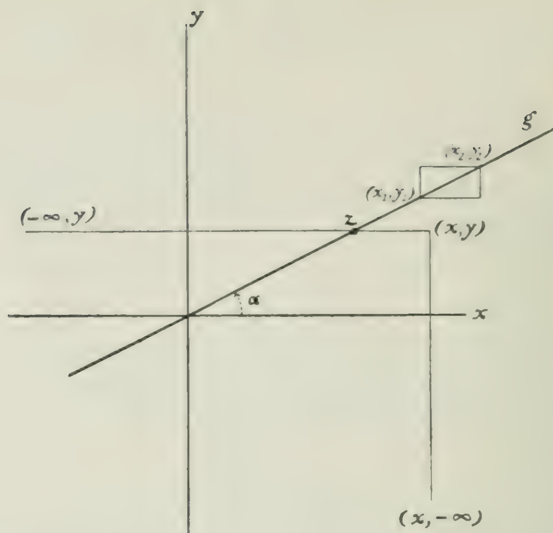


Fig. 2.

für jeden Punkt oberhalb g:

$$S(x, y) = S(x, y + \varepsilon),$$
$$S(x + \varepsilon, y) = S(x + \varepsilon, y + \varepsilon);$$

und für zwei Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2) von g mit den Parameterwerten z_1 und z_2:

$$S(x_1, y_1) = S(x_1, y_2) = S(x_2, y_1) = s(z_1),$$
$$S(x_2, y_2) = s(z_2).$$

Man erhält nun leicht

$$M_{10} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int x \, d^2 S(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} z \, ds \,.\cos\alpha = 0,$$

$$M_{01} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int y \, d^2 S(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} z \, ds \,.\sin\alpha = 0,$$

$$M_{20} = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 \, \partial^2 S(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} z^2 ds \, . \cos^2 \alpha ,$$

$$M_{11} = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} x y \, \partial^2 S(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} z^2 ds \, . \cos \alpha \sin \alpha ,$$

$$M_{02} = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 \, \partial^2 S(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} z^2 ds \, . \sin^2 \alpha ,$$

und folglich

$$r = 1 .$$

Der soeben besprochene Fall mag als *der lineare Idealfall der allgemeinen Theorie* bezeichnet werden.

Um die Frage ganz allgemein zu erledigen, wann $r = 1$ wird, hat man z. B. das Integral zu bilden

$$I = 1 - r^2 = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{y}{\sqrt{M_{02}}} - r \cdot \frac{x}{\sqrt{M_{20}}} \right)^2 \partial^2 S(x, y)$$

und es gilt zu untersuchen, wann dieses Integral verschwindet. Der zu beweisende Satz lautet:

Wenn $I = 0$ ist, so hat man den linearen Idealfall.

Um die Richtigkeit dieses Satzes im allgemeinen Fall zu beweisen, scheint es aber notwendig, die Diskontinuitäten von $S(x, y)$ und ihren Ableitungen etwas näher zu bestimmen, eine Sache, auf die wir gegenwärtig nicht eingehen können.

§ 4.

1. Angenommen, man habe eine Korrelationstafel aufgestellt und $r = \frac{1}{2}$ gefunden: was kann man daraus schliessen?

Offenbar zunächst nur, dass die Veränderlichen ξ und η nicht im gewöhnlichen Sinne unabhängig sind. Wenn jemand

den Zusammenhang verneint hätte, und wenn die Beobachtungen zahlreich sind, so könnte man dies als einen Beweis gegen ihn anführen. Aber wenn es sich um die Erforschung der Natur handelt und man ganz vorurteilslos an die Sache gegangen ist, was hat dann diese Konstatierung für einen Wert? Augenscheinlich keinen grossen. Man hat $r = \frac{1}{2}$ gefunden: man schliesst, dass zwischen den Variablen ein Zusammenhang besteht. Und wenn man $r = 0$ gefunden hätte? Wir haben gesehen, dass man auch in diesem Fall mit der Möglichkeit eines innigen Zusammenhangs rechnen muss.

Kann der gefundene Wert $r = \frac{1}{2}$ eine Aufklärung über den *Grad* des Zusammenhangs geben? Wir sahen oben, dass es nicht ausgeschlossen ist, dass die Korrelationsfunktion vom Streifentypus mit beinahe verschwindender Streifenbreite ist. Dann wäre der Zusammenhang so innig, wie man überhaupt wünschen kann. Es kann auch eintreffen, dass die Korrelationsfunktion vom Streifentypus mit linearem Streifen ist. Dann wäre r von einem gewissen Standpunkte aus als ein Mass der Annäherung aufzufassen. Eine Möglichkeit ist auch, dass die Korrelationsfunktion normal und der Zusammenhang von der Art angenommen werden kann, die meinem »einfachen Normalfall« entspricht. Dann wäre r in gewissem Sinne ein Mass des Spielraumes der unbekannten Funktionsgerade.

Wenn dieses nicht die absolute Unwissenheit bedeutet, so ist es jedenfalls nicht weit davon entfernt. Ohne dass man einen festen Standpunkt für die Untersuchung einnimmt, — eine Theorie des Geschehens bildet, — gibt die Berechnung von r gar nichts.

2. Wenn die Beobachtungen eine normale Korrelationsfunktion gegeben haben: ist daraus irgendein Schluss zu ziehen?

Die normale Korrelationsfunktion kann auf unendlich verschiedene Weise entstehen. Nehmen wir aber an, dass sie als Resultat eines Zusammenhanges vom Typus des »allgemeinen Normalfalls« aufgefasst werden kann, was selbstverständlich schon eine sehr spezielle Hypothese bedeutet. Hier

ist nun s ganz unbestimmt. Man kann also keine Kenntnis auch nur von der Anzahl der Urvariablen erhalten. Und wenn man annimmt, dass die Urvariable nur eine einzige ist, dann ist der Zusammenhang noch auf unendlich viele Weisen möglich. Man kommt ganz einfach ohne Hypothesen nicht durch. Der Glaube, dass die Korrelationstheorie ein bequemes und wertvolles Hilfsmittel bildet, das ohne weitere Spezialhypothesen auf beliebige statistische Korrelationsuntersuchungen mit Erfolg angewendet werden kann, muss also als grundlos bezeichnet werden.

§ 5.

Setzt man voraus, dass der Zusammenhang vom linearen Charakter ist, so kann man die Bedeutung von r überblicken. Ich möchte hierzu folgende Bemerkungen machen.

Die Korrelationsfunktion (oder die Summenfunktion) ist gewissermassen ein unbestimmtes Gebilde. Sie hängt nämlich von den willkürlich gewählten Masstäben in der x- und y-Achse ab. Es seien die Veränderlichen und die Korrelationsfunktion

$$x, y, F(x, y).$$

Wenn wir hier eine lineare Transformation

$$x' = \lambda x, \quad y' = \mu y$$

ausführen, so verändert sich $F(x, y)$. Die neue Korrelationsfunktion $F'(x', y')$ hängt mit der alten durch folgende Gleichung zusammen:

$$F'(x', y') = \frac{F(x, y)}{\lambda \mu}.$$

Denn nur so lässt es sich bewirken, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ξ und η in ein gewisses Gebiet der Ebene fallen, invariant wird. Die Momente verändern sich auch: man erhält

$$\iint x'^2 F'(x', y')\, dx'\, dy' = \lambda^2 M_{20},$$

$$\iint x' y' F'(x', y')\, dx'\, dy' = \lambda \mu M_{11},$$

$$\iint y'^2 F'(x', y')\, dx'\, dy' = \mu^2 M_{02}.$$

Durch eine bestimmte Transformation

$$x' = \frac{x}{\sqrt{M_{20}}}, \quad y' = \frac{y}{\sqrt{M_{02}}}$$

kann man nun immer erreichen, dass die quadratischen Momente beide $= 1$, das Produktmoment $= r$ werden. Wir sagen, dass die entstehende Korrelationsfunktion von der *kanonischen* Form ist.

Wenn diese Transformation ausgeführt ist, so bilden wir die Funktion

$$R(\alpha) = \iint (x' \sin \alpha - y' \cos \alpha)^2 F'(x', y')\, dx'\, dy',$$

welche die quadratische Abweichung von der Geraden

$$x' \sin \alpha - y' \cos \alpha = 0$$

ausdrückt.

Wir werden beweisen, dass diese Funktion *immer* ein Minimum hat, und werden dieses Minimum berechnen. Man erhält

$$R(\alpha) = \sin^2 \alpha \iint x'^2 F'\, dx'\, dy - 2 \sin \alpha \cos \alpha \iint x' y' F'\, dx'\, dy' + \cos^2 \alpha \iint y'^2 F'\, dx'\, dy,$$

oder, weil nach Voraussetzung

$$\iint x'^2 F'\, dx'\, dy' = \iint y'^2 F'\, dx'\, dy' = 1, \quad \iint x' y' F'\, dx'\, dy' = r \text{ ist,}$$

$$R(\alpha) = 1 - r \sin 2\alpha.$$

Durch Differentiieren ergibt sich

$$R'(\alpha) = -2r\cos 2\alpha,$$

$$R''(\alpha) = \quad 4r\sin 2\alpha,$$

woraus man schliesst, dass $R(\alpha)$ immer ein Minimum für $\alpha = \frac{\pi}{4}$ besitzt. Es ist für diesen Wert

$$R\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - r.$$

Die Sache ist also ziemlich einfach: Wenn man jede Korrelationsfunktion auf die kanonische Form transformiert, so bedeutet $1 - r$ die kleinste vorkommende quadratische Abweichung von einer Geraden durch Origo. Man sieht auch, dass dieses Minimum im linearen Idealfall der allgemeinen Theorie gleich null ist.

Diese Ausführungen gelten ganz allgemein. Aber als ein Mass der Annäherung kann r natürlich nicht dienen, wenn man nicht im voraus weiss, dass die Funktionskurve eine Gerade ist.

On the theory of frequency-distributions.

By Alf Guldberg.

The following pages contain a brief sketch to a general theory of frequency-distributions for n variables. To simplify the exposition we begin with frequency-distributions for one variable or frequency curves all though the results here are not novel.

I.

If x is the independent variable and y the dependent variable, the equation of the normal curve of frequency is

$$y = k e^{-a x^2},$$

where k and a are certain constants.

When we consider an arbitrary frequency curve it is natural to compare it with the normale curve of frequency. Our problem becomes then to obtain a development of an arbitrary frequency function by means of the exponentiel $e^{-a x^2}$.

Putting $\varphi_0 = e^{-\frac{a}{2} x^2}$ and forming the successive differential coefficients of φ_0, we denote the nth differential coefficient φ_n of φ_0 by $(-1)^n U_n e^{-\frac{a}{2} x^2}$.

We have[1]

$$U_0 = 1,$$
$$U_1 = ax,$$
$$U_2 = a^2x^2 - a$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

and in general

$$U_n = a^n x^n - \frac{n(n-1)}{2} a^{n-1} x^{n-2} + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \, . \, 4} a^{n-2} x^{n-4} - \\ - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2 \, . \, 4 \, . \, 6} a^{n-3} x^{n-6} + \cdots$$

The three polynomials U_{n+1}, U_n, U_{n-1} are connected by the relations

$$U_{n+1} - ax U_n + an U_{n-1} = 0,$$
$$\frac{d^2 U_n}{dx^2} - ax \frac{dU_n}{dx} + an U_n = 0.$$

The U_0, U_1, $U_2 \ldots$ (HERMITE's polynomials) are called the normal functions to the last differential equation.

The roots of the equation $U_n = 0$ are al real. The absolute value of the roots lie between $\frac{1}{\sqrt{n}}$ and $\sqrt{\frac{n^2 - n}{2}}$ if $a = 2$.

We have farther the theorems:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2} U_n \, . \, U_m \, dx = 0, \; n \neq m,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2} U_n^2 dx = a^n n! \sqrt{\frac{2\pi}{a}}.$$

[1] See CH. HERMITE, Comptes Rendus, t. 58, p. 93, 266, and E. CZUBER, Wahrscheinlichkeitsrechnung, t. 1, p. 418, 3:d Edition.

The functions $\varphi_n = (-1)^n U_n e^{-\frac{a}{2}x^2}$ satisfie the equations

$$\varphi_{n+1} + ax\varphi_n + an\varphi_{n-1} = 0,$$

$$\frac{d^2\varphi_n}{dx^2} + ax\frac{d\varphi_n}{dx} + a(n+1)\varphi_n = 0$$

and

$$\varphi_n = 0 \text{ for } x = \pm\infty.$$

After these preliminaries we may write formally the serie

$$(1) \quad c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \cdots = \Sigma c_n(-1)^n U_n e^{-\frac{a}{2}x^2} = F(x)$$

where the c's are any arbitrary constants. We assume that the series is uniformly convergent in the interval $(-\infty, \infty)$ and represents the function $F(x)$. We then find the coefficients c by multiplying with U_n and integrating from $-\infty$ to ∞.

We find

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) U_n dx = (-1)^n c_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2} U_n^2 dx$$

or

$$(2) \quad c_n = \frac{(-1)^n \sqrt{a}}{a^n n! \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) U_n dx.$$

The U_n beeing polynomials in x, the coefficients c_n are expressed by the »moments» of $F(x)$. As we may determine 2 constants arbitrary (the situation of Origo and a), the series (1) can be a little simplified. A well known theorem of Kneser tells us that, if $F(x)$ is a continuous function of finite oscillation, a series of the form (1), when the coefficients are formed according to the equation (2), is uniformly convergent in the interval $(-\infty, \infty)$ and represent the function $F(x)$.

The series (1) gives the general solution of the problem of frequency curves. Every frequency function of one variable may be represented by a series of the form (1). This series is given by EDGEWORTH, later it is treated by CHARLIER. The series forms the base of the »Kollektivmarlehre» by BRUNS. The series is also treated by WERA MÜLLER-LEBEDEFF, V. MISES; ALFRED BERGER, H. GULBRUN and others.

The types of frequency functions given by PEARSON are directly to be derived from the series by giving $F(x)$ the different forms.

II.

We now pass to frequency-distribution for two variables i. e. frequency surfaces. This problem is, as I know, first treated by CHARLIER[1] from the hypothesis of elementary errors, later continued by JÖRGENSEN[2] and by WICKSELL.[3] JÖRGENSEN writes l. c., p. 4: »The problem is so immense extensive and enormous difficult, that we only through the diligent and serious work of many men may hope to attain an usuable result».

The same mode of proceeding as for frequency distributions for one variable may give a simple solution of the problem.

The equation for the normal frequency surface for two independent variables x and y is, when z is the dependent variable, according to BRAVAIS's law:

$$z = K \, . \, e^{-\frac{1}{2}[ax^2 + 2bxy + cy^2]},$$

where K, a, b, c are certain constants.

If we have to deal with an arbitrary frequency surface of two variables, it is natural, as in the case of a frequency curve, to compare it with the normal frequency surface.

Our problem is then to try to obtain a development of

[1] Arkiv f. Matematik, Astron. och Fysik, B. 9, N:o 26, 1914.
[2] Undersögelser over freqventsflater og korrelation, 1915.
[3] Kungl. Vetenskapsakademiens handlingar, 1917.

an arbitrary function of two variables by means of the exponential $e^{-\frac{1}{2}(ax^2+2bxy+cy^2)}$.

Writing

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = q(xy) \text{ shortly } q,$$

$$ax + by = \xi,\ bx + cy = \eta,$$

we denote analogous as for frequency functions of one variable

$$\frac{d^{n+m} e^{-\frac{1}{2} q(x,y)}}{dx^n\, dy^m} = \Phi_{n,m} \text{ by } (-1)^{m+n} U_{n,m} e^{-\frac{1}{2} q(x,y)}.$$

We find

$$U_{0,0} = 1, \qquad U_{3,0} = \xi^3 - 3a\xi,$$

$$U_{1,0} = \xi, \qquad U_{2,1} = \xi^2\eta - 2b\xi - a\eta,$$

$$U_{0,1} = \eta, \qquad U_{1,2} = \xi\eta^2 - 2b\eta - c\xi,$$

$$U_{2,0} = \xi^2 - a, \qquad U_{0,3} = \eta^3 - 3c\eta,$$

$$U_{1,1} = \xi\,.\,\eta - b, \qquad U_{4,0} = \xi^4 - 6a\xi^2 + 3a^2,$$

$$U_{0,2} = \eta^2 - c, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

In general we have[1]

$$U_{m,n}(x,y) = U_m\left(\frac{\xi}{a}, a\right) U_n\left(\frac{\eta}{c}, c\right) -$$

$$- m\,.\,nbU_{m-1}\left(\frac{\xi}{a}, a\right) U_{n-1}\left(\frac{\eta}{c}, c\right) + \cdots$$

The U (Hermite's polynomials) may also be defined by the equation

$$e^{-\frac{1}{2} q(x-h,\, y-h_1)} = e^{-\frac{1}{2} q(x,y)} \sum \frac{h^m h_1^n}{m!\,n!} U_{m,n}.$$

[1] See Hermite, Oeuvres, t. II, p. 303.

We denote farther with $\psi(x, y)$ the quadratic contravariant to the form $\varphi(x, y)$ and with δ the invariant $(\delta = ac - b^2)$. We introduce a series of new polynomials V defined by the equation

$$e^{kx + k_1 y} = e^{\frac{\psi(k, k_1)}{2\delta}} \sum \frac{k^m k_1^n}{m!\, n!} V_{m, n}.$$

We get the V then from the U, if we for ξ, η, a, b, c substitute $x, y, \frac{c}{\delta}, -\frac{b}{\delta}, \frac{a}{\delta}$.

We have the following relations

$$U_{m+1, n} - \xi U_{m, n} + am U_{m-1, n} + bn U_{m, n-1} = 0,$$

$$U_{m, n+1} - \eta U_{m, n} + bm U_{m-1, n} + cn U_{m, n-1} = 0$$

and

$$\frac{\partial U_{m, n}}{\partial \xi} = m U_{m-1, n}, \quad \frac{\partial U_{m, n}}{\partial \eta} = n U_{m, n-1}.$$

From that we obtain the partial differential equations

$$a \frac{\partial^2 U_{m, n}}{\partial \xi^2} + b \frac{\partial^2 U_{m, n}}{\partial \xi \partial \eta} - \xi \frac{\partial U_{m, n}}{\partial \xi} + m U_{m, n} = 0,$$

$$c \frac{\partial^2 U_{m, n}}{\partial \eta^2} + b \frac{\partial^2 U_{m, n}}{\partial \xi \partial \eta} - \eta \frac{\partial U_{m, n}}{\partial \eta} + n U_{m, n} = 0.$$

Farther we have finally

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \varphi(x, y)} U_{m, n} V_{p, q} dx dy = 0,$$

when $m \neq p$ or $n \neq q$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \varphi(x, y)} U_{m, n} V_{m, n} dx dy = \sqrt{\frac{\pi^2}{\delta}}\, m!\, n!\, (4\delta)^{m+n}.$$

The equation $U_{m,n}(y_0, x) = 0$ has $m + n$ real roots. After this remarks we may formally write the series

$$(3) \quad \Sigma A_{m,n} \Phi_{m,n} = \Sigma A_{m,n} (-1)^{m+n} U_{m,n} e^{-\frac{1}{2} q(x,y)} = F(x,y),$$

where the coefficients A are any arbitrary constants. We assume the series is uniformly convergent for the interval $(-\infty, \infty)$ and represent the function $F(x, y)$. We then find the coefficients $A_{m,n}$ by multiplying with $V_{m,n}$ and integrate from $-\infty$ to ∞.

We have

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(x,y) V_{m,n} dx dy = (-1)^{m+n} A_{m,n} \cdot \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} q(x,y)} U_{m,n} V_{m,n} dx dy$$

or

$$(4) \qquad A_{m,n} = \frac{(-1)^{m+n} \sqrt{\delta}}{\pi m! n! (4\delta)^{m+n}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(x,y) V_{m,n} dx dy.$$

As the $V_{m,n}$ are polynomials in x and y, the coefficients A are expressed by the »moments» of $F(x, y)$.

Is $F(x, y)$ a continuous function with finite oscillation the series (3) is uniformly convergent and represents the function $F(x, y)$.[1]

The series (3) gives the general solution of any frequency function of two variables.

[1] See MEHLER, Crelles journal, v. 66; W. MULLER-LEBEDEFF, Mat. Ann., v. 64, and the memoires by FREDHOLM and HILBERT on integral equations.

III.

It is easy to generalize the foregoing remarks to frequency-distributions for μ variables.

The equation for the normal frequency-distribution for μ variables $x, y, z, \ldots$ is, according to BRAVAIS's general law, when u is the dependent variable

$$u = k \,.\, e^{-\frac{1}{2}\varphi(x, y, z, \ldots)}.$$

Where $\varphi(x, y, z, \ldots)$ is a quadratic form in μ variables $x, y, z \ldots$, where the real part is definite and positive.

If we deal with an arbitrary frequency-distribution for μ variables, we will, as in the former cases, compare it with the normal frequency-distribution for μ variables.

We are then led to obtain the development of an arbitrary frequency function of μ variables by means of the exponentiel $e^{-\frac{1}{2}\varphi(x, y, z \ldots)}$.

We denote with $\psi(x, y, z \ldots)$ the quadratic contrevariant to $\varphi(x, y, z \ldots)$ and with δ the invariant.

The polynomials U and V are defined by the equations

$$e^{-\frac{1}{2}\varphi(x-h,\, y-h_1,\, z-h_2, \cdots)} = e^{-\frac{1}{2}\varphi(x, y, z, \cdots)} \sum \frac{h^n h_1^{n'} h_2^{n''} \cdots}{n!\, n'!\, n''! \cdots} U_{n, n', n'', \cdots}$$

$$e^{-\frac{1}{2}\varphi\left[x - \frac{1}{2\delta}\frac{\partial\psi}{\partial k},\, y - \frac{1}{2\delta}\frac{\partial\psi}{\partial k_1}, \cdots\right]} = e^{-\frac{1}{2}\varphi(x, y, \cdots)} \sum \frac{k^n k_1^{n'} k_2^{n''} \cdots}{n!\, n'!\, n''! \cdots} V_{n, n', n'' \cdots}$$

We have the integral theorem[1]:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cdots e^{-\frac{1}{2}\varphi(x, y, z \cdots)}\, U_{n, n', n'' \cdots}\, V_{m, m', m'' \cdots}\, dx\, dy\, dz = 0$$

if only one of the differences $n - m$, $n' - m'$, $n'' - m'' \cdots$ are different form nil, and

[1] HERMITE, Oeuvres, t. II, p. 300.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots e^{-\frac{1}{2}q(x,y,z\cdots)}\,U_{n,n',n''\cdots}\,V_{n,n',n''\cdots}\,dx\,dy\,dz\cdots$$

$$=\sqrt{\frac{\pi^{\mu}}{\delta}}\;n!\,n'!\,n''!\cdots(4\delta)^{n+n'+n''+\cdots}.$$

We formally write the series

$$(5)\qquad \Sigma A_{n,n',n''\cdots}\,U_{n,n',n''\cdots}\,e^{-\frac{1}{2}q(x,y,z,\cdots)}=F(x,y,z,\cdots).$$

Reasoning as before we find:

$$A_{n,n',n''\cdots}=\frac{1}{(4\delta)^{n+n'+\cdots}\,n!\,n'!\,n''!\cdots}\sqrt{\frac{\delta}{\pi^{\mu}}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots V_{n,n'\cdots}\,F\,dx\,dy\cdots$$

The formerly remarks repeated shows, that the series (5) determines an arbitrary frequency function for μ variables.

Untersuchung über die Sterblichkeit der Abstinenzlern.

Von N. V. E. Nordenmark.

Die Frage betreffend die Sterblichkeit unter versicherten Abstinenzlern dürfte noch als vollständig ungelöst zu betrachten sein. Die einzige mir bekannte Untersuchung in dieser Richtung ist die von Aktuar P. M. Moore im Journal of the Institute of Actuaries[1] veröffentliche Abhandlung: On the comparative Mortality among assured Lives of Abstainers and non Abstainers from Alcoholic Beverage. Die Untersuchung stützt sich auf ein von der Versicherungsgesellschaft United Kingdom Temperance and General Provident Institution geliefertes Material, einer Gesellschaft, die 1840 gebildet wurde und zwei Abteilungen hatte, eine für Absolutisten und eine für Nichtabsolutisten. Von mehreren Seiten ist das erhaltene Resultat einer eingehenden Kritik unterzogen worden. Ich verweise in dieser Beziehung auf die Abhandlung Dr. Andraes.[2] Das Material ist übrigens nicht nach der Anzahl durchlebter Versicherungsjahre gruppiert und gibt deshalb vom Lebensversicherungsstandpunkt kein klares Bild über den Sterblichkeitsverlauf.

Die folgende Untersuchung[3] dürfte deshalb als die erste ihrer Art zu betrachten sein, teils weil sie sich auf ein Material stützt, das Personen enthält, von denen man durch

[1] Vol. XXXVIII. Part. III. Seite 212.

[2] Berichte des fünften internationalen Kongresses für Versicherungswissenschaft, S. 491, Berlin 1906.

[3] Siehe: Undersökning av dödligheten hos livförsäkrade medlemmar av I. O. G. T. 1889—1917. Stockholm 1919.

eine strenge Kontrolle weiss, dass sie Abstinenzler gewesen sind, teils weil die Sterblichkeit auch mit Rücksicht auf die Versicherungszeit untersucht worden ist.

Die Lebensversicherungsgesellschaft I. O. G. T. wurde im Jahre 1916 gebildet, indem ein älterer Verein, auf Umlageverfahren gebaut, Good Templar Ordens Självhjälpsförening (Selbsthilfsverein), umgebildet wurde, und erhielt von der Behörden festgesetzte Rechnungsgrundlagen.

Der Selbsthilfsverein wurde am 1. Mai 1889 mit dem Zwecke gegründet, bei dem Tode eines Mitgliedes durch Beitragserhebungen, jedoch höchstens 2,000 Kr., auszuzahlen. Im Laufe der Jahre wurden zur Stärkung des Vereins gewisse Statutenveränderungen vorgenommen. So wurden im Jahre 1899 gewisse feste Umschläge in Altersklassen von 10 zu 10 Jahren festgestellt, wodurch Gelegenheit zur Bildung eines Reservefonds bereitet werden sollte. Weiter wurden die Bedingungen für den Eintritt u. a. m. verschärft. Am 1. Juli 1914 gab der Verein das Beitragserhebungssystem auf und bildete seine Wirksamheit auf versicherungstechnischer Grundlagen mit Prämien und Prämienreserve, berechnet auf Grund der allgemeinen schwedischen Sterblichkeitstabelle für Männer 1881—1890 und 4 % Zinsen, um. 1916 wurde der Verein in eine Versicherungsgesellschaft umgewandelt. In den ersten beiden Jahren des Bestehens des Vereins war keine ärztliche Untersuchung erforderlich, 1891 wurde aber eine solche nach einem kurzgefassten Formular eingeführt.

Als Zähleinheit ist die Versicherung angewendet worden, welche Einheit hierbei nahezu mit versicherter Person zusammenfallen dürfte. Die Untersuchung umfasst 17,721 Versicherungen, davon 10,099 mit ärztlicher Untersuchung und 7,622 ohne eine solche. Versicherte Männliche waren 12,672 und Weibliche 5,049.

Da das Material zu gering war, um eine Einteilung der Versicherten mit und ohne ärztliche Untersuchung zu gestatten, und da das früher für die ärztlichen Gutachten angewendete Formular verhältnismässig einfach war, sind die beiden Gruppen zusammengefasst worden.

Die Anzahl Beobachtungsjahre und die Anzahl Todesfälle für Männliche und Weibliche geht aus der folgenden Tabelle hervor.

Anzahl Beobachtungsjahre:

	Versicherungsjahre		Summe
	0—9	10—28	
Männliche	85,084	63,957	149,041
Weibliche	37,335	18,532	65,867
	122,419	92,489	214,908

Anzahl Todesfälle:

	Versicherungsjahre		Summe
	0—9	10—28	
Männliche	573	949	1,522
Weibliche	281	412	693
	854	1,361	2,215

Zuerst wurde eine Untersuchung vorgenommen, ob in der Sterblichkeit zwischen Männlichen und Weiblichen ein grösserer Unterschied vorhanden sei. Ich verglich die Aggregatsterblichkeit besonders für Männliche und besonders für Weibliche mit der Aggregatsterblichkeit für Männliche nach der Tabelle der 17 schwedischen Gesellschaften, einfache Lebensversicherungen. Der Vergleich ergab folgende Resultate:

Anzahl Todesfälle:

	Beobachtete	Berechnete	Diff. %
Männliche	1,522	2,023,50	—24,78
Männliche u. Weibliche	2,214	2,941,76	—24,74

Es erwies sich somit, dass die Sterblichkeit der Weiblichen, eigentümlicherweise, dieselbe wie die der Männlichen ist. Das ganze Material für Männliche und Weibliche wurde deshalb zusammengeführt, wodurch ich ein grösseres Beobachtungsmaterial erhielt.

Um eine unmittelbare Vorstellung von dem Einfluss der Versicherungszeit auf die Sterblichkeit zu erhalten, wurde ein summarischer Vergleich zwischen der beobachteten Sterblichkeit (Männliche und Weibliche zusammengeführt) und der

nach der Tabelle der 17 schwedischen Gesellschaften berechneten, einfache Lebensversicherung, gemacht.

Vergleich zwischen der beobachteten und der berechneten Sterbefälle nach den Erfahrungen der 17 schwedischen Gesellschaften. Selektionstafel, einfache Lebensversicherung.

	Anzahl zurückgelegte ganze Versicherungsjahre					
	0	1	2	3	4	5
Beob.	68	92	96	86	105	82
Berechn.	52,63	67,91	77,80	84,91	90,54	94,28
Übersterbl. + / Untersterbl. −	+29,20	+35,47	+23,39	+1,28	+15,97	−13,03
	Anzahl zurückgelegte ganze Versicherungsjahre					
	6	7	8	9	0—9	10—28
Beob.	81	69	79	95	853	1,361
Berechn.	98,79	103,23	109,52	115,19	894,78	2,020,09
Übersterbl. + / Untersterbl. −	−17,99	−33,16	−27,87	−17,53	−4,67	−32,63

Zu unserer Überraschung finden wir hier, dass eine Selektionssterblichkeit kaum existiert. Der Vergleich ergibt das Resultat, dass in den fünf ersten Versicherungsjahren eine beträchtliche Übersterblichkeit auftritt, die im zweiten Versicherungsjahre ihr Maximum mit 35,47 % erreicht. Vom siebenten Versicherungsjahre an tritt ein entgegengesetztes Verhältnis ein, indem die beobachtete Sterblichkeit bedeutend niedriger wird, mit einem Maximum der Untersterblichkeit von 33,16 % im siebenten Versicherungsjahre. In den 10 ersten Versicherungsjahren beträgt die Untersterblichkeit im Vergleich mit der Sterblichkeitstabelle der 17 schwedischen Gesellschaften, einfache Lebensversicherung, im Durchschnitt nur 4,67 %. In den folgenden Versicherungsjahren wird die Untersterblichkeit bedeutend und beträgt 32,63 %. Wenn auch die beiden Tafeln, wie im folgenden näher gezeigt werden soll, infolge der Zusammensetzung des Materials nicht vergleichbar

sind, so ergibt sich hieraus doch, dass eine scharf hervortretende Selektion nicht vorhanden ist.

Ich beschloss deshalb, wenigstens zu Anfang einen Ausgleich für eine Aggregattabelle vorzunehmen und mit dieser eine Untersuchung auszuführen, ob wirklich eine Selektion vorhanden sei. Bei diesem Ausgleich wendete ich die King-Hardysche Methode an, die, wie ich aus früheren guten Erfahrungen wusste, oft schnell zum Ziele führt. Für die Makehamschen Konstanten fanden sich folgende Werte:

$$a = 0{,}0045063,$$
$$b = 0{,}00001639,$$
$$\log c = 0{,}0485543.$$

Die Übereinstimmung zwischen der Anzahl beobachteter Sterbefälle und den nach der ausgeführten ausgeglichenen Aggregattabelle berechneten war ausserordentlich gut. Die Anzahl beobachteter Todesfälle ist 2,215 gegen berechnete 2,246,42 (— 1,4 %).

Auf Grund dieser konstruierten Aggregattabelle habe ich einen Vergleich zwischen der in jedem Versicherungsjahr beobachteten und der nach der Aggregattabelle berechneten Sterblichkeit gemacht. Aus dem Vergleich geht unzweideutig hervor, dass, vom ersten Versicherungsjahre natürlich abgesehen, keine eigentliche Selektion vorhanden ist. Als Schlusstabelle nach dem 10. Versicherungsjahre lässt die Aggregattabelle nichts zu wünschen übrig. Die Übereinstimmung in den 10 ersten Versicherungsjahren ist ebenfalls eine überraschend gute. Das fünfte Versicherungsjahr weist zwar eine bedeutende Übersterblichkeit auf, dieselbe wird aber durch eine entsprechende Untersterblichkeit im 8. und 9. Versicherungsjahre aufgewogen. Der Verlauf beim Vergleich ist im grossen ganzen für das ganze Material zusammen (Männliche und Weibliche) wie für Männliche allein, ziemlich gleichartig. Die Aggregattabelle ist, wie gesagt, auf Grund des ganzen Materials konstruiert.

Im grossen ganzen (vom ersten Versicherungsjahre natürlich abgesehen) können wir hier nicht von einer scharf hervortretenden Selektion sprechen, wenn eine Aggregattabelle sich so gut der Sterblichkeit in den verschiedenen Versicherungs-

Vergleich zwischen der beobachteten Sterbefälle und der berechneten nach der Ausgleichung.

	Anzahl ganze Versicherungsjahre					
	0	1	2	3	4	5
Beob.	68	92	96	86	105	83
Berechn.	100,707	91,634	87,282	84,913	83,984	83.191
Übersterbl. + / Untersterbl. −	−32,48	+0.40	+9.99	+1,28	+25,02	−0,23

	Anzahl ganze Versicherungsjahre					
	6	7	8	9	0—9	10—28
Beob.	81	69	79	95	854	1,361
Berechn.	82.599	81.921	82.446	82.998	861,675	1.384.734
Übersterbl. + / Untersterbl. −	1.94	−15.77	−4.18	−14.46	−0.89	−1,71

jahren anschmiegt. Hier liegt offenbar ein Fall vor, wo Selektionstafeln nicht anwendbar sind. Ich habe es deshalb nicht für der Mühe wert gehalten, abgestufte Tafeln zu konstruieren.

Durch einen Vergleich mit der Sterblichkeit nach den Erfahrungen der 17 schwedischen Gesellschaften (Lebensversicherung) haben wir bei dem hier behandelten Material nach dem fünften Versicherungsjahre und vor allem vom elften an, eine bedeutende Untersterblichkeit gefunden. Dieses Resultat dürfte indessen in einem hohen Grade darauf beruhen, dass das beiderseitige Material stark ungleichartig ist. Solche Vergleiche müssen natürlich, um Wert zu besitzen, zwischen Material, das gleichartig ist, aus derselben Zeit stammt, gleichartige Volksklassen betrifft und auf denselben Versicherungsbedingungen aufgebaut ist, vorgenommen werden. Das Material der 17 schwedischen Gesellschaften umfasst einen Zeitraum von nahezu fünfzig Jahren und ist stark heterogen. Es ist deshalb nicht verwunderlich, dass die Sterblichkeit nach ihm bedeutend grösser ist. Es ist natürlich schwer, um nicht zu sagen unmöglich, ein Material zu finden, mit dem ein berechtigter Vergleich angestellt wer-

den kann. Eine naheliegende Tafel hierbei ist vielleicht die von Dr. PALMQVIST auf Grund der Erfahrungen betr. die der Sterblichkeit der Karenzversicherten ausgeführte. Dieses Material umfasst ungefähr dieselbe Zeit, wie die hier vorliegende, aber wahrscheinlich nicht dieselben Volksklassen. Die Karenzversicherten bestehen hauptsächlich aus Industriearbeitern, den breiteren Schichten in Städten und Industriezentren, während die Klientel der Versicherungsgesellschaft I. O. G. T. zu einem nicht unbeträchtlichen Teile aus der gesundesten Landbevölkerung, kleinen Handwerkern, Lehrern u. a. besteht. Ausserdem sind $^5/_9$ der bei I. O. G. T. Versicherten einer mehr oder weniger sorgfälligen ärztlichen Untersuchung unterzogen worden, nahezu 30 % bestehen auch aus Frauen. Schon im voraus müssen wir deshalb bei den Karenzversicherten eine höhere Sterblichkeit erwarten. Der Vergleich zwischen den Aggregattabellen ergibt eine um 10,77 % grössere Sterblichkeit bei den Karenzversicherten, als bei den in I. O. G. T. Versicherten. Ein Vergleich nach Versicherungsjahren gibt bei I. O. G. T. eine Untersterblichkeit von 7,2 % in den zehn ersten Versicherungsjahren und von 21,53 % in den darauffolgenden Jahren als Resultat.

Vergleich zwischen den beobachteten Sterbefällen und den berechneten nach Karenzversicherung.

	Anzahl ganze Versicherungsjahre					
	0	1	2	3	4	5
Beob.	67	92	96	86	104	83
Berechn.	65,584	88,646	97,248	97,099	94,699	90,801
Übersterbl. + / Untersterbl. −	+2,16	+ 3,78	−1,28	−11,43	+9,86	−8,59

	Anzahl ganze Versicherungsjahre					
	6	7	8	9	0—9	10—28
Beob.	80	68	79	93	848	1,361
Berechn.	89,412	91,967	96,718	101,667	913,811	1,734,399
Übersterbl. + / Untersterbl. −	−10,53	−26,06	−18,32	−8,52	−7,20	−21,53

Schliesslich habe ich noch einen Vergleich angestellt, und zwar mit einem Material, das meiner Ansicht nach dem hier vorliegenden wahrscheinlich ganz nahe steht. Ein Vergleich ist mit dem Material der 17 schwedischen Gesellschaften unter Versicherten nach gemischter Versicherung ausgeführt worden. Dieses Material stammt zum grösseren Teile aus den Jahren 1880—1906 und dürfte gesundere und im ganzen besser gestellte Gesellschaftsklassen umfassen. Das Material von I. O. G. T. erstreckt sich indessen elf Jahre länger hinaus, bis 1917, und die sekulare Verbesserung der Lebenslänge muss ja somit hervortreten, weshalb hier bei I. O. G. T. eine etwas geringere Sterblichkeit zu erwarten ist. Auch hier tritt eine klar markierte Übersterblichkeit in den fünf ersten Versicherungsjahren auf. In den zehn ersten Versicherungsjahren ist die Sterblichkeit bei I. O. G. T.

Vergleich zwischen den beobachteten Sterbefällen und den berechneten nach den Erfahrungen der 17 schwedischen Gesellschaften, gemischte Versicherungen.

	Anzahl ganze Versicherungsjahre					
	0	1	2	3	4	5
Beob.	63	92	96	86	105	83
Berechn.	57,13	67,46	74,85	80,23	84,75	88,23
Übersterbl. + / Untersterbl. −	+19,02	+36,38	+28,26	+7,20	+23,89	−5,93
	Anzahl ganze Versicherungsjahre					
	6	7	8	9	0—9	10—28
Beob.	81	69	79	95	854	1.361
Berechn.	90,95	92,99	96,02	98,92	831,52	1.628,93
Übersterbl. + / Untersterbl. −	−10,94	−25,79	−17,73	−3,97	+2,70	−16,45
						2,217
						2,460,45
						−9,98

im Durchschnitt 2,7 % höher, um dann in den darauffolgenden in eine um 16,45 % niedrigere überzugehen. In sämtlichen Versicherungsjahren sind 2,215 Todesfälle gegen 2,460 berechnete eingetroffen, was einer Untersterblichkeit von 9,98 % entspricht.

Über die Konstruktion der Ausscheidetafel der Aktiven.

Von Dr. Phil. **E. A. Hintikka**, Helsingfors.

In der technischen Behandlung der Invaliden- oder Krankenversicherung kommt die Aufgabe vor, aus der Gruppe der Lebenden die Gruppe der Aktiven auszuscheiden. Dies wird in der Praxis vielleicht ausnahmslos derart ausgeführt, dass die Gruppe derjenigen Invaliden gleichen Alters, welche im Laufe eines Jahres invalid werden, weiter Jahr für Jahr verfolgt wird. Angenommen, dass die Anzahl der Aktiven in einem Zeitpunkt gegeben ist, lässt sich vermittels der gegebenen Wahrscheinlichkeiten die Anzahl der während eines Jahres invalid Gewordenen und am Ende des ersten Jahres und späterer Jahre lebenden Invaliden ermitteln. Die Ausscheidetafel der Aktiven wird auf diese Weise Schritt für Schritt von dem jüngsten Alter zu den höheren weiter aufgebaut.

Die Konstruktion der Tafel kann auch mit Hülfe aufeinander folgender Näherungswerte durchgeführt werden. Was die Rechenarbeit betrifft, ist die Methode durchaus möglich und besonders, wenn es nur auf die ganze Gruppe der lebenden Aktiven, nicht auf die einzelnen Jahreskontingente der lebenden Invaliden ankommt, sollte dieselbe keineswegs mühsamer sein als die etwas umständliche oben beschriebene.

Die Anzahl der Lebenden $l_{[x]+z}$ zerfällt in die Anzahl der Aktiven $l^{aa}_{[x]+z}$ und der Invaliden $l^{ii}_{[x]+z}$,

$$(1) \qquad l^{aa}_{[x]+z} + l^{ii}_{[x]+z} = l_{[x]+z}.$$

Es sei $v_{[x]+t}$ die Invalidisierungsstärke und $p^i_{[x]+t,z}$ die Wahrscheinlichkeit, dass ein im Zeitpunkt $[x]+t$ invalid gewordener Versicherter nach z Jahren vom Anfang der Versicherung noch als Invalider lebt. Die Anzahl der Invaliden ist

$$(2) \qquad l^{ii}_{[x]+z} = \int_0^z l^{aa}_{[x]+t} \cdot v_{[x]+t} \cdot p^i_{[x]+t,z} \, dt.$$

Wenn dieser Ausdruck in die Gleichung (1) eingeführt wird, so erhält man

$$(3) \qquad l^{aa}_{[x]+z} + \int_0^z l^{aa}_{[x]+t} \cdot N(t,z;x)\, dt = l_{[x]+z},$$

wo

$$(4) \qquad N(t,z;x) = v_{[x]+t} \cdot p^i_{[x]+t,z}$$

ist.

Um die Ausscheidetafel der Aktiven zu konstruieren muss also die Gleichung (3) aufgelöst werden, wo die Funktion $l^{aa}_{[x]+z}$ als die einzige Unbekannte zu betrachten ist. Die Gleichung gehört zu der unter dem Namen Volterrasche Integralgleichung zweiter Art bekannten und untersuchten Klasse von Funktionalgleichungen und kann durch aufeinander folgende Näherungswerte aufgelöst werden. Die einzige Bedingung für die gleichmässige Konvergenz der Lösung ist, dass die bekannte Funktion, $l_{[x]+z}$, und der Kern der Gleichung, $N(t,z;x)$, endliche Werte besitzen, welche Bedingungen offenbar erfüllt sind.

Wenn eine Aggregatsterbetafel und eine von der verflossenen Versicherungszeit unabhängige Invalidisierungsstärke zu den Rechnungsgrundlagen gewählt worden sind, können die obigen Gleichungen durch die einfacheren

$$(1^*) \qquad l^{aa}_x + l^{ii}_x = l_x,$$

$$(2^*) \qquad l_x^{i} = \int_{x_0}^{x} l_z^{aa} N(z, x)\, dz,$$

$$(3^*) \qquad l_x^{aa} + \int_{x_0}^{x} l_z^{aa} N(z, x)\, dz = l_x,$$

$$(4^*) \qquad N(z, x) = v_z\, p_{z,x}^{i}$$

ersetzt werden, wenn $p_{z,x}^{i}$ die Wahrscheinlichkeit bedeutet, dass ein im Alter z invalid Gewordener im Alter x noch als Invalider lebt.

Die unbekannte Funktion der Gleichung (3*) ist in der Form einer unendlichen gleichmässig konvergenten Reihe

$$(5) \qquad l_x^{aa} = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots$$

darstellbar, wenn die Glieder der Reihe in folgender Weise definiert werden:

$$(6) \qquad \begin{cases} \varphi_0(x) = l_x, \\ \varphi_1(x) = -\int_{x_0}^{x} \varphi_0(z) N(z, x)\, dz, \\ \varphi_2(x) = -\int_{x_0}^{x} \varphi_1(z) N(z, x)\, dz, \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

Der erste Näherungswert der Aktiven ist also die Anzahl der Lebenden. Das zweite Glied kann als die negative Anzahl der Invaliden aufgefasst werden, wenn dieselbe unter der Annahme hergeleitet wird, dass alle Lebenden aktiv sind. Das dritte Glied φ_2 ist eine Korrektion zu der Anzahl der erhaltenen Invaliden, welche Korrektion so erhalten wird,

dass die ersten unkorrigierten Invaliden als Aktive betrachtet werden. Das vierte Glied ist eine neue Verbesserung u. s. w.

Die Ordnung der aufeinander folgenden Glieder φ ist dieselbe wie die der Potenzen der Invalidisierungsstärke v. Weil diese im allgemeinen eine kleine Grösse ist, wird die Reihe (5) in gewöhnlichen Fällen rasch konvergieren.

Von den statistischen Grundzahlen ist die Anzahl der Lebenden gegeben, und die Wahrscheinlichkeiten $p^i_{z,x}$ können ohne Mühe aus den gegebenen Ausscheidekoeffizienten $\sigma_{[x]+t}$ der Invaliden erhalten werden. Anstatt der Invalidisierungsstärke v_z ist gewöhnlich die entsprechende Wahrscheinlichkeit i_z während eines Jahres invalid zu werden gegeben. Ist die Annahme zulässig, dass bei der Behandlung des statistischen Materials die letztgenannte mit Berücksichtigung der Abnahme der Aktiven durch Todesfälle berechnet worden ist, so kann, wenn eine theoretisch strenge Behandlung erwünscht wird, die Invalidisierungsstärke aus der Formel

$$v_z = -\frac{\log(1 - i_z) + \log(1 - i_{z-1})}{2 \log e}$$

oder nötigenfalls aus einer genaueren hergeleitet werden.

Die Werte des Kernes $N(z, x)$ sind für ganzzahlige Wertpaare der Variabeln (z, x) gegeben. Werden diese in eine Tafel mit doppeltem Eingang geordnet, z. B. in der Weise, dass auf einer und derselben Zeile z und auf einer Spalte x unverändert bleibt, so lassen sich die Glieder (6) durch Integration längs den Spalten bis zu dem höchsten Alter berechnen, wenn vor der Integration die Zahlen einer Zeile mit dem dem Alter der Zeile entsprechenden Wert des nächst vorangehenden Gliedes φ multipliziert werden.

Zur Illustration der Konvergenz der Reihe (5) seien folgende Zahlen angeführt, welche bei der Ausführung vorbereitender Rechnungen für das finnische Komitee zur Organisation einer allgemeinen Sozialversicherung erhalten worden sind. Als Ausgangspunkt diente die Annahme, dass alle Lebenden des Alters 15 aktiv sind.

x	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6
15	72 060						
25	67 763	− 167,6	+ 0,2				
35	63 030	616,8	3,8				
45	57 630	1 505,8	24,2	− 0,2			
55	49 941	4 524,3	235,2	8,9	+ 0,1		
65	37 626	16 816,4	4 079,4	694,6	85,7	− 9,5	+ 0,8

Von den benutzten Rechnungsgrundlagen enthält unten stehende Tabelle Zahlenbeispiele.

x	$1\,000\, q_x$	$1000\, i_x$	$1\,000\, \sigma_{[x]+t}$		
			$t = 0$	5	11
15	4.05	0,6	652,5	74,0	26,5
25	7,13	1,6	527,0	66,5	26,8
35	7.56	3,0	412.8	59,0	29,4
45	11,09	6,2	303.3	54,0	36,7
55	19,81	20,6	200,3	51,7	59,5
65	41,42	93,0	124.5	76.0	109,5

Die benutzte Sterblichkeit ist diejenige der männlichen Bevölkerung Finnlands in den Jahren 1901—1910, die Wahrscheinlichkeiten i_x invalid zu werden sind die aus der Erfahrung der Jahre 1906—1908 in der deutschen Reichsversicherung hergeleiteten und die Ausscheidekoeffizienten der Invaliden $\sigma_{[x]+t}$ ebenso die deutschen der Jahre 1891—1899. Die letztgenannten sind etwas modifiziert, teils um eine bessere Übereinstimmung mit den Sterblichkeitsverhältnissen Finnlands und teils um eine Sicherheitsbelastung zu erhalten.

Literatur.

G. H. Knibbs: *The mathematical theory of population, of its character and fluctuations, and of the factors which influence them.* Appendix A to Vol. 1 of Census of the Commonwealth of Australia 1911, p. 1—466. Melbourne 1917.

The above work is in a sub-title stated to be »an examination of the general scheme of statistical representation with deductions of necessary formulæ; the whole being applied to the data of the Australian census of 1911, and to the elucidation of Australian population statistics generally». Were it for no other reason, the treatise is well worthy of notice and of a review in this journal in that it is prepared *ex officio* (the author is an high official in the Commonwealth bureau of statistics), and is thus a first serious attempt from official quarters to lay out the foundation of a general mathematical theory of population, and to prepare official statistics according to strict scientific principles. Indeed, this is a great and laudable plan.

The general disposition of the work is best seen by giving the heads of the different chapters. They are: I Introductory; II Various types of population fluctuations; III Determination of curve-constants and of intermediate values when the data are instantaneous values; IV Special types of curves and their characteristics; V Group values, their adjustment and analysis; VI Summation and integration for statistical aggregates; VII The place of graphics and smoothing in the analysis of population-statistics; VIII Conspectus of population-characters; IX Population in aggregate, and its distribution according to sex and age; X The masculinity of population; XI Natality; XII Nuptiality; XIII Fertility and fecundity and reproductive efficiency; XIV Complex elements of fertility and fecundity; XV Mortality; XVI Migration; XVII Miscellaneous; XVIII Conclusion. — Of the pronouncements of a general character in the introduction we may quote: «The ideal theory of population is one which would enable the statistician not only to determine definitely the influences thereupon of various elements of human development, and of phenomena of Nature. but also to examine all facts of interest to mankind, as they stand in relation to population. And, however hopeless may be the expectations of establishing such a theory with meticulous precision and in all detail, *it nevertheless remains true that fluctuations of population can often be adequately understood only when analysed by means*

of definite mathematical conceptions.[1] Moreover since all important facts concerning population are susceptible of numerical expression, analytical conceptions formulated for the purpose of giving exactitude to a knowledge of its variations should be ultimately cast, if possible, in a mathematical mould. With which pronouncement we heartily agree.

It may at once be stated that in the opinion of the reviewer the work of Mr. Knibbs contains very much that is of general interest to the statistician. And though it is from didactic points of view somewhat heavily moulded, it nevertheless contains portions which are very brilliantly worked out, as well as problems elegantly treated. On the whole the work bears the stamp of an able mathematician.

The work is, however, open to different objections and various criticisms. And how could it be otherwise, considering the wide scope of the scheme and the difficulties of the task to be mastered? In the first place criticism has to observe what the work *does not* contain, and then to examine the flaws in that which it *does* contain. In the first respect there is, indeed, much to be desired. We miss in the work everything about 1) the theory of sampling, 2) the theory of correlation. No theory of population can ever be properly written without reference to those two fundamental conceptions. The theory of sampling has reached a high state of perfection through the work of various authors, of whom may be mentioned Bortkiewicz, Charlier, Edgeworth, Lexis, Pearson, Tschuprow and Yule. And the theory of correlation has been far advanced by the English and Scandinavian statisticians. Hence these necessary ingredients could have been had ready for application by the author. On the whole the cardinal fault of the work is that it makes all too little, if any, reference to *the theory of probability*. Besides it is a fault that, as far as we can see, the work is entirely of a descriptive character. Thus the author states that «given the geometrical form or *graph* of a series of results, the mathematical expression appropriate to represent it will be recognized». And the whole treatise is carried through in strict accordance with this principle. In our opinion, however, there ought to be worked out, for a theory of population, perhaps alongside of such a descriptive method, a *genetic* method, which gives more attention to the nature of the matters studied. What the author gives as theories of definite objects, for instance «the general theory of protogamic and gamic surfaces», is often no theory at all, but only definitions and explanations of the terminology (though for these we have every reason to be grateful to the author).

With respect to what the work does contain we shall not enter into details, but there are a few points to which we cannot forbear calling attention. We cannot see the rationale of the process which the author terms *projective anamorphosis*. It is not, unless we have misunderstood the matter, the same as that to which Edgeworth has given the name of *translation*.

[1] Italics by us

The projective anamorphosis consists in projecting the normal frequency curve on to a plane or curved surface. Evidently it is the same as substituting the variable x of the normal curve for a function of a new variable, i. e. $x = f(\xi)$. But the new curve is then *not* the curve of distribution of ξ. To this end the result of the substitution would have to be multiplied by $\frac{dx}{d\xi}$. But it is, indeed, of importance that the new curve obtained should stand in the same relation to its variable as the normal curve does to x, i. e. in the relation of a variate to its norm of distribution. Otherwise the procedure has no meaning.

Another thing to which we object is the smoothing out of the age-distribution as given by the census, to which the author pays considerable attention. He seems to regard the «zig-zag» form of the age-distribution as wholly dependent on mis-statement in the ages. Thus he says that «It is obvious that the 'smoothed' curve must be of higher accuracy than the zig-zag results, since there are strong reasons for believing that the numbers are sufficiently large to give a 'smooth curve'». We do not know how this is for Australia, but it is decidedly not so for various other countries. In Sweden, for instance, there is no mis-statement of ages, as the census is based on the ecclesiastical registers. But nevertheless we have a very conspicuous zig-zag form of the age-distribution. As is very well known, this is due to oscillations from year to year in the absolute numbers of births, which are, in fact, very neatly reflected in the ups and downs of the age-distribution. But there is, on the whole, nothing to gain by smoothing out these ups and downs, as the age-distribution is of interest principally in comparing with the corresponding age frequencies in births, marriages, and deaths etc. In forming the quotients of a fertility table, a nuptiality table or a mortality table, it is self-evident that the «raw» numbers in the age-distribution are to be used as denominators, and any smoothing out to be done must be done on the quotients obtained, or on any series derived from them, such as the column l in the mortality table etc.

In respect of the distribution of marriages according to the combined ages of the pairs married, it could have been desired that the first marriages had been treated separately from re-marriages. Regarding the mathematical form of the «protogamic surface» and the distribution of age-differences I think very much more could be done. I may here refer to my work «Das Heiratsalter in Schweden 1891—1910», Lunds Universitets årsskrift N. F. Avd. 2. Bd 14. Nr. 18. And I should like to call the author's attention to the fact that the two curves joining the points in the family of isogamic and isoprotogamic curves where they have tangents parallel to the axes are the «regressions of the modes», i. e. they give the most probable age of the wife for any given age of the husband, and *vice versa*. Similarly the curves AB and AC in fig. 96 are the loci of the age of the wife, giving a maximum of fertility when associated with a husband of given age, and *vice versa*. This very important fact the author

refers to in a rather off-hand fashion by telling us that the curves denote »the ages where small differences in the ages of the *husbands* (or *wives* respectively) have no effects on the fertility».

By far the most weighty part of the work is chapters XIII and XIV, where the author gives a treatment of the elements of fertility and fecundity. Here various new conceptions of very great value are introduced and several important questions are investigated. Of immense interest to statisticians are the data brought together regarding fertility as depending on the combined ages of husband and wife, and the «diisogens» reproduced in fig. 96.

In concluding, it may be said that the work of Mr. KNIBBS, though, as before stated and demonstrated, open to objections and criticism in principle and in detail, must nevertheless be regarded as a very important step towards the preparation of a general theory of population.

S. D. Wicksell.

Indstilling fra den av Den norske aktuarforening i møte den 7. mai 1918 nedsatte komite til utarbeidelse av nyt beregningsgrundlag for livrenter. Fabritius & Søner. Kristiania 1919.

Den 7 maj 1918 tillsatte den norska aktuarieföreningen en kommitté, bestående av aktuarierna Gran, Hesselberg, Hoel, Holtsmark och Palmstrøm för framläggande av ett slutligt förslag angående nya beräkningsgrunder för livränteförsäkring. Denna kommitté har i dagarna framlagt sitt betänkande.

Kommittén redogör först för frågans tidigare behandling i den norska aktuarieföreningen och framlägger därefter förslag dels angående beräkningningsgrunder, dels angående tilläggslivräntor, dels slutligen angående beräkning av försäkringsfond för livräntor.

Vid avgivande av förslag angående val av dödlighetstabell har enighet inom kommittén icke kunnat uppnås, i det att flertalet förordat en selekt dödlighetstabell under det att en minoritet, bestående av aktuarierna Gran och Holtsmark, velat tillämpa en aggregattabell. De föreslagna dödlighetstabellerna äro, huvudsakligen av hänsyn till beräkningen av livräntor å två liv, konstruerade med tillhjälp av Makehams formel $\mu_{[x]+t} = \alpha_t + \beta_t c^{x+t}$, varvid samma c-värde användes för män och kvinnor.

För kvinnor har som slutdödlighetstabell föreslagits den av en tidigare kommitté konstruerade dödlighetstabellen, för män har däremot den tidigare föreslagna tabellen något höjts.

Efterföljande tabell utvisar de av kommittén föreslagna dödlighetskoefficienterna efter selektionstidens slut, jämförda med den norska befolkningsdödligheten under artiondet 1900—1910.

Ålder	Av kommittén föreslagna dödlighetskoefficienter fr. o. m. 11:e förs.-året. ‰		Dödligheten i Norge under årtiondet 1900—1910. Dödlighetskoefficienter ‰	
	Kvinnor	Män	Kvinnor	Män
30	3,93	4,75	6,93	7,57
40	5,01	6,01	7,73	7,78
50	7,90	9,35	9,46	11,11
60	15,66	18,30	16,11	19,14
70	36,23	41,99	37,13	42,76
80	89,45	102,93	96,29	106,34
90	218,54	248,28	218,48	215,78
100	481,20	543,48	396,00	458,00

För att erhålla en uppskattning av selektionens inflytande har uträknats förhållandet mellan inträffat antal dödsfall bland kvinnliga livräntetagare under vart och ett av de 10 första försäkringsåren och det beräknade antalet dödsfall vid tillämpning av slutdödlighetstabellen. De sålunda erhållna kvoterna visade sig avtaga med åldern. Med hänsyn till att i de engelska tabellerna $O^{[am]}$ och $O^{[af]}$ förhållandet mellan selektions- och slutdödligheten, i motsats mot vad den norska undersökningen utvisar, växer med åldern, föreslår kommittén, att detta förhållande antages bero enbart av antalet tillryggalagda försäkringsår t enligt formeln

$$\frac{\mu_{[x]+t}}{\mu_{x+t}} = 1 - 0{,}005\,(10 - t)^2.$$

Pa grund av den relation mellan dödlighetstabellerna för män och kvinnor, som av kommittén föreslås, blir då motsvarande förhållande för män sjunkande med åldern.

Kommittén föreslår, att 4 % räntefot lägges till grund för beräkningarna. Då denna räntefot emellertid ligger betydligt under den ränteavkastning, som nu kan uppnås, föreslår kommittén, att en väsentlig del av räntevinsten godtgöres försäkringstagarna i form av tillägg till livräntorna.

Betänkandet innehåller detaljerat förslag angående tillägg till premierna för bestridande av anskaffningskostnader och årliga förvaltningskostnader. Vid genast början livränta utgör förvaltningstillägget 15 % av livräntebeloppet jämte 4 % av nettopremien.

Såsom redan nämnts, föreslår kommittén, att räntevinsten godtgöres livräntetagaren i form av tillägg till livräntan. Räntevinsten måste således förutberäknas. Med hänsyn till penningemarknadens nuvarande

ställning anser kommittén, att till grund för denna förutberäkning för närvarande kan för de 10 första åren läggas:

5 ½ % vid livränteförsäkring med premiebetalning en gång för alla;

5 % vid livränteförsäkring med premiebetalning under minst 10 år och

en mellanliggande procentsats, när premiebetalningstiden är kortare än 10 år.

Efterföljande tabell visar de livräntesatser för en genast börjande livränta, till vilka kommitténs förslag leder, dels utan, dels med tilläggslivränta.

Ålder	Årlig livränta i % av engångspremien			
	Utan tilläggs-livränta		Med tilläggs-livränta	
	Kvinnor	Män	Kvinnor	Män
20	4,54	4,63	5,09	5,19
30	4,83	4,95	5,41	5,54
40	5,32	5,47	5,90	6,07
50	6,14	6,36	6,81	7,06
60	7,59	7,94	8,35	8,73
70	10,25	10,86	11,07	11,72
80	15,31	16,44	16,23	17,42

R. Pq.

SKANDINAVISK AKTUARIETIDSKRIFT

UTGIVEN AV

FORENINGEN AF DANSKE AKTUARER,
DEN NORSKE AKTUARFORENING OCH
SVENSKA AKTUARIEFÖRENINGEN

REDAKTÖR OCH ANSVARIG UTGIVARE:

FIL. D:R N. V. E. NORDENMARK

MEDREDAKTÖRER:

FÖR DANMARK: D:R PHIL. J. F. STEFFENSEN
FÖR NORGE: AKTUAR IVAR HESSELBERG
FÖR SVERIGE: DOCENTEN H. CRAMÉR

ÅRGÅNG III—1920

UPPSALA 1920
ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.

INNEHÅLL 1920.

On a formula for the transformation of mortality tables.

By Thv. Richardt.

(Kristiania.)

1. Given a mortality table and its corresponding financial tables, calculated at a certain rate of interest.

The principal elements of the table are

$$d_x,\ l_x,\ \Sigma l_x \text{ etc.}$$

Its principal values are

$$q_x,\ p_x,\ e_x = \frac{\Sigma l_{x+1}}{l_x},\ f_x = \frac{\Sigma^2 l_{x+1}}{l_x}.$$

The financial elements of the table are

$$C_x = d_x v^{x+1},\ M_x = \Sigma C_x,\ R_x = \Sigma^2 C_x \text{ etc.}$$

$$D_x = l_x v^x,\quad N_x = \Sigma D_x,\ S_x = \Sigma^2 D_x \text{ etc.}$$

Its financial values are

$$\mathrm{a}_x = \frac{N_x}{D_x},\ a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x},\ \mathrm{a}_{x\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \text{ etc.}$$

We propose to construct a new mortality table in such a manner that its principal and financial elements can be calculated directly from the elements of the given table.

In the simplest manner this may be obtained by a linear transformation of the elements of the given table, and we then get two transformations, according as we start with the principal elements (transformation I), or with the financial elements (transformation II).

2. *Transformation I.* We put

$$l'_x = (\alpha + \beta x)\, l_x + \gamma \Sigma l_{x+1} \tag{1}$$
$$= (\alpha + \beta x + \gamma e_x)\, l_x,$$

where α, β, γ are constants.

Hence

$$d'_x = (\alpha + \beta x)\, d_x + (\gamma - \beta)\, l_{x+1}$$

and

$$p'_x = \frac{(\alpha + \beta x + \beta + \gamma e_{x+1})\, p_x}{\alpha + \beta x + \gamma e_x}$$

or

$$\frac{p'_x - p_x}{p_x} = \frac{\beta - \gamma (e_x - e_{x+1})}{\alpha + \beta x + \gamma e_x}. \tag{2}$$

For the financial elements we have

$$D'_x = v^x l'_x = (\alpha + \beta x)\, D_x + \gamma v^x \Sigma l_{x+1}$$
$$= (\alpha + \beta x + \gamma e_x)\, D_x$$
$$C'_x = v^{x+1} d'_x = (\alpha + \beta x)\, C_x + (\gamma - \beta)\, D_{x+1},$$

whence by summation

$$N'_x = (\alpha + \beta x)\, N_x + \beta S_{x+1} + \gamma \Sigma [v^x \Sigma l_{x+1}]$$
$$= (\alpha + \beta x)\, N_x + \beta S_{x+1} + \gamma \frac{1+i}{i} (e_x D_x - N_{x+1})$$
$$M'_x = (\alpha + \beta x)\, M_x + \beta R_{x+1} + (\gamma - \beta)\, N_{x+1}.$$

We may also find N'_x from the formula

$$N'_x = \frac{1+i}{i} (D'_x - M'_x).$$

3. *Transformation II.* Putting

$$D'_x = (\alpha + \beta x) D_x + \gamma N_{x+1} \tag{3}$$
$$= (\alpha + \beta x + \gamma a_x) D_x$$

we find

$$C'_x = v D'_x - D'_{x+1} =$$
$$(\alpha + \beta x) C_x - \beta D_{x+1} + \gamma M_{x+1};$$

hence by summation

$$N'_x = (\alpha + \beta x) N_x + (\beta + \gamma) S_{x+1}$$
$$M'_x = (\alpha + \beta x) M_x - \beta N_{x+1} + (\beta + \gamma) R_{x+1};$$

further

$$p'_x = \frac{1}{v} \frac{D'_{x+1}}{D'_x} = \frac{(\alpha + \beta x + \beta + \gamma a_{x+1}) p_x}{(\alpha + \beta x + \gamma a_x)}$$

or

$$\frac{p'_x - p_x}{p_x} = \frac{\beta - \gamma(a_x - a_{x+1})}{\alpha + \beta x + \gamma a_x}. \tag{4}$$

4. The transformations contain three constants (α, β, γ), two of which are effective (independent). The transformed mortality curve (q'_x) can then generally be made to pass through given points for two given ages. Denoting these ages by x and y, and putting

$$p'_x = h\, p_x$$
$$p'_y = k\, p_y$$

we have for the determination of the constants

$$\begin{aligned} &\alpha(1-h) + \beta(1 + x - xh) - \gamma(\varrho_x h - \varrho_{x+1}) = 0 \\ &\alpha(1-k) + \beta(1 + y - yk) - \gamma(\varrho_y k - \varrho_{y+1}) = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

where $\varrho_x = e_x$ or a_x, according to the transformation I or II.

One of the constants (if not $= 0$) may have an arbitrary value. Generally it will be convenient to put $\gamma = \pm 1$, or $\pm 0{,}1$ etc.

From (2) or (4) it is seen that

$$\alpha + \beta x + \gamma \varrho_x = 0, \quad \varrho_x = e_x \text{ or } a_x$$

generally makes

$$p'_x = \infty,$$

and the transformation, therefore, must be limited to an age interval within which the expression $\alpha + \beta x + \gamma \varrho_x$ does not alter its sign. On the whole it must be provided that p'_x satisfies the conditions

$$0 < p'_x < 1.$$

5. From (2) or (4) it is seen that

$$p'_z = p_z \text{ or } q'_z = q_z$$

at an age z, determined by

(6) $$\varrho_z - \varrho_{z+1} = \beta : \gamma, \quad \varrho_z = e_z \text{ or } a_z.$$

As $\varrho_z - \varrho_{z+1}$ may assume the same value for different values of z, the transformed mortality curve (q'_x) may intersect the given curve (q_x) in several points. At the age ω, where

$$p_\omega = 0 \text{ or } q_\omega = 1$$

intersection always takes place; in fact we have

$$p'_\omega = p_\omega = 0 \text{ or } q'_\omega = q_\omega = 1$$

for all allowable values of the constants.

6. If we have simultaneously

$$\alpha + \beta x + \gamma \varrho_x = 0$$

and

$$\beta - \gamma(\varrho_x - \varrho_{x+1}) = 0,$$

then we get

$$\alpha + \beta x + \beta + \gamma \varrho_{x+1} = 0,$$

whence

$$\frac{p'_x}{p_x} = \frac{0}{0}$$

and further

$$p'_{x-1} = \frac{(\alpha + \beta x + \gamma \varrho_x) p_{x-1}}{\alpha + \beta x - \beta + \gamma \varrho_{x-1}} = 0$$

$$l'_x = (\alpha + \beta x + \gamma \varrho_x) l_x = 0,$$

i. e. for the ages below x the transformed mortality table runs out at the age x. For higher ages the transformed table (according to article 5) runs out at the same age as the given table does; however, at the ages next above x the p' generally will be > 1.

7. If the transformed mortality curve (q'_x) intersects the given curve (q_x) at an age z, situated between x and $x + n$, we have from (6) and (2) or (4), writing for brevity $\varrho_x - \varrho_{x+1} = \varDelta \varrho_x$, $\varrho_x = e_x$ or a_x,

$$(7) \quad \frac{p'_{x+n} - p_{x+n}}{p'_x - p_x} = \frac{p_{x+n}}{p_x} \cdot \frac{\varDelta \varrho_z - \varDelta \varrho_{x+n}}{\varDelta \varrho_z - \varDelta \varrho_x} \cdot \frac{\alpha + \beta x + \gamma \varrho_x}{\alpha + \beta x + \beta n + \gamma \varrho_{x+n}};$$

$\alpha = \infty$ gives the identical transformation, and high values of α then give small variations of p; for such values of α the last factor of the right-hand member is $= 1$ approximately. Within a limited age interval $\varDelta \varrho$ may be considered, with a rough approximation, as a linear function of x, and we then have approximately (k being a factor of proportionality)

$$\varDelta \varrho_z - \varDelta \varrho_{x+n} = k(z - x - n)$$

$$\varDelta \varrho_z - \varDelta \varrho_x \quad = k(z - x),$$

whence

$$\frac{p'_{x+n} - p_{x+n}}{p'_x - p_x} = \frac{p_{x+n}}{p_x} \cdot \frac{z - x - n}{z - x},$$

i. e. within a limited age interval the transformation may be considered as a kind of rotation of the curve q about a centre z, the variations $(p'_x - p_x)$ at the age x being approximately proportionate to the distance from z to x. The factor $\frac{p_{x+n}}{p_x}$ does not affect the result materially, not being very different from 1 within the age intervals which may be here considered.

8. *To find the transformations I under which the expectation of life at the age x is invariant* $(e'_x = e_x)$.

We have

$$l'_x = (\alpha + \beta x)\, l_x + \gamma \Sigma l_{x+1}$$

$$\Sigma l'_{x+1} = (\alpha + \beta x + \beta)\, \Sigma l_{x+1} + (\beta + \gamma)\, \Sigma^2 l_{x+2};$$

putting

$$\frac{\Sigma^2 l_{x+2}}{l_x} = \frac{\Sigma^2 l_{x+1} - \Sigma l_{x+1}}{l_x} = f_x - e_x$$

we get

$$e'_x = \frac{(\alpha + \beta x + \beta)\, e_x + (\beta + \gamma)(f_x - e_x)}{\alpha + \beta x + \gamma e_x},$$

whence

$$e'_x - e_x = \frac{\beta f_x + \gamma (f_x - e_x - e_x^2)}{\alpha + \beta x + \gamma e_x}.$$

We consequently shall have

$$e'_x = e_x$$

if

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{e_x^2 + e_x - f_x}{f_x}.$$

It will be seen that the constant α is not contained in the condition, and remembering now that by (6) in article 5

$$e_z - e_{z+1} = \beta : \gamma$$

gives

$$q'_z = q_z ,$$

we have

$$e'_x = e_x$$

for all the transformed mortality curves that intersect the given curve at the age z, determined by

$$(8) \qquad e_z - e_{z+1} = \frac{e_x^2 + e_x - f_x}{f_x} .$$

The equation (8) may have more than one solution.

We give below (table 1) specimen values of z, according to H^M. If (8) has more than one solution, the value of z immediately above x is given.

Table 1.

H^M, trf. I. The solutions z of the equation (8)

x	z	x	z	x	z
20	46	35	52	50	60
25	47	40	55	55	63
30	49	45	57	60	67

9. *To find the transformations I and II under which* $a'_{x\overline{n}|} = a_{x\overline{n}|}$.

We find in a similar way as above, for the transformation I:

$$\frac{\beta}{\gamma} = -\frac{G_{x+1} - G_{x+n+1} - e_x D_x a_{x\overline{n}|}}{S_{x+1} - S_{x+n+1} - n N_{x+n}},$$

where

$$G_{x+1} = \Sigma(v^x \Sigma l_{x+1}) = \frac{1+i}{i}(e_x D_x - N_{x+1}),$$

and for the transformation II:

$$\frac{\beta}{\gamma} = -\frac{S_{x+1} - S_{x+n+1} - N_{x+1}\,\mathrm{a}_{x\overline{n}|}}{S_{x+1} - S_{x+n+1} - n\,N_{x+n}}.$$

Thus we have that

$$\mathrm{a}'_{x\overline{n}|} = \mathrm{a}_{x\overline{n}|}$$

for all the transformed mortality curves that intersect the given curve at the age z, determined by

(9) $$\varrho_z - \varrho_{z+1} = \beta : \gamma$$

where $\varrho_z = e_z$ or a_z according to the transformation I or II.

The equation (9) may have more than one solution.

We give below (table 2) specimen values of z, according to the transformation II of H^M, 4 %. If z has more than one value, the value immediately above x is given. z has been is calculated by first-difference interpolation in a_z.

Table 2.

H^M, 4 %, trf. II. The solutions z of the equation (9).

$x+n$	97	70	65	60	55	50
x	z	z	z	z	z	z
20	33,1	32,4	31,8	30,9	29,7	27,7
30	40,4	39,9	39,4	38,6	37,4	35,7
40	48,0	47,2	46,2	44,6	43,6	42,2
50	53,5	53,6	53,1	52,1	50,9	
60	70,8	63,3	61,2			
70	73,4					

It should be noticed that there are some irregularities in the situation of z, especially for $x+n=97$. This is owing to the fact that the equation $a_z - a_{z+1} =$ constant may have more than one solution, and that $a_z - a_{z+1}$ within a certain interval varies but slowly. For certain values of $\beta : \gamma$ the transformed mortality curve will then intersect the given curve at several points, or approach to it over a certain space.

It will be seen that for $x+n$ up to 70 years

(10) $$z - x = 0{,}26\, n$$

approximately, the deviations being less than one year (except for $x = 50$, $n = 20$).

10. Putting $\gamma = 0$ we find for both transformations

$$\frac{p'_x - p_x}{p_x} = \frac{\beta}{\alpha + \beta x}$$

and

(11) $$a'_{x\overline{n}|} - a_{x\overline{n}|} = \frac{S_{x+1} - S_{x+n+1} - n N_{x+n}}{D_x} \cdot \frac{\beta}{\alpha + \beta x},$$

where β may be supposed to be ± 1, and $\alpha + \beta x > 0$.

We write for brevity

$$\frac{S_{x+1} - S_{x+n+1} - n N_{x+n}}{D_x} = s(i, x)$$

and

$$\frac{p'_x - p_x}{p_x} = \frac{\beta}{\alpha + \beta x} = k_x$$

and have

(12) $$a'_{x\overline{n}|} - a_{x\overline{n}|} = s(i, x)\, k_x .$$

For high values of α k_x will be about a constant for a certain space of ages, and accordingly

(13) $$k_x p_x = p'_x - p_x = q_x - q'_x$$

also will be about a constant, p_x not differing very much from 1. Table 3 gives the values of $10^5 k_x$ for some values of α ($\beta = \pm 1$).

We also give some values of $s(i, x)$, according to H^M, 4 % (table 4).

Table 3.

Values of $10^5 k_x = 10^5 \cdot \frac{\beta}{\alpha + \beta x}$

	$\beta = +1$				$\beta = -1$			
x	20	40	60	80	20	40	60	80
q	$10^5 k_x$	$10^5 k_x$	$10^5 k_x$	$10^5 k_x$	$10^5 k_x$	$10^5 k_x$	$10^5 k_x$	$10^5 k_x$
400	238	227	217	208	−263	−278	−294	−313
600	161	156	152	147	−172	−179	−185	−192
800	122	119	116	114	−128	−132	−135	−139
1000	98	96	94	93	−102	−104	−106	−109
1500	66	65	64	63	− 68	− 68	− 69	− 70
2000	50	49	49	48	− 51	− 51	− 52	− 52

Table 4.

H^M, $i = 0{,}04$. Values of $s(i, x)$

$x + n$	97	70	65	60	55	50
x	$s(i, x)$	$s(i, x)$	$s(i, x)$	$s(i, x)$	$s(i, x)$	$s(i, x)$
20	307	285	267	244	215	182
30	252	223	201	173	140	104
40	191	155	129	98	65	33
50	130	86	60	31	8	
60	76	28	8			

Thus a variation by a unit in the fifth decimal place of q gives, for H^M, 4 %, a variation = $0{,}00267$ in $a_{20,\overline{45}|}$, and = $0{,}0001$ in $A_{20,\overline{45}|}$.

11. In the function $a^{i}_{x\overline{n}|}$ let the rate of interest, i, increase by Δi, the increment being so small that in an expansion by TAYLOR's formula powers above the first may be neglected. We shall then have

$$a^{i+\Delta i}_{x\overline{n}|} - a^{i}_{x\overline{n}|} = \frac{d\,a^{i}_{x\overline{n}|}}{di}\,\Delta i.$$

Comparing this formula with the formulas (12) and (13), and remembering that

$$\frac{d\,a^{i}_{x\overline{n}|}}{di} = -v\,\frac{S_{x+1} - S_{x+n+1} - n\,N_{x+n}}{D_x} = -vs(i, x),$$

we see that $a_{x\overline{n}|}$ remains nearly invariant when q and i, within certain limits, vary so as to make

$$q - q' = v\,\Delta i = v(i' - i)$$

or

$$q' + i' = q + i + i(q - q'),$$

which for the limits here considered may be replaced by

$$q' + i' = q + i.$$

As to the continuous annuity ($\bar{a}_{x\overline{n}|}$) the corresponding proposition

$$\mu' + \delta' = \mu + \delta,$$

as is well known, generally makes the annuity invariant.

For $a_{x\overline{n}|}$ a sufficient condition of invariability is easily found to be

(14) $$q' + i' = (q + i)\left(1 + \frac{i' - i}{1 + i}\right).$$

By this formula a transformation of the mortality can be changed into a transformation of the rate of interest. This will be shown in article 18. However, q' (or p') in the formula (21) of that article belongs to i, and q to i' (accordingly to the problem there dealt with).

Geometrical representation of the transformation (with application to trf. II).

12. We put

$$\frac{p'_x - p_x}{p_x} = \lambda = \frac{\beta - \gamma(a_x - a_{x+1})}{\alpha + \beta x + \gamma a_x}$$

and have

$$(15)\qquad \begin{aligned} &(\alpha + \beta x + \gamma a_x)\lambda - (\beta - \gamma(a_x - a_{x+1})) = 0, \text{ or} \\ &\alpha\lambda + \beta(\lambda x - 1) + \gamma(\lambda a_x + a_x - a_{x+1}) = 0. \end{aligned}$$

Here the age x is a constant, λ is a parameter, α, β, γ are variables, and may be considered as homogeneous coordinates in a tri-linear coordinate system. Later on we shall pass to a bi-linear coordinate system, but it will be convenient to begin with the more general case.

13. Considering α, β, γ as point coordinates we have:
The equations (15) represent a pencil with its vertex in the point of intersection of the straight lines

$$\alpha + \beta x + \gamma a_x = 0$$
$$\beta - \gamma(a_x - a_{x+1}) = 0.$$

To each age x a pencil corresponds, the vertex of which is the geometrical representation of the age, and may be called the x-point. To each value of λ there corresponds a straight line (λ-line) through the x-point and vice versa; this line is the geometrical representation of the transformation $p'_x = p_x(1 + \lambda)$. The coordinates α, β, γ of the point of intersection of a λ_1-line from the x-point and a λ_2-line from the y-point indicate the constants of the transformation

$$p'_x = p_x(1 + \lambda_1)$$
$$p'_y = p_y(1 + \lambda_2),$$

and hereby the transformation is fully determined. The λ-lines from the other age points to the point α, β, γ indicate the λ-values which determine p' for these ages. Thus

the point α, β, γ (or the pencil through this point and the age points) becomes the geometrical representation of the new (transformed) mortality curve.

The coordinates of a line λ from the x-point are

$$\begin{aligned} \sigma u_1 &= \lambda \\ \sigma u_2 &= \lambda x - 1 \qquad (16) \\ \sigma u_3 &= \lambda a_x + a_x - a_{x+1}, \end{aligned}$$

where $u_1 u_2 u_3$ are the line coordinates of λ, and σ is a factor of proportionality. By the equations (16) the system can be constructed, for instance with a λ-line for every thousandth part: $\lambda = 0$, $\lambda = \pm 0{,}001$, $\lambda = \pm 0{,}002$ etc.

14. Considering α, β, γ as line coordinates we have:

The equations (15) represent a straight line (range) through the points

$$\alpha + \beta x + \gamma a_x = 0$$
$$\beta - \gamma (a_x - a_{x+1}) = 0.$$

To each age x a straight line corresponds, which is the geometrical representation of the age x, and may be called the x-line. To each value of λ there corresponds a point (λ-point) on the x-line and vice versa; this point is the geometrical representation of the transformation $p'_x = p_x(1 + \lambda)$. The coordinates α, β, γ of the straight line between a λ_1-point on the x-line and a λ_2-point on the y-line indicate the constants of the transformation

$$p'_x = p_x(1 + \lambda_1)$$
$$p'_y = p_y(1 + \lambda_2),$$

and hereby the transformation is fully determined. The λ-points in which the other age lines intersect the straight line α, β, γ indicate the λ-values which determine p' for these ages. Thus the straight line α, β, γ (or the range of intersection points of this line and the age lines) becomes the geometrical representation of the new (transformed) mortality curve.

The coordinates of a point λ on the x-line are:

$$
(17) \qquad
\begin{aligned}
\varrho x_1 &= \lambda \\
\varrho x_2 &= \lambda x - 1 \\
\varrho x_3 &= \lambda a_x + a_x - a_{x+1},
\end{aligned}
$$

where $x_1 x_2 x_3$ are the point coordinates of λ, and ϱ is a factor of proportionality. By the equations (17) the system may be constructed, for instance with a λ-point for every thousandth part: $\lambda = 0$, $\lambda = \pm 0{,}001$, $\lambda = \pm 0{,}002$ etc.

15. The geometrical representation of the transformation becomes more convenient, when α, β, γ are dealt with as line coordinates. In this system the transformed mortality curve (q') is represented by a straight line (i. e. a range of points on the line), in the other system by a point (i. e. a pencil through the point), and in this case the drawing paper might easily be inconveniently crowded.

We then pass to a bi-linear right-angled system in line coordinates. The transition to this system is, as is known, made by letting the hypothenuse of a right-angled coordinate triangle pass into infinity, whereby the corresponding line coordinate becomes $= 1$, and the two other line coordinates become = the negative inverse value of the distances from origo to the points of intersection of the line and the two coordinate axes.

From the equations (17) it is seen that on the lines

$$\varrho x_1 = 0, \; \varrho x_2 = 0, \; \varrho x_3 = 0$$

respectively, are situated the λ-points

$$\lambda = 0, \; \lambda = \frac{1}{x}, \; \lambda = -\frac{a_x - a_{x+1}}{a_x};$$

$\lambda = \frac{1}{x}$ represents a decrease in mortality (q_x) at rates to be mentioned only at the highest ages, and we then let the corresponding coordinate line $\varrho x_2 = 0$ pass into infinity. The two other coordinate lines

$$\varrho x_1 = 0, \ \varrho x_3 = 0$$

then become

$$X = 0, \ Y = 0,$$

X and Y being point coordinates in the new coordinate system.

The equations (17) change into

$$(18) \qquad \begin{aligned} X &= x_1 : x_2 = \frac{\lambda}{\lambda x - 1} \\ Y &= x_3 : x_2 = \frac{\lambda a_x + a_x - a_{x+1}}{\lambda x - 1}, \end{aligned}$$

whence the equation of the age line for the age x

$$(19) \qquad Y - X(a_x + x a_x - x a_{x+1}) + (a_x - a_{x+1}) = 0.$$

By the equation (19) and the first equation (18) the age lines and their λ-points can be plotted. Hereby a convenient scale is to be applied, and generally the scale must be different for the two coordinates, i. e. X and Y are to be plotted with the values mX and nY, where m and n are constants.

The mortality curve, determined by the transformation α, β, γ, is represented by the straight line

$$\alpha X + \gamma Y + \beta = 0$$

where $\beta = 1$, and

$$\alpha = -\frac{1}{a}$$

$$\gamma = -\frac{1}{b},$$

a and b being the distances from origo to the points of intersection of the line and the coordinate axes. If X and Y in the drawing paper are replaced by mX and nY, then a and b are to be replaced by $\frac{a}{m}$ and $\frac{b}{n}$, and we have

$$\alpha = -\frac{m}{a}, \ \gamma = -\frac{n}{b}, \ \beta = 1$$

or

$$\alpha = \frac{m}{n} \cdot \frac{b}{a}, \ \beta = -\frac{b}{n}, \ \gamma = 1 .$$

16. As every straight line in the plane represents a transformation, the age lines also must represent transformations. For the age line x we then have

$$\frac{p'_x - p_x}{p_x} = \lambda = \frac{\beta - \gamma(a_x - a_{x+1})}{\alpha + \beta x + \gamma a_x}$$

for all values of λ, and λ accordingly must be of the form $\frac{0}{0}$. In fact, by (19) we have for the age line x

$$\alpha = -\frac{a_x + x(a_x - a_{x+1})}{a_x - a_{x+1}}$$

$$\gamma = \frac{1}{a_x - a_{x+1}}$$

$$\beta = 1 ,$$

whence

$$\beta - \gamma(a_x - a_{x-1}) = 0$$

$$\alpha + \beta x + \gamma a_x = 0 .$$

This is the case dealt with in article 6.

17. The appended diagram shows a representation of the transformation II of H^M, 4 %. The age lines have been drawn for $x = 20$, 30, 40, 50 and 60 years, the λ-points have been plotted for $\lambda = 0$, $\lambda = \pm\, 0{,}001$, $\lambda = \pm\, 0{,}002$ etc., and are indicated by circles with the centre in the λ-point; every fifth value ($\lambda = 0$, $\lambda = \pm\, 0{,}005$, $\lambda = \pm\, 0{,}010$ etc.) is emphasized by larger circles. The Y-axis represents $\lambda = 0$ (the identical transformation); the X-axis represents $\lambda = -\frac{a_x - a_{x+1}}{a_x}$. The positive λ's ($p' > p$, $q' < q$), accordingly, will be found on the

left side of the Y-axis, the negative $\lambda's$ $(p' < p, q' > q)$ on the right side.

The coordinates were plotted in centimetres[1], after being multiplied by

$$m = 1500 \text{ for the } X\text{-coordinates}$$
$$n = 25 \text{ » » } Y\text{- »}$$

The dotted lines represent transformations (transformed mortality curves). The line (a) cuts off from the X-axis a length $a = 12$ cm; it passes through the point $X = 13{,}2$ cm, $Y = -10$ cm, accordingly cutting off from the Y-axis a length $b = 100$ cm. The constants of the transformation then become

$$\alpha = -\frac{m}{a} = -\frac{1500}{12} = -125$$

$$\gamma = -\frac{n}{b} = -\frac{25}{100} = -\frac{1}{4}$$

$$\beta = 1$$

or

$$\alpha = 0{,}5,\ \beta = -0{,}004,\ \gamma = 0{,}001.$$

We give below (table 5 a) for some ages the values of $q'_x\, D'_x\, N'_x\, M'_x$. The values q''_x have been drawn from a mortality table, applied by a Norwegian insurance company to a certain type of substandard life (the tuberculosis table); this table, too, has been derived from H^M, by adding to the mortality (q_x) a percentage, diminishing as x increases.

The line (b) represents the transformation dealt with in article 19 The constants of the transformation are $\alpha = 2{,}7$, $\beta = -0{,}0122$, $\gamma = -0{,}01$. We give below (table 5 b) for some ages the values of D'_x and N'_x.

Transformation of $a^{i}_{x\overline{n}|}$ *into* $a^{i'}_{x\overline{n}|}$.

18. We transform $a_{x\overline{n}|}$, corresponding to p, i, into $a'_{x\overline{n}|}$, corresponding to p', i, and try to determine the transformation so that $a'_{x\overline{n}|}$ corresponds also to p, i'.

[1] The diagram (page 19) has been reproduced on a reduced scale.

Table 5a. Diagram (page 19). Line (*a*).

H^M, 4 %, trf. II. $\alpha = 0{,}5$, $\beta = -0{,}004$, $\gamma = 0{,}001$.

x	q_x	q_x	D_x	N'_x	M_x	q'_x
20	0,0063	0,0157	19263	321878	6883,1	0,0174
25	0,0066	0,0165	14591	235397	5536,8	0,0172
30	0,0077	0,0181	11003	169982	4465,6	0,0189
35	0,0088	0,0199	8225,5	120813	3578,9	0,0202
40	0,0103	0,0221	6086,6	84186,5	2848,7	0,0222
45	0,0122	0,0248	4454,1	57197,5	2254,2	0,0244
50	0,0160	0,0295	3198,3	37567,5	1753,4	0,0296
55	0,0210	0,0355	2238,9	23599,5	1331,2	0,0358
60	0,0297	0,0452	1507,9	13947,4	971,41	0,0460
65	0,0434	0,0600	954,7	7578,2	663,25	0,0608

Table 5b. Diagram (page 19). Line (*b*).

H^M, 4 %, trf. II. $\alpha = 2{,}7$, $\beta = -0{,}0122$, $\gamma = -0{,}01$.

x	D_x	N'_x	x	D'_x	N_x
20	99667,6	1819444	50	20105,0	259992
30	59921,9	1017744	60	10483,3	105786
40	35317,3	538915	70	4365,49	31003,5

Putting

$$(20)\qquad \frac{D'_{x+1}}{D'_x} = v\,p'_x = v'\,p_x = \frac{D''_{x+1}}{D''_x}$$

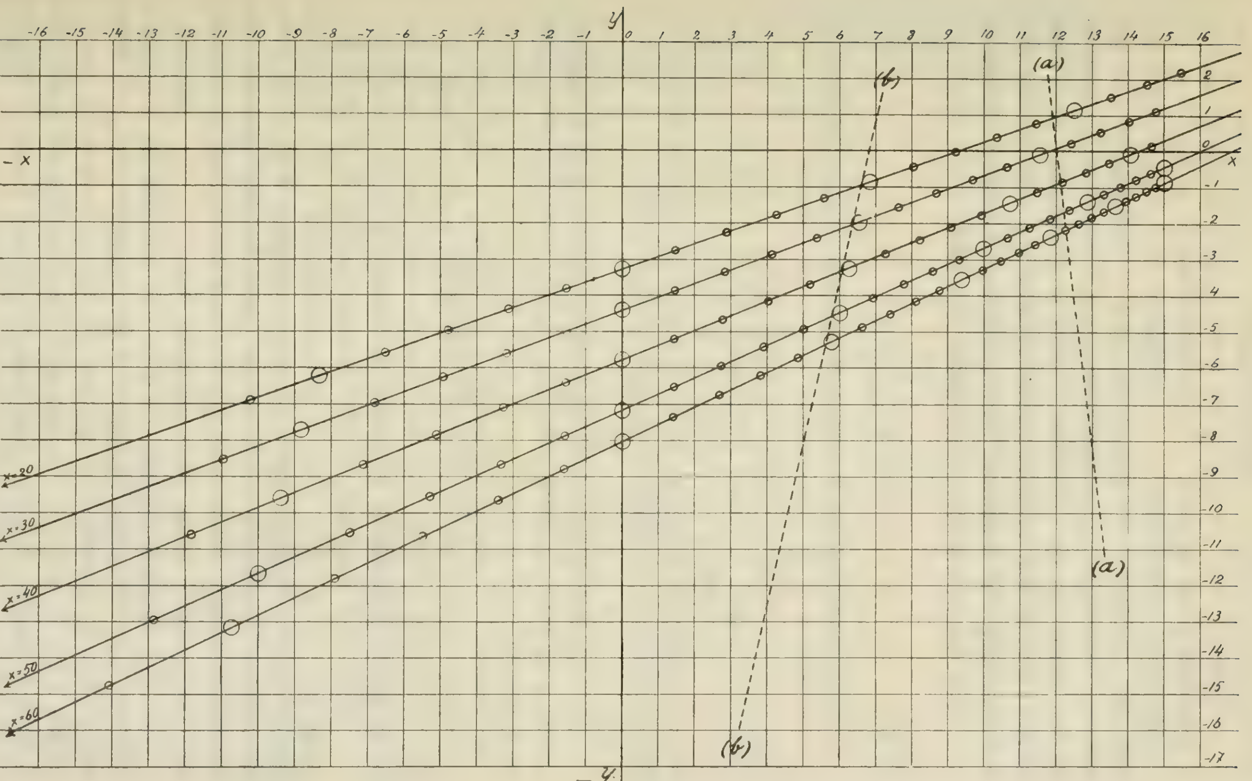
we have

$$(21)\qquad \frac{p'_x}{p_x} = \frac{v'}{v} = \frac{1+i}{1+i'} = \frac{q'+i}{q+i'}$$

or

$$(21\text{ a})\qquad \frac{p'_x - p_x}{p_x} = -\frac{i'-i}{1+i'} = \lambda,$$

and if this condition holds for all ages between x and $x+n$ (more strictly: $x+n-2$), we have


y
– y
x
– x
(a)
(a)
(b)
(b)
x=20
x=30
x=40
x=50
x=60

(22) $$a'_{x\overline{n}|} = a''_{x\overline{n}|},$$

a' corresponding to p', i, a'' corresponding to p, i'.

In this investigation we consider the age of entrance and the duration as constants, and to distinguish the age current from the age of entrance, we denote the former by x, the latter by x_0. Further it will be necessary to express $a_{x_0\overline{n}|}$ as a function of the mortality and the rate of interest, and omitting the constant suffix $x_0\overline{n}|$ we write $a(p, i)$, $a(p, i')$ etc. The equation (22) then takes the form

(22 a) $$a(p', i) = a(p, i').$$

If now we can find a transformation α, β, γ, giving

(23) $$\frac{p'_x - p_x}{p_x} = \frac{\beta - \gamma(a_x - a_{x+1})}{\alpha + \beta x + \gamma a_x} = \lambda = -\frac{i' - i}{1 + i'}$$

for all ages between x_0 and $x_0 + n$, then the condition in (21) or (21 a) is fulfilled, and $a(p, i')$ is found.

19. In article 10 it has been shown that a transformation $\gamma = 0$, $\beta = \pm 1$, $\alpha > 2000$ (whence $-0{,}0005 < \lambda < 0{,}0005$) gives very nearly

$$\frac{p'_x - p_x}{p_x} = \lambda = \text{constant}$$

for a space of ages of 60 years (or more).

From the diagram of the transformation II of H^M, 4 % (page 19) it is seen that a transformation $\gamma \gtreqless 0$, within a limited space of ages, approximately complies with the above mentioned condition for λ-values considerably greater (in numerical value) than $0{,}0005$, the λ-points for λ up to $\pm 0{,}005$ still very nearly lying on a straight line.

In the diagram, where $i = 0{,}04$, the λ-points for $i' = 0{,}045$ (whence $\lambda = -0{,}0048$) happen to be nearly coincident with the lefthand intersection points of the x-lines with the λ-circles for $\lambda = -0{,}005$. A straight line, cutting off from the X-axis a length $a = 6{,}78$ cm and from the Y-axis a length $b = -30{,}5$ cm, passes very nearly through the said points

and accordingly gives, for the space of ages of the diagram, an approximate transformation of $a(p, i)$ into $a(p, i')$.

We find

$$\alpha = -221, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 0{,}820 \text{ or}$$
$$\alpha = 2{,}7, \quad \beta = -0{,}0122, \quad \gamma = -0{,}01.$$

This gives for some entrance ages and durations the following values of $a'_{x_0\overline{n}|}$ (table 6). The values of $a_{x_0\overline{n}|}$ at $i = 0{,}045$ are given for comparison.

Table 6.

x_0	$x_0 + n = 70$		$x_0 + n = 60$		$x_0 + n = 50$	
	$a'_{x_0\overline{n}|}$	$4^1/_2$ % $a_{x_0\overline{n}|}$	$a'_{x_0\overline{n}|}$	$4^1/_2$ % $a_{x_0\overline{n}|}$	$a'_{x_0\overline{n}|}$	$4^1/_2$ % $a_{x_0\overline{n}|}$
20	17,944	17,949	17,194	17,199	15,647	15,651
30	16,467	16,470	15,219	15,222	12,646	12,648
40	14,381	14,378	12,264	12,262	7,898	7,897
50	11,390	11,388	7,670	7,669		

D'_x and N'_x have been given in article 17 (table 5 b).

This method, however, can not be expected, in general, to give so good approximations, and besides it has the disadvantage that it does not admit of a safe and easy test of accuracy.

20. A better method can be obtained by using the transformation $\gamma = 0$, already dealt with in article 10. The formula (12) of that article in the above notations may be written

$$a(p', i) - a(p, i) = -\frac{1}{v}\frac{d\,a(p, i)}{di}\,k_{x_0}, \tag{24}$$

where

$$k_{x_0} = \frac{p'_{x_0} - p_{x_0}}{p_{x_0}} = \frac{\beta}{\alpha + \beta x_0}. \tag{24 a}$$

A transformation $\gamma = 0$ or

$$(25)\qquad \frac{p'_x - p_x}{p_x} = \frac{\beta}{\alpha + \beta x}, \quad \beta = \pm 1, \alpha + \beta x > 0$$

obviously can not comply with the conditions in (21 a) or (23) for more than one age z; but this, in fact, is sufficient, it being possible to determine the age z, or what amounts to the same, the constant α so as to make

$$a(p', i) = a(p, i')$$

with any required degree of accuracy.

In (21 a) we write π for p' and have

$$(26)\qquad a(\pi, i) = a(p, i')$$

if

$$(27)\qquad \frac{\pi_x - p_x}{p_x} = \lambda = -\frac{i' - i}{1 + i'}$$

for all values of x between x_0 and $x_0 + n$.

In the transformation (25) we may suppose $\alpha + \beta x > 0$. Comparing this transformation with the equation (27) we may let

$$p'_x \gtrless p_x$$

correspond to

$$\pi_x \gtrless p_x$$

i. e.

$$\lambda > 0, \ i' < i$$

corresponds to

$$\beta = 1,$$

and

$$\lambda < 0, \ i' > i$$

corresponds to

$$\beta = -1.$$

21. We deal with the case

$$\beta = 1,\ \lambda > 0,\ i' < i.$$

Putting in (25)

$$\alpha = \frac{1}{\lambda} - z$$

where

$$x_0 \leqq z \leqq x_0 + n,$$

we have

(28) $$\frac{p'_x - p_x}{p_x} = \frac{1}{\frac{1}{\lambda} - z + x} \gtreqless \lambda \text{ for } z \lesseqgtr x.$$

We now put

$$z = x_0,\ \alpha = \frac{1}{\lambda} - x_0$$

and find from (27) and (28)

$$p'_x = \pi_x \quad \text{for} \quad x = x_0$$
$$p'_x < \pi_x \quad \text{for} \quad x > x_0,$$

whence

$$\mathrm{a}(p', i) < \mathrm{a}(\pi, i)$$

and by (26)

$$\mathrm{a}(p', i) < \mathrm{a}(p, i').$$

Then we put

$$z = x_0 + n,\ \alpha = \frac{1}{\lambda} - (x_0 + n)$$

and find in a similar way

$$p'_x = \pi_x \quad \text{for} \quad x = x_0 + n$$
$$p'_x > \pi_x \quad \text{for} \quad x < x_0 + n,$$

whence

$$\mathrm{a}(p', i) > \mathrm{a}(\pi, i)$$

or by (26)

$$a(p', i) > a(p, i').$$

But $a(p', i)$ is a continuous function of α, and accordingly there exists a value α, and a corresponding value $z = \frac{1}{\lambda} - \alpha$, so as to make

$$a(p', i) = a(x, i) = a(p, i').$$

Substituting this value of z in (24 a) we have

$$k_{x_0} = \frac{1}{\frac{1}{\lambda} - (z - x_0)} = \frac{-1}{\frac{1+i}{\Delta i} + 1 + z - x_0}$$

where $\Delta i = i' - i$; and from (24) we then get

$$a(p', i) - a(p, i) = a(p, i') - a(p, i) = \frac{\frac{1}{v}\frac{d\,a(p, i)}{di}}{\frac{1+i}{\Delta i} + 1 + z - x_0}.$$

In the two right-hand members p is the same for both the a-functions, and we can then more conveniently write

(29) $$a(i') - a(i) = \frac{\frac{1}{v}\frac{d\,a(i)}{di}}{\frac{1+i}{\Delta i} + 1 + z - x_0}.$$

where $a = a_{x_0\overline{n}|}$.

For

$$\beta = -1,\ \lambda < 0,\ i' > i$$

we find the same formula.

22. *Determination of z in formula* (29). By expansion of $a(i') - a(i)$ in powers of i z can be determined with any required degree of accuracy. But we shall at first, by some

examples, show that z, for small values of Δi, is very nearly independent of the mortality, and may be expressed as a simple function of the rate of interest and the duration. Thus, for Δi up to $\pm 0{,}005$, very good approximations are obtained by the formulae

(30)
$$z - x_0 = (0{,}30 - i)\, n \text{ for } \Delta i > 0$$
$$z - x_0 = (0{,}29 - i)\, n \text{ for } \Delta i < 0$$

for temporary annuities, and

(31)
$$z - x_0 = (0{,}28 - 2i) \quad (85 - x_0) \text{ for } \Delta i > 0$$
$$z - x_0 = (0{,}264 - 1{,}6\, i)\,(85 - x_0) \text{ for } \Delta i < 0$$

for whole-life annuities.

We give below specimen values for $\Delta i = \pm 0{,}005$, according to various tables.

The values of $\log s(i, x) = \log \left(-\frac{1}{v}\frac{d\mathrm{a}(i)}{di}\right)$ are given, in Table 7 for temporary annuities, and in Table 9 for whole-life annuities.

In Table 8 and 10 we give the differences between the true values of a and the values determined from (29) by means of z from (30) and (31).

23. *Closer determination of z in formula* (29). From (29) we have, replacing x_0 by x,

$$\frac{1+i}{\Delta i} + 1 + z - x = \frac{\frac{1}{v}\frac{d\mathrm{a}(i)}{di}}{\mathrm{a}(i') - \mathrm{a}(i)},$$

whence

(32)
$$1 + z - x = -\frac{\frac{1}{2v}\frac{d^2\mathrm{a}(i)}{di^2} + \frac{1}{6v}\frac{d^3\mathrm{a}(i)}{di^3}\Delta i + \cdots}{\frac{d\mathrm{a}(i)}{di} + \frac{1}{2}\frac{d^2\mathrm{a}(i)}{di^2}\Delta i + \cdots}.$$

$$\log s(i, x) = \log \left(-\frac{1}{v}\frac{d a^{i}_{x\,\overline{n}|}}{d i}\right)$$

Table 7.

Table		HM				HM(5)	HF	OM			$O^{[M]}_{[x]}$
		$i = 0{,}03$	$i = 0{,}04$	$i = 0{,}05$	$i = 0{,}06$	$i = 0{,}03$	$i = 0{,}04$	$i = 0{,}02$	$i = 0{,}025$	$i = 0{,}04$	$i = 0{,}03$
$x+n$	x	$\log s(i, x)$	$\log s(i, x)$	$\log s(i, x)$	$\log s(i, x)$	$\log s(i, x)$	$\log s(i, x)$	$\log s(i, x)$	$\log s(i, x)$	$\log s(i, x)$	$\log s(i, x)$
70	20	2,5609	2,4542	2,3545	2,2614	2,5400	2,4331	2,6922	2,6341	2,4705	2,5684
	30	2,4365	2,3476	2,2634	2,1836	2,4265	2,3377	2,5411	2,4935	2,3578	2,4165
	40	2,2594	2,1899	2,1233	2,0594	2,2522	2,1962	2,3378	2,3012	2,1957	2,2711
	50	1,9848	1,9366	1,8898	1,8444	1,9790	1,9553	2,0385	2,0134	1,9405	2,0015
	60	1,4714	1,4466	1,4221	1,3981	1,4686	1,4629	1,4999	1,4872	1,4497	1,4979
60	20	2,4795	2,3874	2,3001	2,2174	2,4604	2,3640	2,5921	2,5430	2,4023	2,4863
	30	2,3099	2,2379	2,1688	2,1023	2,3018	2,2233	2,3939	2,3560	2,2467	2,3189
	40	2,0422	1,9924	1,9441	1,8971	2,0373	1,9905	2,0976	2,0718	1,9965	2,0524
	50	1,5220	1,4966	1,4717	1,4472	1,5188	1,5028	1,5492	1,5367	1,4984	1,5351
50	20	2,3332	2,2602	2,1900	2,1227	2,3163	2,2383	2,4227	2,3843	2,2732	2,3393
	30	2,0658	2,0154	1,9665	1,9189	2,0600	2,0007	2,1247	2,0986	2,0224	2,0738
	40	1,5422	1,5167	1,4915	1,4668	1,5401	1,5119	1,5705	1,5575	1,5188	1,5505
40	20	2,0774	2,0268	1,9776	1,9297	2,0631	2,0110	2,1399	2,1137	2,0369	2,0827
	30	1,5504	1,5247	1,4995	1,4747	1,5472	1,5156	1,5807	1,5676	1,5289	1,5568
30	20	1,5549	1,5292	1,5039	1,4791	1,5461	1,5232	1,5870	1,5738	1,5350	1,5594

$10^3\delta^*$ for $\Delta i = i' - i = \pm 0{,}005$ *Table 8.*

Table		HM						HM(5)	HF	OM			$O_{[x]}^{[M]}$		Table	
	i	3 %	4 %	5 %	4 %	5 %	6 %	3 %	4 %	2 %	$2^1/_2$ %	4 %	3 %	3 %	i	
	i'	$3^1/_2$ %	$4^1/_2$ %	$5^1/_2$ %	$3^1/_2$ %	$4^1/_2$ %	$5^1/_2$ %	$3^1/_2$ %	$4^1/_2$ %	$2^1/_2$ %	2 %	$3^1/_2$ %	$3^1/_2$ %	$2^1/_2$ %	i'	
$x+n$	x	$10^3\delta$	$10^3\delta$	$10^3\delta$	$10^3\delta$	$10^3\delta$	$10^3\delta$	$10^3\delta$	$10^3\delta$	$10^3\delta$	$10^3\delta$	$10^3\delta$	$10^3\delta$	$10^3\delta$	x	$x+n$
70	20	−6	−6	−6	−5	−6	−5	−6	−6	−5	−5	−5	−6	−6	20	70
	30	−3	−1	−1	−1	−1	−1	−2	−2	−2	−1	−1	−2	−2	30	
	40	−1	−1	0	0	0	1	−1	0	−1	0	0	0	0	40	
	50	0	0	0	0	1	0	0	0	−1	1	0	−1	0	50	
	60	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0	60	
60	20	1	0	−1	1	0	0	0	0	1	3	1	0	1	20	60
	30	1	1	1	1	2	2	1	1	1	2	1	1	2	30	
	40	0	1	1	0	1	2	0	1	0	0	1	0	1	40	
	50	0	0	0	0	1	0	0	0	−1	−1	0	0	1	50	
50	20	1	1	1	1	−1	1	1	0	1	3	3	1	2	20	50
	30	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	30	
	40	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	−1	0	40	
40	20	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	20	40
	30	−1	0	0	0	1	0	0	0	0	−1	1	1	1	30	
30	20	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	20	30

* δ is the difference between the true value of $a(i')$ and the value determined from (29) by means of z, calculated from (30).

$\log s(i, x) = \log \left(- \frac{1}{v} \frac{d a_x^{\prime}}{d i} \right)$

Table 9.

Table	HM				HF			OM		OM(5)	$O^{[af]}_{[x]}$
x	$i = 0{,}03$	$i = 0{,}04$	$i = 0{,}05$	$i = 0{,}06$	$i = 0{,}03$	$i = 0{,}04$	$i = 0{,}05$	$i = 0{,}02$	$i = 0{,}03$	$i = 0{,}025$	$i = 0{,}03$
	$\log s(i, x)$	$\log s(i, x)$	$\log s(i, x)$	$\log s(i, x)$	$\log s(i, x)$	$\log s(i, x)$	$\log s(i, x)$	$\log s(i, x)$	$\log s(i, x)$	$\log s(i, x)$	$\log s(i, x)$
10	2,6896	2,5583	2,4387	2,3298	2,6670	2,5355	2,4162	2,8513	2,7058	2,7528	—
20	2,6042	2,4871	2,3791	2,2796	2,5887	2,4701	2,3612	2,7510	2,6229	2,6707	2,6308
30	2,5026	2,4007	2,3057	2,2172	2,5020	2,3978	2,3008	2,6258	2,5156	2,5623	2,5406
40	2,3674	2,2816	2,2008	2,1247	2,3875	2,2989	2,2156	2,4687	2,3768	2,4183	2,4237
50	2,1830	2,1137	2,0478	1,9852	2,2215	2,1496	2,0813	2,2658	2,1921	2,2262	2,2725
60	1,9317	1,8787	1,8279	1,7792	1,9772	1,9218	1,8688	1,9995	1,9434	1,9700	2,0614
70	1,5944	1,5565	1,5199	1,4846	1,6451	1,6045	1,5655	1,6521	1,6122	1,6318	1,7555
80	1,1676	1,1425	1,1180	1,0942	1,2721	1,2440	1,2169	1,2081	1,1821	1,1950	1,3594
90	0,5780	0,5657	0,5536	0,5417	0,9142	0,8947	0,8757	0,6581	0,6428	0,6504	0,8902

$10^3\delta^*$ for $\Delta i = i' - i = \pm 0{,}005$

Table 10.

Table	*HM*						*HF*				*OM*		*OM*(5)		$O_{[x]}^{[af]}$	
i	3 %	4 %	5 %	4 %	5 %	6 %	3 %	4 %	4 %	5 %	2 %	3 %	2½ %	2½ %	3 %	3 %
i'	3½ %	4½ %	5½ %	3½ %	4½ %	5½ %	3½ %	4½ %	3½ %	4½ %	2½ %	2½ %	3 %	2 %	3½ %	2½ %
x	$10^3\delta$	$10^3\delta$	$10^3\delta$	$10^3\delta$	$10^3\delta$	$10^3\delta$	$10^3\delta$	$10^3\delta$	$10^3\delta$	$10^3\delta$	$10^3\delta$	$10^3\delta$	$10^3\delta$	$10^3\delta$	$10^3\delta$	$10^3\delta$
10	−4	−4	−1	−7	−5	−3	−5	−2	−6	−5	−4	−5	−5	−9	—	—
20	−1	0	2	−1	1	1	0	0	−1	0	−3	−2	−3	−3	7	5
30	1	2	3	2	2	3	2	3	3	3	−1	1	−1	0	5	7
40	1	2	3	2	3	2	4	4	4	4	−1	1	0	1	6	7
50	1	1	2	1	2	3	3	2	2	3	0	2	1	1	5	5
60	1	1	2	2	2	2	1	1	2	1	0	1	1	1	2	3
70	0	1	0	0	0	1	1	2	2	2	1	1	1	1	2	2
80	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1
90	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1

* δ is the difference between the true value of a(i') and the value determined from (29) by means of z, calculated from (31).

Putting

$$S(x+1,\, x+n) = \sum_{1}^{n-1} n\, D_{x+n}$$

$$T(x+1,\, x+n) = \sum_{1}^{n-1} \frac{n(n+1)}{2} D_{x+n}$$

$$U(x+1,\, x+n) = \sum_{1}^{n-1} \frac{n(n+1)(n+2)}{6} D_{x+n}$$

etc.

we get

$$\frac{d\,\mathrm{a}(i)}{d\,i} = \frac{-\,v\, S(x+1,\, x+n)}{D_x}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\mathrm{a}(i)}{d\,i^2} = \frac{v^2\, T(x+1,\, x+n)}{D_x}$$

$$\frac{1}{6}\frac{d^3\mathrm{a}(i)}{d\,i^3} = \frac{-\,v^3\, U(x+1,\, x+n)}{D_x}$$

etc.

The equation (32) may then be written ($S = S(x+1,$ $x+n)$ etc.)

$$1 + z - x = \frac{T - U v \Delta i + V v^2 \Delta i^2 - \cdots}{S - T v \Delta i + U v^2 \Delta i^2 - \cdots}$$

or

$$(32\,\mathrm{a}) \qquad 1 + z - x = \frac{T}{S} \cdot \frac{1 - \frac{U}{T} v \Delta i + \frac{V}{T} v^2 \Delta i^2 - \cdots}{1 - \frac{T}{S} v \Delta i + \frac{U}{S} v^2 \Delta i^2 - \cdots}.$$

Replacing the numerator

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{by} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 1 - \frac{U}{T} v \Delta i + \frac{V}{T} v^2 \Delta i^2 - \cdots \\ 1 - \frac{U}{T} v \Delta i + \frac{U^2}{T^2} v^2 \Delta i^2 - \cdots = \dfrac{1}{1 + \frac{U}{T} v \Delta i}. \end{array}$$

and the denominator

$$(33\,a)\left\{\text{by}\quad \begin{aligned} &1-\frac{T}{S}v\varDelta i+\frac{U}{S}v^2\varDelta i^2-\cdots \\ &1-\frac{T}{S}v\varDelta i+\frac{T^2}{S^2}v^2\varDelta i^2-\cdots=\frac{1}{1+\frac{T}{S}v\varDelta i},\end{aligned}\right.$$

we obtain

$$(34)\qquad 1+z-x=\frac{T}{S}\cdot\frac{1+\frac{T}{S}v\varDelta i}{1+\frac{U}{T}v\varDelta i}$$

or

$$(34\,a)\qquad 1+z-x=\frac{T}{S}\cdot\frac{1+i+\frac{T}{S}\varDelta i}{1+i+\frac{U}{T}\varDelta i}.$$

For small values of $\varDelta i$ we may write

$$(35)\qquad 1+z-x=\frac{T}{S}.$$

24. We give below, according to H^M, specimen values of a, as calculated by (29) by means of $(1+z-x)$ determined from (34) or (35). The following notations have been used:

$$s(i,x)=-\frac{1}{v}\frac{d\,\mathrm{a}(i)}{di},$$

$$d(i,\varDelta)=\frac{1+i}{\varDelta i}+1+z-x,$$

$$\varDelta=\varDelta i=i'-i,$$

whence

$$\mathrm{a}(i')-\mathrm{a}(i)=-\frac{s(i,x)}{d(i,\varDelta)}.$$

δ is the difference between the true value of a and the value as calculated by (29).

Table 11.

H^M; $i = 0{,}04$; $a(i) = a_x$; $(1 + z - x)$ from 34.

x	20		40		60	
$\log s(i, x)$	2,487060		2,281619		1,878677	
$T : S$	13,9630		10,4717		6,7133	
$U : T$	12,0483		8,9772		5,8592	
Δi	$\log d(i, \Delta)$		$\log d(i, \Delta)$		$\log d(i, \Delta)$	
−0,010	1,955821 n		1,971707 n		1,988314 n	
−0,005	2,288190 n		2,295802 n		2,303876 n	
0,005	2,346518		2,339587		2,331913	
0,010	2,072593		2,059224		2,044465	
0,020	1,822040		1,797464		1,769468	
Δi	$a(i + \Delta i)$	$10^4\delta$	$a(i + \Delta i)$	$10^4\delta$	$a(i + \Delta i)$	$10^4\delta$
−0,010	23,0419	6	18,1760	2	11,2359	0
−0,005	21,2246	0	17,1026	0	10,8347	0
0,005	18,2617	0	15,2596	0	10,1068	0
0,010	17,0468	3	14,4659	1	9,7763	0
0,020	15,0198	21	13,0857	9	9,1731	1

Table 12.

H^M: $i = 0{,}04$; $a(i) = a_x$; $\Delta i = 0{,}005$; $(1 + z - x)$ from (35).

x	$\log s(i, x)$	$\log d(i, \Delta)$	$\log(-d(i, -\Delta))$	$a(i + \Delta i)$	$10^4\delta$	$a(i - \Delta i)$	$10^4\delta$
10	2,55834	2,34928	2,28443	19,4582	10	22,9554	−15
20	2,48706	2,34627	2,28789	18,2609	8	21,2257	−11
30	2,40069	2,34298	2,29164	16,9888	5	19,4163	−7
40	2,28162	2,33939	2,29563	15,2593	3	17,1030	−4
50	2,11370	2,33564	2,29975	12,9361	2	14,1876	−2
60	1,87868	2,33185	2,30382	10,1068	0	10,8347	0
70	1,55649	2,32830	2,30758	7,1239	−1	7,4704	−1
80	1,14247	2,32523	2,31078	4,5386	1	4,6722	0
90	0,56573	2,32230	2,31378	2,6864	0	2,7218	1

Table 13.

H^M; $i = 0{,}04$; $a(i) = a_{x,\overline{60-x}|}$; $(1+z-x)$ from (34).

x	20		30		40		50	
log $s(i, x)$	2,387387		2,237900		1,992413		1,496616	
$T:S$	11,2413		8,9427		6,3710		3,5127	
$U:T$	9,2854		7,3100		5,1891		2,9225	
Δi	log $d(i, \Delta)$		log $d(i, \Delta)$		log $d(i, \Delta)$		log $d(i, \Delta)$	
−0,010	1,968440 n		1,978675 n		1,989918 n		2,002199 n	
−0,005	2,294179 n		2,299137 n		2,304630 n		2,310687 n	
0,005	2,341123		2,336481		2,331238		2,325340	
0,010	2,062339		2,053362		2,043126		2,031538	
0,020	1,803458		1,786672		1,767176		1,744688	
Δi	$a(i+\Delta i)$	$10^4\delta$	$a(i+\Delta i)$	$10^4\delta$	$a(i+\Delta i)$	$10^4\delta$	$a(i+\Delta i)$	$10^4\delta$
−0,010	20,9350	3	17,8350	1	13,7256	1	8,1291	0
−0,005	19,5505	0	16,8870	0	13,2071	0	7,9703	0
0,005	17,1987	0	15,2216	0	12,2615	0	7,6685	0
0,010	16,1974	1	14,4890	1	11,8300	1	7,5251	0
0,020	14,4747	16	13,1921	9	11,0401	3	7,2520	0

Table 14.

H^M; $i = 0{,}04$; $a(i) = a_{x\overline{5}|}$; $\Delta i = 0{,}005$; $(1+z-x)$ from (35).

x	log $s(i, x)$	log $d(i, \Delta)$	$a(i+\Delta i)$	$10^5\delta$
20	0,94070	2,32218	4,53010	1
30	0,93900	2,32218	4,52868	0
40	0,93561	2,32216	4,49617	0
50	0,92742	2,32216	4,44320	0
60	0,90698	2,32214	4,31498	1
70	0,85790	2,32210	4,02804	0
80	0,73295	2,32197	3,40837	0

25. *Calculation of a_x (or N_x) for quinquennial ages and for a series of rates of interest.* From Table 14 it is seen that $a(i+\Delta i) = a^{i'}_{x\,\overline{5}|}$ for $\Delta i = 0{,}005$ may be determined with great accuracy by the formula (29) and by the value of z derived from (35). If we, in this manner, calculate

$$a^{i'}_{x\,\overline{5}|},\ a^{i'}_{x+5,\,\overline{5}|},\ a^{i'}_{x+10,\,\overline{5}|} \text{ etc.,}$$

and if we calculate directly

$$D^{i'}_x,\ D^{i'}_{x+5},\ D^{i'}_{x+10} \text{ etc.,}$$

we find the whole-life annuities $a^{i'}_x$ (or $N^{i'}_x$) for the same ages by the formulae

$$(36)\qquad \begin{cases} a^{i}_x = a^{i'}_{x\,\overline{5}|} + \dfrac{D^{i}_{x+5}}{D^{i}_x}\, a^{i}_{x+5} \\[2ex] a^{i'}_{x+5} = a^{i'}_{x+5,\,\overline{5}|} + \dfrac{D^{i'}_{x+10}}{D^{i}_{x+5}}\, a^{i'}_{x+10} \end{cases}$$

etc.

or

$$(37)\qquad \begin{aligned} a^{i'}_{x,\,\overline{5}|} \cdot D^{i'}_x &= N^{i'}_x - N^{i}_{x+5} \\ a^{i'}_{x+5,\,\overline{5}|}\, D^{i'}_{x+5} &= N^{i'}_{x+5} - N^{i'}_{x+10} \end{aligned}$$

etc.

From i' we may go further to $i'' = i' + \Delta$ in the following manner.

Going from i to i' we have

$$a(i') - a(i) = -\frac{s(i, x)}{d(i, \Delta)}$$

using the same notations as in article 24.

Going from i' to i we have

$$a(i) - a(i') = -\frac{s(i', x)}{d(i', -\Delta)}$$

whence

$$s(i', x) = -\frac{s(i, x)}{d(i, \varDelta)} d(i', -\varDelta). \tag{38}$$

Now

$$d(i, \varDelta) = \frac{1+i}{\varDelta} + t(i),$$

where

$$t(i) = \frac{T}{S}$$

for $n = 5$ is very nearly a linear function of i. If we have calculated $t(i)$ for two or three values of i, we know $t(i)$, and therewith $d(i, \varDelta)$, for all values of i.

We shall then have

$$\mathrm{a}(i') - \mathrm{a}(i) = -\frac{s(i, x)}{d(i, \varDelta)},$$

$$\mathrm{a}(i'') - \mathrm{a}(i') = -\frac{s(i', x)}{d(i', \varDelta)},$$

$$\mathrm{a}(i''') - \mathrm{a}(i'') = -\frac{s(i'', x)}{d(i'', \varDelta)},$$

etc.

where all the right-hand members are known.

It will be convenient to eliminate $s(i')$, $s(i'')$ etc., and we then get

$$\mathrm{a}(i') - \mathrm{a}(i) = -\frac{s(i, x)}{d(i, \varDelta)}$$

$$\mathrm{a}(i'') - \mathrm{a}(i') = \frac{s(i, x)}{d(i, \varDelta)} \cdot \frac{d(i', -\varDelta)}{d(i', \varDelta)} \tag{39}$$

$$\mathrm{a}(i''') - \mathrm{a}(i'') = -\frac{s(i, x)}{d(i, \varDelta)} \cdot \frac{d(i', -\varDelta)}{d(i', \varDelta)} \cdot \frac{d(i'', -\varDelta)}{d(i'', \varDelta)}$$

etc.

26. We give below, according to H^M, an example of the application of (39).

Table 15 contains the values of $t(i) = \frac{T}{S}$ at $i = 0$, $i = 0{,}04$ and $i = 0{,}06$.

Table 15.

H^M; $t(i) = T(x+1, x+5) : S(x+1, x+5)$.

x	$i = 0$	$i = 0{,}04$	$i = 0{,}06$	$-10^4 \Delta t(i)$	
20	1,9966	1,9767	1,9668	199	99
25	1,9965	1,9766	1,9668	199	98
30	1,9959	1,9760	1,9661	199	99
35	1,9952	1,9753	1,9654	199	99
40	1,9945	1,9746	1,9647	199	99
45	1,9930	1,9730	1,9632	200	98
50	1,9910	1,9710	1,9611	200	99
55	1,9876	1,9675	1,9576	201	99
60	1,9819	1,9617	1,9517	202	100
65	1,9737	1,9534	1,9433	203	101
70	1,9593	1,9387	1,9285	206	102
75	1,9362	1,9152	1,9049	210	103
80	1,8999	1,8784	1,8678	215	106
85	1,8597	1,8378	1,8270	219	108
90	1,7546	1,7329	1,7224	217	105

Table 16.

H^M; $x = 20$; $\Delta i = 0{,}005$; i varies from 0 to 6 %; $\log s(0, x) = 0{,}991348$.

i	$\log d(i, \Delta)$	$\log(-d(i, -\Delta))$	$-\log \frac{-d(i, -\Delta)}{d(i, \Delta)}$
0,00	2,305344	2,296672	0,008672
0,02	2,313839	2,305380	0,008459
0,04	2,322171	2,313916	0,008255
0,06	2,330346	2,322288	0,008058

i	$-\log \dfrac{-d(i, -\Delta)}{d(i, \Delta)}$	$\log(-\Delta\,\mathrm{a}(i))$	$-\Delta\,\mathrm{a}(i)$	$\mathrm{a}(i) = \mathrm{a}^{i}_{20,\overline{5}\rceil}$
0,000	0,008672	2,686004	0,048529	4,934496
0,005	0,008618	2,677386	0,047576	4,885967
0,010	0,008565	2,668821	0,046647	4,838391
0,015	0,008512	2,660309	0,045741	4,791744
0,020	0,008459	2,651850	0,044859	4,746003
0,025	0,008407	2,643443	0,043999	4,701144
0,030	0,008356	2,635087	0,043161	4,657145
0,035	0,008305	2,626782	0,042343	4,613984
0,040	0,008255	2,618527	0,041546	4,571641
0,045	0,008205	2,610322	0,040768	4,530095
0,050	0,008156	2,602166	0,040010	4,489327
0,055	0,008107	2,594059	0,039270	4,449317
0,060	0,008058			4,410047

The true value of $\mathrm{a}(i) = \mathrm{a}^{i}_{20,\overline{5}\rceil}$ at $i = 0{,}04$: is 4,571643, at $i = 0{,}06$: 4,410049.

26. *Calculation of $s(i, x)$ or $\log s(i, x)$ for quinquennial ages and for a series of rates of interest.* The formula (38) of the preceding article gives

$$s(i', x) = -s(i, x) \cdot \frac{d(i', -\Delta)}{d(i, \Delta)},$$

whence

$$(40) \quad \begin{cases} s(i'', x) = \quad s(i, x) \dfrac{d(i', -\Delta)}{d(i, \Delta)} \cdot \dfrac{d(i'', -\Delta)}{d(i', \Delta)} \\ s(i''', x) = -s(i, x) \cdot \dfrac{d(i', -\Delta)}{d(i, \Delta)} \cdot \dfrac{d(i'', -\Delta)}{d(i', \Delta)} \cdot \dfrac{d(i''', -\Delta)}{d(i'', \Delta)} \end{cases}$$

etc.

As shown in the article (28) $\log s(i, x)$ may be applied in calculating annuities on two joint lives (a_{xy}) for quinquennial ages.

We give below (Table 17), according to H^M, an example of the application of (40). In order to avoid the cumulative effect of neglected digits, $t(i)$ has been calculated to 5, $\log d(i, \Delta)$ to 8 places of decimals. Log $s(i, x)$ is given to 7 places of decimals, the last figure, however, not always being to rely upon.

In the calculations of annuities on two joint lives a four-figure $\log s(i, x)$ will be sufficient. But if $\log s(i, x)$ shall be used as a basis for calculation of the financial elements S_x, a seven-figure $\log s(i, x)$ is necessary or desirable.

Table 17.

H^M; $x = 20$; $\Delta i = 0{,}0025$; i varies from 3 to 6 %.

i	$\log d(i, \Delta)$	$\log(-d(i, -\Delta))$	$\log \frac{-d(i, -\Delta)}{d(i, \Delta)}$
0,03	2,61698106	2,61386255	−0,0031185
0,04	2,62115204	2,61807380	−0,0030782
0,05	2,62528338	2,62224458	−0,0030388
0,06	2,62937579	2.62637567	−0,0030001

i	$\log \frac{-d(i, -\Delta)}{d(i, \Delta)}$	$\log s(i, x)$	$\log(S^i_{21} - S^i_{26} - 5N^i_{25})$
0,0300	−0,0031185	0,9531160	5,6796504
0,0325	−0,0031084	0,9499975	5,6554752
0,0350	−0,0030983	0,9468891	5,6313610
0,0375	−0,0030882	0,9437908	5,6073076
0,0400	−0.0030782	0,9407026	5,5833147
0,0425	−0,0030683	0,9376244	5,5593820
0,0450	−0,0030584	0,9345561	5.5355092
0,0475	−0,0030486	0,9314977	5,5116960
0,0500	−0,0030388	0,9284491	5,4879420
0,0525	−0,0030291	0.9254103	5,4642471
0,0550	−0,0030194	0,9223812	5,4406109
0,0575	−0,0030097	0,9193618	5,4170332
0,0600	−0,0030001	0,9163521	5,3935137

27. *Transformation of* $a_{\overline{n|}}$ *into* $a_{x\overline{n|}}$ *for small values of* n. Knowing $a_{x\overline{n|}}$ we may calculate a_x (or N_x) for every n-th value of x, as shown in article 25. We shall now show another method of calculating $a_{x\overline{n|}}$ for small values of n (such as $n = 5$), deriving it from $a_{\overline{n|}}$ (the annuity certain), by means of a transformation $\gamma = 0$, applied on a »mortality table» $p = 1$.

Putting

$$p = 1\,,\ \pi_x = p_x\, p = p_x$$

we get

$$\frac{\pi_x - p}{p} = p_x - 1 = - q_x\,. \tag{41}$$

The transformation $\gamma = 0$ gives

$$\frac{p'_x - p}{p} = \frac{\beta}{\alpha + \beta x}, \tag{42}$$

where $\beta = -1$, p'_x being $< p = 1$. From (24) in article 20 we get

$$a(p') - a(p) = -\frac{1}{v}\frac{d\,a(p)}{d\,i} \cdot \frac{-1}{\alpha - x_0}, \tag{43}$$

and we try to determine α so as to make $a(p') = a(\pi)$. If this condition is fulfilled for a value of α, corresponding to an age $z = x_0 + t$, we have

$$p'_z = p'_{x_0+t} = \pi_{x_0+t}$$

whence from (41) and (42)

$$- q_{x_0+t} = \frac{-1}{\alpha - (x_0 + t)}$$

or

$$\alpha = \frac{1}{q_{x_0+t}} + x_0 + t,$$

and substituting this value of α in (43) we find

$$a(p') - a(p) = \frac{1}{v}\frac{d\,a(p)}{di} \cdot \frac{1}{\dfrac{1}{q_{x_0+t}} + t}$$

or

$$(44) \qquad a_{x\overline{n}|} - a_{\overline{n}|} = \frac{1}{v}\frac{d\,a_{\overline{n}|}}{di} \cdot \frac{1}{\dfrac{1}{q_{x+t}} + t},$$

where x is written for x_0.

The formula (44) is analogous to the formula (29) in article 22, t corresponding to $z - x_0$. For $n = 5$ t will be about $= 1$ (Vid. Table 15, where $t(i) = 1 + z - x_0$).

However, t can not be determined directly with sufficient accuracy, and we then proceed in the following manner.

We write

$$(45) \qquad a_{x\overline{n}|} - a_{\overline{n}|} = \frac{\dfrac{1}{v}\dfrac{d\,a_{\overline{n}|}}{di}}{d(1:x)} = -\frac{s(i)}{d(1:x)},$$

where $d(1:x)$ may be called divisor for transformation of $a_{\overline{n}|}$ into $a_{x\overline{n}|}$. If the rate of interest is to be denoted, we write $d(i, 1:x)$. We calculate the divisors directly for two values of i, and (if $n = 5$) for every fifth value of x. For small values of n, such as $n = 5$, the divisors $d(i, 1:x)$, corresponding to a certain value of x, will be about a linear function of i, and moreover at most ages so slowly varying with i that it, for most practical purposes, may even be regarded as a constant. For instance (according to H^M) the divisors corresponding to $i = 0$ will give a_x correct to the third place of decimals at rates of interest up to 6 %, exceptions to be made only for the higher ages (Table 20).

We give below, according to H^M, some examples of the application of the formula (45).

Table 18 contains the values of $\log d(i, 1:x)$, for $n = 5$, as calculated by (45) at $i = 0$, $i = 0{,}04$ and $i = 0{,}06$. We

Table 18.

H^M; $\log d(i, 1:x)$ for $n = 5$, as calculated by (45).

x	$i = 0$	$i = 0{,}04$	$i = 0{,}06$	$10^5 \Delta \log d(i, 1:x)$	
10	2,38753	2,38601	2,38525	−152	−76
15	2,47292	2,47438	2,47510	+146	+72
20	2,18373	2,18392	2,18402	19	10
25	2,17330	2,17345	2,17353	15	8
30	2,10509	2,10523	2,10530	14	7
35	2,04438	2,04462	2,04474	24	12
40	1,98228	1,98240	1,98245	12	5
45	1,89373	1,89412	1,89431	39	19
50	1,78341	1,78371	1,78385	30	14
55	1,65772	1,65810	1,65829	38	19
60	1,50720	1,50760	1,50779	40	19
65	1,35214	1,35232	1,35241	18	9
70	1,19504	1,19526	1,19537	22	11
75	1,02051	1,02021	1,02007	− 30	−14
80	0,87230	0,87159	0,87124	− 71	−35
85	0,75479	0,75319	0,75240	−160	−79
90	0,64295	0,64105	0,64012	−190	−93

give log d to five places of decimals; but it should be noticed that this corresponds to 6 or 5 places of decimals in $a_{x\overline{5|}}$, and almost as many places in a_x (4 places at very high ages).

Table 19 shows the calculation of a_x at $5^1/_2$ %, by means of $d(i, 1:x)$, taken at the same rate of interest (interpolated from the values in Table 18).

Table 20 shows the calculation of a_x at 6 %, by means of $d(i, 1:x)$, taken at $i = 0$.

Table 21 gives the values of the logarithms of $s(i) = -\frac{1}{v}\frac{d a_{\overline{n|}}}{di}$ for $n = 5$ at different rates of interest.

Table 19.

H^M; $i = 0,055$; a_x as calculated by means of $d(i, 1:x)$;
$a_{\overline{5}|} = 4,505150$.

x	$\log d(i, 1:x)$	$\log(a_{\overline{5}|} - a_{x\overline{5}|})$	$a_{\overline{5}|} - a_{x\overline{5}|}$	$a_{x\overline{5}|}$	D_x	$N_x - N_{x+5}$	N_x	a_x
90	0,64035	0,29052	1,9522	2,5530	11,793	30,108	31,279	2,6523
85	0,75260	0,17827	1,50755	2,99760	57,240	171,583	202,862	3,5441
80	0,87133	0,05954	1,14694	3,35821	192,200	645,448	848,310	4,4137
75	1.02010	1,91077	0,81428	3,69087	463,283	1709,92	2558,23	5,5220
70	1,19534	1,73553	0,54391	3,96124	898,517	3559,24	6117,47	6,8084
65	1,35239	$\bar{1}$,57848	0,37886	4,12629	1518,485	6265,71	12383.18	8,1550
60	1,50774	1,42313	0,26493	4,24022	2369.829	10048,60	22431,78	9,4656
55	1,65824	1,27263	0,18734	4,31781	3499,623	15110,71	37542,49	10,7276
50	1,78382	1,14705	0,14030	4,36485	5001,114	21829,11	59371,60	11.8717
45	1,89426	1,03661	0,108795	4,396355	7002,977	30787,57	90159.17	12,8744
40	1.98244	2,94843	0,088804	4,416346	9665,337	42685,47	132844,64	13.7444
35	2,04471	2,88616	0,076941	4,428209	13245,827	58655,29	191499,93	14,4574
30	2,10528	2,82559	0.066926	4,438224	18030,874	80025,06	271524,99	15,0589
25	2,17351	2,75736	0.057195	4,447955	24403,731	108546,7	380071,7	15.5743
20	2,18400	2,74687	0,055830	4,449320	32978,409	146731,5	526803,2	15,9742
15	2,47492	2,45595	0,028572	4,476578	43997,776	196959,5	723762,7	16,4500
10	2.38544	2,54543	0,035110	4,470040	58543,058	261689,8	985452,5	16,8330

The values of $\log d(1:x)$ for $n = 5$, as calculated by the formula

$$d(1:x) = \frac{1}{\frac{1}{q_{x+t}} + t}, \quad t = 1,$$

are given in Table 24.

The method applied in this article may also be used in calculating S_x for quinquennial ages. This will be shown in article 33.

Table 20.

H^M; $i = 0{,}06$; a_x as calculated by means of $d(0, 1:x)$;
$a_{\overline{5}|} = 4{,}46511$.

x	log $d(0)$	$\log(a_{\overline{5}\|} - a_{x\overline{5}\|})$	$a_{\overline{5}\|} - a_{x\overline{5}\|}$	$a_{x\overline{5}\|}$	D_x	$N_x - N_{x+5}$	N_x	a_x	$10^3\delta$
90	0,6430	0,2818	1,914	2,551	7,706	19,66	20,41	2,649	−13
85	0,7548	0,1700	1,479	2,986	38,297	114,35	134,76	3,519	−11
80	0,8723	0,0525	1,128	3,337	131,669	439,38	574,14	4,360	− 6
75	1,0205	1,9043	0,8023	3,6628	324,968	1190,3	1764,4	5,429	− 3
70	1,1950	1,7298	0,5368	3,9283	645,339	2535,1	4299,5	6,662	− 1
65	1,3521	1,5727	0,3739	4,0912	1116,71	4568,6	8868,1	7,941	0
60	1,5072	1,4176	0,2616	4,2035	1784,48	7501,1	16369,2	9,173	0
55	1,6577	1,2671	0,1849	4,2802	2698,26	11549	27918	10,347	0
50	1,7834	1,1414	0,1385	4,3266	3948,18	17082	45000	11,398	0
45	1,8937	1,0311	0,1074	4,3577	5660,82	24668	69668	12,307	1
40	1,9823	2,9425	0,08760	4,37751	7999,83	35019	104687	13,0862	0,4
35	2,0444	2,8804	0,07593	4,38918	11225,6	49271	153958	13,7149	0,3
30	2,1051	2,8197	0,06603	4,39908	15646,4	68830	222788	14,2389	0,3
25	2,1733	2,7515	0,05643	4,40868	21683,1	95594	318382	14,6834	0,2
20	2,1837	2,7411	0,05509	4,41002	30002,8	132313	450695	15,0218	0,1
15	2,4729	2,4519	0,02831	4,43680	40985,4	181844	632539	15,4333	0,2
10	2,3875	2,5373	0,03445	4,43066	55839,5	247406	879945	15,7585	0,0

Table 21.

$$\log s(i) = \log \frac{1}{i}(a_{\overline{5}|} - 5v^4).$$

i	$\log s(i)$	i	$\log s(i)$	i	$\log s(i)$
0,0300	0,96168	0,0400	0,94924	0,0500	0,93695
0,0325	0,95855	0,0425	0,94615	0,0525	0,93391
0,0350	0,95544	0,0450	0,94308	0,0550	0,93087
0,0375	0,95233	0,0475	0,94001	0,0575	0,92785
				0,0600	0,92483

28. *Calculation of* a_{xy} *(or* N_{xy}*) for quinquennial ages.* In article 27 we have shown a method of deriving $a_{x\overline{5}|}$ from $a_{\overline{5}|}$; we may, in the same manner, derive $a_{xy\overline{5}|}$ from $a_{x\overline{5}|}$, $x > y$, and knowing $a_{xy\overline{5}|}$ we find a_{xy} (or N_{xy}) for quinquennial ages (in a similar manner as shown in article 25 for $a_{x\overline{5}|}$ and a_x).

We put

$$p'_x = p_x p_y$$

and get

$$\frac{p'_x - p_x}{p_x} = p_y - 1 = -q_y.$$

The transformation $\gamma = 0$ gives

$$\frac{p'_x - p_x}{p_x} = \frac{\beta}{\alpha + \beta x},$$

where $\beta = -1$, p'_x being $< p_x$.

Proceeding as shown in article 27 we find

$$(45) \qquad a_{xy\overline{n}|} - a_{x\overline{n}|} = \frac{1}{v}\frac{d\,a_{x\overline{n}|}}{di} \cdot \frac{1}{\frac{1}{q_{y+t}} + t},$$

which corresponds to the formula (44) for $a_{x\overline{n}|} - a_{\overline{n}|}$. As in the former case t is about $= 1$ for $n = 5$.

Proceeding as before we write

$$(46) \qquad a_{xy\overline{n}|} - a_{x\overline{n}|} = \frac{\frac{1}{v}\frac{d\,a_{x\overline{n}|}}{di}}{d(i, x : xy)} = -\frac{s(i, x)}{d(i, x : xy)},$$

where $d(i, x : xy)$ may be called divisor for transformation of $a_{x\overline{n}|}$ into $a_{xy\overline{n}|}$.

The divisors

$$d(i, x : xy)$$

and

$$d(i, 1 : y)$$

have the same form

$$\frac{1}{q_{y+t}} + t,$$

where t for small values of n, such as $n = 5$, can not differ very much in the two formulae (except at very high ages). Accordingly, $d(i, x:xy)$ will not differ very much from $d(i, 1:y)$, at most ages, and it may be expected that $d(i, x:xy)$ for $n = 5$, both as a function of $(x - y)$, y being constant, and as a function of i, will be about constant, or so slowly varying that the divisor, corresponding to a certain difference of ages $(x - y)$, say $x - y = 0$, or to a certain rate of interest, say $i = 0$, will hold for a large series of differences of ages and rates of interest.

For most practical purposes we may put, for $n = 5$,

(47) $$d(i, x:xy) = d(i, 1:y) = d(0, 1:y);$$

and even

(48) $$d = \frac{1}{q_{y+1}} + 1$$

will sometimes do good service.

We give below, according to H^M, some examples of the application of the formulae (46), (47) and (48).

Tables 22 and 23 contain the values of $\log d(i, x:xy)$ for $n = 5$, as calculated by (46).

Table 23, for $d(i, x:xy)$, corresponds to Table 18, for $d(i, 1:y)$.

Table 24 contains the values of d and $\log d$ for $n = 5$, as calculated by the formula (48).

Table 25 gives a_{xy} at 4 % for $x - y = 20$, by means of $d(4\ \%, x:xy)$ for $x - y = 0$.

Table 22.

H^M; $i = 0{,}04$; $\log d(i, x : xy)$ as calculated by (46), for $n = 5$.

$x - y$	$y = 10$	$y = 15$	$y = 20$	$y = 25$	$y = 30$	$y = 35$	$y = 40$	$y = 45$
0	2,3859	2,4745	2,1840	2,1735	2,1053	2,0447	1,9824	1,8943
10	2,3857	2,4746	2,1840	2,1735	2,1053	2,0447	1,9825	1,8944
20	2,3857	2,4747	2,1840	2,1735	2,1053	2,0448	1,9825	1,8946
30	2,3856	2,4749	2,1840	2,1735	2,1054	2,0449	1,9826	1,8954
40	2,3853	2,4753	2,1841	2,1737	2,1055	2,0454	1,9830	1,8969
50	2,3846	2,4764	2,1843	2,1740	2,1059	2,0464	1,9837	

$x - y$	$y = 50$	$y = 55$	$y = 60$	$y = 65$	$y = 70$	$y = 75$	$y = 80$	$y = 85$
0	1,7838	1,6583	1,5080	1,3526	1,1957	1,0192	0,8680	0,7418
5	1,7839	1,6585	1,5081	1,3527	1,1960	1,0187	0,8666	0,7336
10	1,7840	1,6586	1,5084	1,3529	1,1964	1,0181	0,8630	
15	1,7841	1,6589	1,5089	1,3533	1,1968	1,0166		
20	1,7843	1,6593	1,5096	1,3537	1,1980			
25	1,7846	1,6600	1,5105	1,3547				
30	1,7852	1,6608	1,5126					
35	1,7858	1,6628						
40	1,7873							

$x - y$	$y = 90$
0	0,6179

Table 23.

H^M; $\log d(i, x : xy)$, as calculated by (46), for $n = 5$.

$x - y = 0$	x	y	$i = 0$	$i = 0{,}04$	$i = 0{,}06$	$10^5 \Delta \log d(i, x : xy)$	
	10	10	2,38741	2,38588	2,38512	−153	−76
	15	15	2,47307	2,47453	2,47526	+146	+73
	20	20	2,18377	2,18396	2,18406	19	10
	25	25	2,17333	2,17348	2,17355	15	7
	30	30	2,10513	2,10526	2,10532	13	6
	35	35	2,04444	2,04468	2,04480	24	12
	40	40	1,98232	1,98243	1,98249	11	6

Table 23, continued.

$x - y = 0$	x	y	$i = 0$	$i = 0{,}04$	$i = 0{,}06$	$10^5 \Delta \log d(i, x : xy)$	
	45	45	1,89387	1,89426	1,89445	39	19
	50	50	1,78354	1,78384	1,78398	30	14
	55	55	1,65796	1,65834	1,65853	38	19
	60	60	1,50756	1,50797	1,50817	41	20
	65	65	1,35238	1,35257	1,35267	19	10
	70	70	1,19549	1,19571	1,19583	22	12
	75	75	1,01956	1,01925	1,01910	− 31	−15
	80	80	0,86875	0,86800	0,86763	− 75	−37
	85	85	0,74355	0,74181	0,74096	−174	−85
	90	90	0,61992	0,61792	0,61695	−200	−97
$x - y = 10$	20	10	2,38727	2,38574	2,38498	−153	−76
	30	20	2,18377	2,18397	2,18406	+ 20	+ 9
	40	30	2,10513	2,10527	2,10534	14	7
	50	40	1,98233	1,98245	1,98250	12	5
	60	50	1,78368	1,78397	1,78412	29	15
	70	60	1,50802	1,50843	1,50863	41	20
	80	70	1,19615	1,19638	1,19650	23	12
	90	80	0,86370	0,86296	0,86259	− 74	−37
$x - y = 20$	30	10	2,38723	2,38569	2,38492	−154	−77
	40	20	2,18379	2,18398	2,18408	+ 19	+10
	50	30	2,10516	2,10529	2,10536	13	7
	60	40	1,98238	1,98250	1,98255	12	5
	70	50	1,78401	1,78431	1,78445	30	14
	80	60	1,50921	1,50964	1,50985	43	21
	90	70	1,19776	1,19800	1,19812	24	12
$x - y = 30$	40	10	2,38712	2,38559	2,38482	−153	−77
	50	20	2,18381	2,18401	2,18411	+ 20	+10
	60	30	2,10522	2,10535	2,10543	13	8
	70	40	1,98252	1,98263	1,98269	11	6
	80	50	1,78487	1,78518	1,78534	31	16
	90	60	1,51214	1,51257	1,51279	43	22

Table 23, continued.

$x-y=40$	x	y	$i=0$	$i=0{,}04$	$i=0{,}06$	$10^5\Delta\log d(i,x:xy)$	
	50	10	2,38684	2,38529	2,38453	−155	−76
	60	20	2,18390	2,18410	2,18420	+ 20	+10
	70	30	2,10537	2,10551	2,10559	14	8
	80	40	1,98285	1,98297	1,98302	12	5
	90	50	1,78697	1,78728	1,78744	31	16
$x-y=50$	60	10	2,38614	2,38459	2,38382	−155	−77
	70	20	2,18412	2,18433	2,18443	+ 21	+10
	80	30	2,10578	2,10593	2,10601	15	8
	90	40	1,98364	1,98375	1,98381	11	6
$x-y=60$	70	10	2,38442	2,38283	2,38204	−159	−79
	80	20	2,18473	2,18496	2,18506	+ 23	+10
	90	30	2,10678	2,10694	2,10702	16	8
$x-y=70$	80	10	2,37986	2,37821	2,37739	−165	−82
	90	20	2,18624	2,18651	2,18664	+ 27	+13
$x-y=80$	90	10	2,36881	2,36715	2,36631	−166	−84

Table 24.

H^M; d and $\log d$, as calculated by (48), for $n=5$ ($t=1$).

x	d	log d	x	d	log d
10	251,6	2,4007	55	45,54	1,6584
15	309,0	2,4900	60	32,21	1,5080
20	149,7	2,1752	65	22,47	1,3516
25	150,6	2,1778	70	15,69	1,1956
30	127,3	2,1048	75	10,401	1,0171
35	110,8	2,0445	80	7,328	0,8650
40	96,36	1,9839	85	5,553	0,7445
45	78,28	1,8937	90	4,198	0,6230
50	60,99	1,7853			

Table 25.

H^M; $i = 0{,}04$; a_{xy} for $x - y = 20$, as calculated by means of $d(i, x:xy)$ for $x - y = 0$.

x	y	$\log s(i,x)$	$\log d(i, x:xy)$	$\log(s:d)$	$a_{x\overline{5}\rceil} - a_{xy\overline{5}\rceil}$	$a_{x\overline{5}\rceil}$	$a_{xy\overline{5}\rceil}$	$10^4\delta$
90	70	0,4923	1,1957	$\bar{1}$,2966	0,1980	2,5967	2,3987	10
85	65	0,6431	1,3526	$\bar{1}$,2905	0,1952	3,0594	2,8642	4
80	60	0,7330	1,5080	1,2250	0,1679	3,4341	3,2662	7
75	55	0,8060	1,6583	1,1477	0,1405	3,7807	3,6402	3
70	50	0,8579	1,7838	$\bar{1}$,0741	0,1186	4,0624	3,9438	1
65	45	0,8877	1,8943	2,9934	0,09849	4,23461	4,13612	0,6
60	40	0,9070	1,9824	2,9246	0,08407	4,35343	4,26936	0,3
55	35	0,9198	2,0447	$\bar{2}$,8751	0,07501	4,43440	4,35939	0,2
50	30	0,9274	2,1053	2,8221	0,06639	4,48350	4,41711	−0,1
45	25	0,9324	2,1735	$\bar{2}$,7589	0,05740	4,51636	4,45896	0,1
40	20	0,9356	2,1840	$\bar{2}$,7516	0,05644	4,53725	4,48081	−0,1
35	15	0,9374	2,4745	$\bar{2}$,4629	0,02903	4,54961	4,52058	0,1
30	10	0,9390	2,3859	$\bar{2}$,5531	0,03574	4,56007	4,52433	−0,1

x	y	$10^{-5}\, l_x D_y$	$10^{-5}\, l_x D_y\, a_{xy\overline{5}\rceil}$	$10^{-5} \sum l_x D_y$	a_{xy}	$10^4\delta$
90	70	35,745	85,742	88,240	2,4686	10
85	65	208,840	598,16	686,40	3,2867	6
80	60	779,499	2546,0	3232,4	4,1468	8
75	55	1976,30	7194,1	10426,5	5,2758	6
70	50	3901,41	15386,4	25812,9	6,6163	4
65	45	6576,03	27199,2	53012,1	8,0614	4
60	40	10089,0	43073,6	96085,7	9,5238	3
55	35	14543,0	63398,6	159484,3	10,9664	1
50	30	20150,2	89005,6	248489,9	12,3319	1
45	25	27200,5	121286	369776	13,5945	0
40	20	36135,0	161914	531690	14,7140	1
35	15	47057,9	212729	744419	15,8192	0
30	10	60709,6	274670	1019089	16,7863	0

Table 26.

II^M; $i = 0{,}04$; a_{xy} for $x - y = 0$, as calculated by means of $d(i, 1 : y)$.

x	y	$\log s(i, x)$	$\log d(i, 1 : y)$	$\log (s : d)$	$a_{x\overline{5}\rceil} - a_{xy\overline{5}\rceil}$	$a_{x\overline{5}\rceil}$	$a_{xy\overline{5}\rceil}$	$10^4 \delta$
90	90	0,4923	0,6411	1,8512	0,7099	2,5967	1,8868	−390
85	85	0,6431	0,7532	1,8899	0,7761	3,0594	2,2833	−207
80	80	0,7330	0,8716	1,8614	0,7268	3,4341	2,7073	− 59
75	75	0,8060	1,0202	1,7858	0,6106	3,7807	3,1701	− 15
70	70	0,8579	1,1953	1,6626	0,4598	4,0624	3,6026	4
65	65	0,8877	1,3523	1,5354	0,3431	4,2346	3,8915	2
60	60	0,9070	1,5076	$\bar{1}$,3994	0,2508	4,3534	4,1026	2
55	55	0,9198	1,6581	1,2617	0,1827	4,4344	4,2517	1
50	50	0,9274	1,7837	1,1437	0,1392	4,4835	4,3443	0
45	45	0,9324	1,8941	1,0383	0,1092	4,5164	4,4072	0
40	40	0,9356	1,9824	2,9532	0,08978	4,53725	4,44747	0,0
35	35	0,9374	2,0446	2,8928	0,07812	4,54961	4,47149	0,1
30	30	0,9390	2,1052	2,8338	0,06821	4,56007	4,49186	0,2
25	25	0,9405	2,1735	2,7670	0,05848	4,57022	4,51174	0,0
20	20	0,9407	2,1839	2,7568	0,05712	4,57164	4,51452	0,1
15	15	0,9448	2,4744	2,4704	0,02954	4,60005	4,57051	0,1
10	10	0,9441	2,3860	$\bar{2}$,5581	0,03615	4,59332	4,55717	0,1

x	y	$10^{-5} l_x D_y$	$10^{-5} l_x D_y a_{xy\overline{5}\rceil}$	$10^{-5} \sum l_x D_y$	a_{xy}	$10^4 \delta$
90	90	0,62475	1,1788	1,1838	1,8948	−391
85	85	10,483	23,936	25,120	2,3963	−231
80	80	84,185	227,91	253,03	3,0056	− 87
75	75	348,386	1104,42	1357,45	3,8964	− 36
70	70	933,390	3362,63	4720,08	5,0569	− 9
65	65	1898,77	7389,06	12169,1	6,3773	− 2
60	60	3294,04	13514,1	25623,2	7,7787	0
55	55	5116,58	21754,2	47377,4	9,2596	2
50	50	7442,39	32332,0	79709,4	10,7102	1
45	45	10394,1	45808,9	125518,3	12,0759	1
40	40	14102,5	62720,4	188238,7	13,3479	0
35	35	18865,3	84356,0	272594,7	14,4495	1

x	y	$19^{-5}\, l_x D_y$	$10^{-5}\, l_x D_y\, \mathrm{a}_{x y \overline{5}\rceil}$	$10^{-5} \sum l_x D_y$	a_{xy}	$10^4 \delta$
30	30	24898,9	111842	384437	15,4399	0
25	25	32486,4	146570	531007	16,3455	0
20	20	42256,3	190767	721774	17,0809	0
15	15	53571,7	244850	966624	18,0436	− 1
10	10	67556,4	307866	1274490	18,8656	0

Table 27.

H^M; $i = 0{,}04$; a_{xy} for $x - y = 30$, as calculated by means of $d(i, 1 : y)$.

x	y	$\log s(i, x)$	$\log d(i, 1 : y)$	$\log (s : d)$	$\mathrm{a}_{x\overline{5}\rceil} - \mathrm{a}_{xy\overline{5}\rceil}$	$\mathrm{a}_{x\overline{5}\rceil}$	$\mathrm{a}_{xy\overline{5}\rceil}$	$10^4 \delta$
90	60	0,4923	1,5076	$\bar{2}$,9847	0,0965	2,5967	2,5002	10
85	55	0,6431	1,6581	2,9850	0,0966	3,0594	2,9628	6
80	50	0,7330	1,7837	$\bar{2}$,9493	0,0890	3,4341	3,3451	4
75	45	0,8060	1,8941	2,9119	0,0816	3,7807	3,6991	2
70	40	0,8579	1,9824	2,8755	0,0750	4,0624	3,9874	− 1
65	35	0,8877	2,0446	$\bar{2}$,8431	0,0697	4,2346	4,1649	1
60	30	0,9070	2,1052	2,8018	0,0633	4,3534	4,2901	0
55	25	0,9198	2,1735	2,7463	0,0558	4,4344	4,3786	0
50	20	0,9274	2,1839	2,7435	0,0554	4,4835	4,4281	0
45	15	0,9324	2,4744	2,4580	0,0287	4,5164	4,4877	0
40	10	0,9356	2,3860	$\bar{2}$,5496	0,0355	4,5372	4,5017	1

x	y	$10^{-5}\, l_x D_y$	$10^{-5}\, l_x D_y\, \mathrm{a}_{x y \overline{5}\rceil}$	$10^{-5} \sum l_x D_y$	a_{xy}	$10^4 \delta$
90	60	81,699	204,26	211,49	2,5886	11
85	55	417,09	1235,75	1447,2	3,4698	8
80	50	1425,52	4768,5	6215,7	4,3603	6
75	45	3427,08	12677,1	18893	5,5129	3
70	40	6534,02	26054	44947	6,8789	1
65	35	10778,8	44893	89840	8,3349	1
60	30	16310,0	69972	159812	9,7984	0
55	25	23218,9	101666	261478	11,2614	1
50	20	31937,6	141423	402901	12,6153	0
45	15	42497,3	190715	593616	13,9683	1
40	10	55588,1	250241	843857	15,1805	1

Table 28.

H^M; $i = 0{,}04$; a_{xy} for $x - y = 0$, as calculated by means of d from (48).

x	y	$\log s_{i,x}$	$\log d$	$\log (s : d)$	$a_{x\overline{5}\vert} - a_{xy\overline{5}\vert}$	$a_{x\overline{5}\vert}$	$a_{xy\overline{5}\vert}$	$10^4\delta$
90	90	0,4923	0.6230	1,8693	0,7401	2,5967	1,8566	−88
85	85	0,6431	0,7445	1,8986	0,7918	3,0594	2,2676	−50
80	80	0,7330	0,8650	1,8680	0,7379	3,4341	2,6962	52
75	75	0,8060	1,0171	$\bar{1}$,7889	0,6151	3,7807	3,1656	30
70	70	0,8579	1,1956	1,6623	0,4595	4,0624	3,6029	1
65	65	0,8877	1,3516	$\bar{1}$,5361	0,3437	4,2346	3,8909	8
60	60	0,9070	1,5080	1,3990	0,2506	4,3534	4,1028	0
55	55	0,9198	1,6584	1,2614	0,1826	4,4344	4,2518	0
50	50	0,9274	1,7853	1,1421	0,1387	4,4835	4,3448	− 5
45	45	0,9324	1,8937	$\bar{1}$,0387	0,1093	4,5164	4,4071	1
40	40	0,9356	1,9839	2,9517	0,0895	4,5372	4,4477	− 2
35	35	0,9374	2,0445	$\bar{2}$,8929	0,0781	4,5496	4,4715	0
30	30	0,9390	2,1048	2,8342	0,0683	4,5601	4,4918	1
25	25	0,9405	2,1778	2.7627	0,0579	4,5702	4,5123	− 6
20	20	0,9407	2,1752	2,7655	0,0583	4,5716	4,5133	−12
15	15	0,9448	2,4900	2,4548	0,0285	4,6001	4,5716	11
10	10	0,9441	2,4007	2,5434	0,0349	4,5933	4,5584	−12

x	y	$10^{-5}\, l_x D_y$	$10^{-5}\, l_x D_y a_{xy\overline{5}\vert}$	$10^{-5} \sum l_x D_y$	a_{xy}	$10^3\delta$
90	90	0,62475	1,160	1,165	1,865	− 9
85	85	10,483	23,771	24,936	2,379	− 6
80	80	84,185	226,98	251,92	2,992	5
75	75	348,386	1102,85	1354,77	3,889	4
70	70	933,390	3362,9	4717,7	5,054	2
65	65	1898,77	7387,9	12105,6	6,375	2
60	60	3294,04	13514,8	25620,4	7,778	1
55	55	5116,58	21755	47375	9,259	1
50	50	7442,39	32336	79711	10,710	0
45	45	10394,1	45808	125519	12,076	0
40	40	14102,5	62724	188243	13,348	0
35	35	18865,3	84356	272599	14,450	0

x	y	$10^{-5}\, l_x D_y$	$10^{-5}\, l_x D_y\, a_{xy\overline{5}|}$	$10^{-5} \sum l_x D_y$	a_{xy}	$10^3 \delta$
30	30	24898,9	111841	384440	15,440	0
25	25	32486,4	146588	531028	16,346	0
20	20	42256,3	190716	721744	17,080	1
15	15	53571,7	244908	966652	18,044	0
10	10	67556,4	307949	1274601	18,867	− 1

Table 26 gives a_{xy} at 4 % for $x - y = 0$, by means of $d(4\ \%, 1 : y)$.

Table 27 gives a_{xy} at 4 % for $x - y = 30$, by means of $d(4\ \%, 1 : y)$.

Table 28 gives a_{xy} at 4 % for $x - y = 0$, by means of d from (48), Table 24.

As to the calculation of a_{xy} by means of $d(i, 1 : y)$, instead of $d(i, x : xy)$, the result, if necessary, can be improved, it being possible to derive $d(i, x : xy)$ from $d(i, 1 : y)$ with good approximation. This will be shown in article 29.

29. *Relation between* $d(i, x : xy)$ *and* $d(i, 1 : y)$ *for small values of* n. As shown in article 27 $\log d(i, 1 : y)$, for $n = 5$, is nearly a linear function of i. We write

$$(49)\qquad \log d(j, 1 : y) = \log d(i, 1 : y) + g(1 : y)(j - i),$$

where $g(1 : y)$ is practically independent of i.

We have from (45)

$$(50)\qquad \overset{i}{a}_{xy\overline{5}|} - \overset{i}{a}_{y\overline{5}|} = -\frac{s(i, y)}{d(i, y : xy)} = -\frac{s(i, y)}{\dfrac{1}{q_{x+t}} + t};$$

$\overset{i}{a}_{xy\overline{5}|}$ is equal to $\overset{i'}{a}_{y\overline{5}|}$, taken at a rate of interest i', which may be written

$$(51)\qquad i' = i + (1 + i)\, h(x),$$

where $h(x)$ may be easily found with a good approximation. We have from (29) and (35)

(52) $$a^{i}_{y\,\overline{5}|} - a^{i}_{y\,\overline{5}|} = \frac{-s(i,\,y)}{\dfrac{1+i}{i'-i} + t(i)},$$

and comparing now (50) and (52) we find

$$\frac{1}{q_{x+t}} + t = \frac{1}{h(x)} + t(i),$$

where $t = t(i) - 1$ approximately. (Table 15). Hence

(53) $$h(x) = \frac{q_{x+t}}{p_{x+t}}.$$

For

$$a^{i}_{x\,\overline{5}|} = a^{i}_{\overline{5}|}$$

and

$$s(i,\,x) = s(i')$$

we find the same value of i' (approximately).

Comparing now

$$a^{i}_{xy\,\overline{5}|} - a^{i}_{x\,\overline{5}|} = -\frac{s(i,\,x)}{d(i.\,x : xy)}$$

with

$$a^{i'}_{y\,\overline{5}|} - a^{i'}_{\overline{5}|} = -\frac{s(i')}{d(i',\,1 : y)}$$

we find

$$d(i,\,x : xy) = d(i',\,1 : y)$$

whence by (49) and (51)

(54) $$\log d(i,\,x : xy) = \log d(i,\,1 : y) + g(1 : y)\,h(x)\,(1+i).$$

We give below, according to H^{M}, some examples of the application of the formula (54).

Table 29 contains the values of $g(1:x)$ and $h(x)$.

$g(1:x)$ has been found from $\log d(i, 1:x)$ for $i = 0{,}06$ and $i = 0$ (Table 18).

In $h(x) = \frac{q_{x+t}}{p_{x+t}}$ t has been put $= 1$, except for $x = 90$, 85 and 80, where t has been put $= 0{,}7$, $0{,}8$ and $0{,}9$ (Table 15); the interpolation (by second differences for $x = 90$, by first differences for $x = 85$ and 80) has been made in $\log \frac{q_x}{p_x}$.

Table 30 gives some values of $\log d(i, x:xy)$, at $i = 0{,}04$, as calculated by (54).

Table 29.

H^M; values of $g(1:x)$ and $h(x)$.

x	$g(1:x)$	$h(x)$	x	$g(1:x)$	$h(x)$
90	−0,047	0,433	45	0,010	0,013
85	−0,040	0,278	40	0,003	0,011
80	−0,018	0,186	35	0,006	0,009
75	−0,007	0,119	30	0,003	0,008
70	0,005	0,073	25	0,004	0,007
65	0,005	0,049	20	0,005	0,007
60	0,010	0,033	15	0,036	0,003
55	0,009	0,023	10	−0,038	0,004
50	0,007	0,017			

30. *Calculation of* a *(or* N*) for 3, 4 etc. joint lives for quinquennial ages.* Writing

$$a_{xyz\overline{5}|} - a_{xy\overline{5}|} = -\frac{s(i, xy)}{d(i, xy : xyz)}$$

$$a_{xyzu\overline{5}|} - a_{xyz\overline{5}|} = -\frac{s(i, xyz)}{d(i, xyz : xyzu)}$$

etc.,

Table 30.

H^M; $i = 0{,}04$; $\log d(i,\, x : xy)$, as calculated by (54).

	x	y	$\log d(i, 1 : y)$	$g(1 : y) h(x)(1 + i)$	$\log d(i, x : xy)$	$10^4 \delta$
$x - y = 0$	90	90	0,6411	−0,0212	0,6199	−20
	85	85	0,7532	−0,0115	0,7417	1
	80	80	0,8716	−0,0035	0,8681	− 1
	75	75	1,0202	−0,0008	1,0194	− 2
	70	70	1,1953	0,0004	1,1957	0
	65	65	1,3523	0,0003	1,3526	0
	60	60	1,5076	0,0003	1,5079	1
	55	55	1,6581	0,0002	1,6583	0
	50	50	1,7837	0,0001	1,7838	0
$x - y = 20$	90	70	1,1953	0,0023	1,1976	4
	80	60	1,5076	0,0019	1,5095	1
	70	50	1,7837	0,0005	1,7842	1
	60	40	1,9824	0,0001	1,9825	0
	50	30	2,1052	0,0001	2,1053	0
$x - y = 60$	90	30	2,1052	0,0014	2,1066	3
	80	20	2,1839	0,0010	2,1849	1
	70	10	2,3860	−0,0029	2,3831	− 3

For $x - y = 0$ the corresponding $a_{xy\overline{5}|}$ and a_{xy} have been calculated in Table 33.

we have (approximately)

$$d(i, xy : xyz) = d(i', y : yz)$$
$$d(i, xyz : xyzu) = d(i', yz : yzu)$$
etc.,

where i' is equal to

$$i' = i + (1 + i)\, h(x)$$

from (51).

Further we have (approximately)

$$(55)\quad \begin{cases} \log d(j, x : xy) - \log d(i\ \ x : xy) = g(1 : y)(j - i) \\ \log d(j, xy : xyz) - \log d(i, xy : xyz) = g(1 : z)(j - i) \\ \log d(j, xyz : xyzu) - \log d(i, xyz : xyzu) = g(1 : u)(j - i) \end{cases}$$

etc. (for a limited number of ages).

Hence

$$(55\,\text{a})\quad \begin{cases} \log d(i, xy : xyz) = \log d(i', y : yz) = \\ \qquad = \log d(i, y : yz) + g(1 : z)\, h(x)(1 + i) \\ \log d(i, xyz : xyzu) = \log d(i', yz : yzu) = \\ \qquad = \log d(i, yz : yzu) + g(1 : u)\, h(x)(1 + i) \end{cases}$$

etc.

As to the determination of $s(i, xy)$, $s(i, xyz)$ etc. we may proceed in the following manner.

We have

$$a_{x\overline{5}|} - a_{\overline{5}|} = -\frac{s(i)}{d(i, 1 : x)};$$

writing now

$$(56)\qquad a_{\overline{5}|} - a_{x\overline{5}|} = \frac{s(i, x)}{d(i, x : 1)}$$

where $d(i, x : 1)$ may be called divisor for transformation of $a_{x\overline{5}|}$ into $a_{\overline{5}|}$, we get

$$(57)\qquad \frac{s(i, x)}{s(i)} = \frac{d(i, x : 1)}{d(i, 1 : x)}.$$

We find in this manner

$$(57\,\text{a})\quad \begin{cases} \dfrac{s(i, xy)}{s(i, x)} = \dfrac{d(i, xy : x)}{d(i, x : xy)} \\ \dfrac{s(i, xyz)}{s(i, xy)} = \dfrac{d(i, xyz : xy)}{d(i, xy : xyz)} \end{cases}$$

etc.

Now $\log d(i, x:1)$, $\log d(i, xy:y)$ etc., for $n = 5$, are nearly linear functions of i; we write

$$(58) \qquad \log d(j, x:1) = \log d(i, x:1) + g(x:1)(j-i),$$

where $g(x:1)$ is practically independent of i.

Further we have (approximately)

$$\log d(j, xy:x) - \log d(i, xy:x) = g(y:1)(j-i)$$
$$(59) \quad \log d(j, xyz:xy) - \log d(i, xyz:xy) = g(z:1)(j-i)$$
$$\log d(j, xyzu:xyz) - \log d(i, xyzu:xyz) = g(u:1)(j-i)$$

etc. (for a limited number of ages).

For

$$i' = i + (1+i)\,h(x)$$

we have (approximately)

$$(60) \qquad \begin{aligned} s(i, x) &= s(i') \\ s(i, xy) &= s(i', y) \\ s(i, xyz) &= s(i', yz) \\ &\text{etc.,} \end{aligned}$$

and substituting these values in (57) and (57 a), we find

$$\frac{s(i, xy)}{s(i, x)} = \frac{s(i', y)}{s(i')} = \frac{d(i', y:1)}{d(i', 1:y)}$$

$$\frac{s(i, xyz)}{s(i, xy)} = \frac{s(i', yz)}{s(i', y)} = \frac{d(i', yz:y)}{d(i', y:yz)}$$

etc.

Hence

$$\begin{aligned} \log \frac{s(i, xy)}{s(i, x)} &= \log d(i', y:1) - \log d(i', 1:y) \\ &= \log d(i, y:1) + g(y:1)\,h(x)(1+i) \\ &\quad - \log d(i, 1:y) - g(1:y)\,h(x)(1+i) = \\ = \log \frac{s(i, y)}{s(i)} &+ [g(y:1) - g(1:y)]\,h(x)(1+i); \end{aligned}$$

writing now

$$(61) \qquad g(y:1) - g(1:y) = g(y)$$

we find

$$(62) \begin{cases} \log s(i, xy) = \log s(i, x) + \log s(i, y) - \log s(i) + \\ \qquad\qquad + g(y)\,h(x)\,(1+i), \\ \text{and in the same manner} \\ \log s(i, xyz) = \log s(i, xy) + \log s(i, yz) - \log s(i, y) + \\ \qquad\qquad + g(z)\,h(x)\,(1+i) \end{cases}$$

etc.

Starting from $\frac{s(i, xy)}{s(i, y)}$ $\left(\text{instead of } \frac{s(i, xy)}{s(i, x)}\right)$ we find

$$\log s(i, xy) = \log s(i, y) + \log s(i, x) - \log s(i) + \\ + g(x)\,h(y)\,(1+i),$$

and we shall then have (theoretically)

$$g(y)\,h(x) = g(x)\,h(y)$$

or

$$(63) \qquad \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{h(y)}{g(y)} = \text{constant}$$

for all ages, and accordingly for all mortality tables. For $n = 5$ this constant is about 2,2.

However, the numbers h and g being only approximate, the equation (63), too, will be only approximate, and we then replace the number

$$g(y)\,h(x) \text{ or } g(x)\,h(y)$$

by the mean of them and write

$$(64) \qquad \frac{1}{2}[g(x)\,h(y) + g(y)\,h(x)] = k(xy);$$

hence the formulae (62) take the form

$$(65)\quad \begin{cases} \log s(i, xy) = \log s(i, x) + \log s(i, y) - \log s(i) \\ \qquad\qquad + k(xy)(1 + i), \\ \log s(i, xyz) = \log s(i, xy) + \log s(i, yz) - \log s(i, y) \\ \qquad\qquad + k(xz)(1 + i), \\ \log s(i, xyzu) = \log s(i, xyz) + \log s(i, yzu) - \log s(i, yz) \\ \qquad\qquad + k(xu)(1 + i), \end{cases}$$

etc.

By substitution we get

$$\log s(i, xyz) = \log s(i, xy) + \log s(i, z) - \log s(i) \\ + [k(xz) + k(yz)](1 + i) =$$

Table 31.

H^M; $\log d(i, x : 1)$ for $n = 5$, as calculated by (56).

x	$i = 0$	$i = 0{,}04$	$i = 0{,}06$	$10^5 \Delta \log d(i, x : 1)$	
10	2,38232	2,38085	2,38013	−147	−72
15	2,46838	2,46992	2,47067	+154	+75
20	2,17508	2,17539	2,17555	31	16
25	2,16445	2,16472	2,16485	27	13
30	2,09472	2,09499	2,09513	27	14
35	2,03240	2,03280	2,03300	40	20
40	1,96847	1,96877	1,96891	30	14
45	1,87664	1,87726	1,87757	62	31
50	1,76129	1,76189	1,76218	60	29
55	1,62786	1,62866	1,62906	80	40
60	1,46432	1,46534	1,46584	102	50
65	1,28975	1,29084	1,29137	109	53
70	1,10230	1,10392	1,10472	162	80
75	0,87511	0,87700	0,87794	189	94
80	0,65257	0,65531	0,65665	274	134
85	0,44388	0,44709	0,44867	321	158
90	0,17766	0,18415	0,18731	649	316

$$= \log s(i,x) + \log s(i,y) + \log s(i,z) - 2\log s(i) + [k(xy) + k(xz) + k(yz)](1+i)$$

etc.

However, it will generally be more convenient to use the formulae (65). Calculating, for instance, $a_{xyz\overline{5}|}$ from $a_{xy\overline{5}|}$, and $a_{yzu\overline{5}|}$ from $a_{yz\overline{5}|}$, we get $\log s(i, xy)$ and $\log s(i, yz)$, whence $\log s(i, xyz)$ etc.

The suppositions (55) and (59), for old ages (high values of q), hold only for a few lives, and the errors, in these cases, generally increase very rapidly, as the number of lives increases. For these ages we must then calculate the annuities directly, and comparing now the true values with the values obtained by the summary method, we find the point from which this method may be safely used.

Table 32.

H^M; $g(x:1)$, $g(1:x)$, $g(x)$ and $h(x)$.

x	$g(x:1)$	$g(1:x)$	$g(x)$	$h(x)$
90	0,161	−0,047	0,208	0,433
85	0,080	−0,040	0,120	0,278
80	0,068	−0,018	0,086	0,186
75	0,047	−0,007	0,054	0,119
70	0,040	0,005	0,035	0,073
65	0,027	0,005	0,022	0,049
60	0,025	0,010	0,015	0,033
55	0,020	0,009	0,011	0,023
50	0,015	0,007	0,008	0,017
45	0,016	0,010	0,006	0,013
40	0,008	0,003	0,005	0,011
35	0,010	0,006	0,004	0,009
30	0,007	0,003	0,004	0,008
25	0,007	0,004	0,003	0,007
20	0,008	0,005	0,003	0,007
15	0,038	0,036	0,002	0,003
10	−0,037	−0,038	0,001	0,004

31. *Application of the methods of the preceding article.* We give below, according to H^M, some examples of the application of the above methods.

Table 31 gives the values of $\log d(i, x:1)$ as calculated by (56) for $n = 5$, at $i = 0$, $i = 0{,}04$ and $i = 0{,}06$.

Table 32 gives the values of $g(x:1)$ and $g(x)$. The values of $g(x:1)$ have been found from $\log d(i, x:1)$ for $i = 0{,}06$ and $i = 0$. We add the values of $g(1:x)$ and of $h(x)$ from Table 29.

Tables 33—36 give the joint-life annuities on 2, 3, 4 and 5 lives (of equal ages).

We have here used the same mortality table for all the lives. Of course, we may also use different mortality tables for the different lives.

Table 33.

H^M: $i = 0{,}04$; $x = y$; a_{xy} as calculated by means of $\log d(i, x:xy)$ from (54).

x	$\log s(i, x)$	log $d(i, x:xy)$ from (54)	$\log(s:d)$	$s:d$	$a_{x\overline{5}\rceil}$	$a_{xy\overline{5}\rceil}$	10[illegible]
90	0,4923	0,6199	1,8724	0,7454	2,5967	1,8513	−35
85	0,6431	0,7417	1,9014	0,7969	3,0594	2,2625	1
80	0,7330	0,8681	1,8649	0,7326	3,4341	2,7015	− 1
75	0,8060	1,0194	1,7866	0,6117	3,7807	3,1690	− 4
70	0,8579	1,1957	$\bar{1}$,6622	0,4594	4,0624	3,6030	0
65	0,8877	1,3526	1,5351	0,3429	4,2346	3,8917	0
60	0,9070	1,5079	$\bar{1}$,3991	0,2507	4,3534	4,1027	1
55	0,9198	1,6583	1,2615	0,1826	4,4344	4,2518	0
50	0,9274	1,7838	1,1436	0,1392	4,4835	4,3443	0
45	0,9324	1,8943	1,0381	0,1091	4,5164	4,4073	− 1
40	0,9356	1,9824	2,9532	0,08978	4,53725	4,44747	0,0
35	0,9374	2,0447	2,8927	0,07811	4,54961	4,47150	0,0
30	0,9390	2,1053	2,8337	0,06819	4,56007	4,49188	0,0
25	0,9405	2,1735	2,7670	0,05848	4,57022	4,51174	0,0
20	0,9407	2,1840	2,7567	0,05711	4,57164	4,51453	0,0
15	0,9448	2,4745	2,4703	0,02953	4,60005	4,57052	0,0
10	0,9441	2,3859	2,5582	0,03616	4,59332	4,55716	0,0

x	$10^{-5}\, l_x D_y$	$10^{-5}\, l_x D_y\, a_{xy\overline{5}\vert}$	$10^{-5} \sum l_x D_y$	a_{xy}	$10^4 \delta$
90	0,624748	1,1566	1,1616	1,8593	−36
85	10,48299	23,718	24,879	2,3733	− 1
80	84,18507	227,43	252,31	2,9971	− 2
75	348,3867	1104,0	1356,3	3,8931	− 3
70	933,3901	3363,0	4719,3	5,0561	− 1
65	1898,777	7389,5	12108,8	6,3772	− 1
60	3294,039	13514	25623	7,7786	1
55	5116,576	21755	47378	9,2597	1
50	7442,390	32332	79710	10,7103	0
45	10394,09	45809	125519	12,0760	0
40	14102,54	62721	188240	13,3480	− 1
35	18865,29	84356	272596	14,4496	0
30	24898,95	111843	384439	15,4400	− 1
25	32486,43	146570	531009	16,3456	− 1
20	42256,25	190767	721776	17,0809	0
15	53571,66	244850	966626	18,0436	− 1
10	67556,42	307865	1274491	18,8656	0

Table 34.

H^M; $i = 0{,}04$; $x = y = z$; a_{xyz} as calculated by the method shown in article 30.

x	$\log s(i, xy)$ from (65)	$\log d(i, xy:xyz)$ from (55a)	$\log (s:d)$	$s:d$	$a_{xy\overline{5}\vert}$ from table 33	$a_{xyz\overline{5}\vert}$	$10^4 \delta$
90	0,1291	0,5987	$\bar{1}$,5304	0,3391	1,8513	1,5122	−51
85	0,3717	0,7302	$\bar{1}$,6415	0,4380	2,2625	1,8245	12
80	0,5333	0,8646	1,6687	0,4663	2,7015	2,2352	−12
75	0,6696	1,0185	$\bar{1}$,6511	0,4478	3,1690	2,7212	−10
70	0,7692	1,1960	1,5732	0,3743	3,6030	3,2287	− 1
65	0,8274	1,3528	1,4746	0,2983	3,8917	3,5934	0
60	0,8652	1,5083	1,3569	0,2275	4,1027	3,8752	1
55	0,8906	1,6585	1,2321	0,1706	4,2518	4,0812	0
50	0,9058	1,7840	1,1218	0,1323	4,3443	4,2120	0

x	$\log s(i, xy)$ from (65)	$\log d(i, xy, xyz)$ from 55a	$\log s : d$	$s : d$	$a_{xy\overline{5}\rvert}$ from table 33	$a_{xyz\overline{5}\rvert}$	$10^4 \delta$
45	0,9156	1,8944	1,0212	0,1050	4,4073	4,3023	− 1
40	0,9220	1,9825	2,9395	0,08700	4,44747	4,36047	− 0,1
35	0,9256	2,0447	2,8809	0,07602	4,47150	4,39548	0,0
30	0,9288	2,1053	2,8235	0,06661	4,49188	4,42527	0,0
25	0,9318	2,1735	2,7583	0,05732	4,51174	4,45442	0,0
20	0,9322	2,1840	2,7482	0,05601	4,51453	4,45852	0,1
15	0,9403	2,4746	2,4657	0,02922	4,57052	4,54130	0,1
10	0,9389	2,3857	2,5532	0,03575	4,55716	4,52141	0,1

x	$10^{-10} l_x l_y D_z$	$10^{-10} l_x l_y D_z a_{xyz\overline{5}\rvert}$	$10^{-10} \sum l_x l_y D_z$	a_{xyz}	$10^4 \delta$
90	0,0091213	0,013793	0,013799	1,5128	−50
85	0,56839	1,0370	1,0508	1,8487	12
80	11,7270	26,212	27,263	2,3248	−11
75	89.5040	243,56	270,82	3,0258	−11
70	355,846	1148,9	1419,7	3,9896	− 2
65	936,040	3363,6	4783,3	5,1101	− 1
60	1939,07	7514,3	12297,6	6,3420	1
55	3403,19	13889	26187	7,6948	0
50	5412,55	22798	48985	9,0503	− 2
45	8098,97	34844	83829	10,3506	− 2
40	11604,1	50599	134428	11,5845	− 1
35	16277,2	71546	205974	12,6541	0
30	22375,4	99017	304991	13,6306	0
25	30232,2	134667	439658	14,5427	0
20	40660,2	181284	620942	15,2715	0
15	52620,2	238964	859906	16,3417	0
10	67556,4	305450	1165356	17,2501	0

Table 35.

H^M; $i = 0{,}04$; $x = y = z = u$; a_{xyzu} as calculated by the method shown in article 30.

x	log $s(i, xyz)$ from (65)	log $d(i, xyz : xyzu)$ from (55 a)	log $(s : d)$	$s : d$	$a_{xyz\,\overline{5}\rceil}$ from table 34	$a_{xyzu\,\overline{5}\rceil}$	$10^4\delta$
90	$\bar{1}$,8596	0,5775	$\bar{1}$,2821	0,1914	1,5122	1,3208	45
85	0,1350	0,7187	$\bar{1}$,4163	0,2608	1,8245	1,5637	40
80	0,3503	0,8612	$\bar{1}$,4891	0,3084	2,2352	1,9268	−30
75	0,5400	1,0176	$\bar{1}$,5224	0,3330	2,7212	2,3882	−21
70	0,6832	1,1964	$\bar{1}$,4868	0,3068	3,2287	2,9219	− 6
65	0,7681	1,3531	$\bar{1}$,4150	0,2600	3,5934	3,3334	− 2
60	0,8240	1,5086	$\bar{1}$,3154	0,2067	3,8752	3,6685	1
55	0,8617	1,6588	$\bar{1}$,2029	0,1595	4,0812	3,9217	− 1
50	0,8842	1,7841	$\bar{1}$,1001	0,1259	4,2120	4,0861	− 1
45	0,8989	1,8945	$\bar{1}$,0044	0,1010	4,3023	4,2013	− 1
40	0,9085	1,9825	$\bar{2}$,9260	0,08433	4,36047	4,27614	− 0,2
35	0,9139	2,0448	$\bar{2}$,8691	0,07398	4,39548	4,32150	0,0
30	0,9186	2,1053	$\bar{2}$,8133	0,06506	4,42527	4,36021	0,1
25	0,9231	2,1735	$\bar{2}$,7496	0,05618	4,45442	4,39824	0,1
20	0,9237	2,1840	$\bar{2}$,7397	0,05492	4,45852	4,40360	0,2
15	0,9359	2,4747	$\bar{2}$,4612	0,02892	4,54130	4,51238	0,2
10	0,9338	2,3855	$\bar{2}$,5483	0,03534	4,52141	4,48607	0,1

x	$10^{-15} l_x l_y l_z D_u$	$10^{-15} l_x l_y l_z D_u \, a_{xyzu\,\overline{5}\rceil}$	$10^{-15} \sum l_x l_y l_z D_u$	a_{xyzu}	$10^4\delta$
90	0,00013317	0,00017589	0,00017590	1,3209	45
85	0,030818	0,048190	0,048366	1,5694	40
80	1,63357	3,1476	3,1960	1,9565	−30
75	22,9945	54,915	58,111	2,5272	−23
70	135,663	396,39	454,50	3,3502	−10
65	461,440	1538,2	1992,7	4,3184	− 6
60	1141,45	4187,4	6180,1	5,4143	− 2
55	2263,56	8877,0	15057,1	6,6520	− 2
50	3936,33	16084	31141	7,9112	− 1
45	6310,64	26513	57654	9,1360	− 2

x	$10^{-15} l_x l_y l_z D_u$	$10^{-15} l_x l_y l_z D_u \, a_{xyzu \overline{5}\rceil}$	$10^{-15} \sum l_x l_y l_z D_u$	a_{xyzu}	$10^4 \delta$
40	9548,34	40830	98484	10,3143	− 2
35	14044,1	60692	159176	11,3340	− 1
30	20107,7	87674	246850	12,2764	− 1
25	28134,4	123742	370592	13,1722	− 1
20	39124,5	172289	542881	13,8757	0
15	51685,7	233226	776107	15,0159	0
10	67556,4	303063	1079170	15,9744	− 1

Table 36.

H^M; $i = 0{,}04$; $x = y = z = u = v$; a_{xyzuv} as calculated by the method shown in article 30.

x	log $s(i \,.\, xyzu)$ from (65)	log $d(i, xyzu : xyzuv)$ from (55a)	log $(s : d)$	$s : d$	$a_{xyzu \overline{5}\rceil}$ from table 35	$a_{xyzuv \overline{5}\rceil}$	$10^4 \delta$
90	1,6838	0,5563	1,1275	0,1342	1,3208	1,1866	309
85	1,9330	0,7072	1,2258	0,1682	1,5637	1,3955	94
80	0,1839	0,8577	1,3262	0,2119	1,9268	1,7149	−51
75	0,4173	1,0168	1,4005	0,2515	2,3882	2,1367	−38
70	0,5998	1,1967	1,4031	0,2530	2,9219	2,6689	−14
65	0,7100	1,3534	1,3566	0,2273	3,3334	3,1061	− 6
60	0,7833	1,5090	1,2743	0,1880	3,6685	3,4805	− 1
55	0,8330	1,6590	1,1740	0,1493	3,9217	3,7724	0
50	0,8629	1,7842	1,0787	0,1199	4,0861	3,9662	0
45	0,8823	1,8947	2,9876	0,0972	4,2013	4,1041	− 1
40	0,8951	1,9825	2,9126	0,08177	4,27614	4,19437	0,1
35	0,9022	2,0448	2,8574	0,07201	4,32150	4,24949	0,1
30	0,9085	2,1053	2,8032	0,06356	4,36021	4,29665	0,2
25	0,9144	2,1735	2,7409	0,05507	4,39824	4,34317	0,1
20	0,9152	2,1841	2,7311	0,05384	4,40360	4,34976	0,1
15	0,9314	2,4748	2,4566	0,02862	4,51238	4,48376	0,3
10	0,9286	2,3854	2,5432	0,03493	4,48607	4,45114	0,2

x	$10^{-20} l_x l_y l_z l_u D_v$	$10^{-20} l_x l_y l_z l_u D_v \, a_{xyzuv\overline{5}\rceil}$	$10^{-20} \Sigma l_x l_y l_z l_u D_v$	a_{xyzuv}	$10^4 \delta$
90	0,0000019443	0,0000023071	0,0000023071	1,1866	309
85	0,00167095	0,0023318	0,0023341	1,3969	95
80	0,22756	0,39024	0,39257	1,7251	−50
75	5,90751	12,623	13,016	2,2033	−41
70	51,7200	138,04	151,06	2,9207	−20
65	227,476	706,56	857,62	3,7702	−11
60	671,927	2338,6	3196,2	4,7568	− 4
55	1505,56	5679,6	8875,8	5,8953	− 2
50	2862,74	11354	20230	7,0667	− 2
45	4917,19	20181	40411	8,2183	− 3
40	7856,76	32954	73365	9,3378	− 1
35	12117,4	51493	124858	10,3040	− 1
30	18069,8	77640	202498	11,2064	0
25	26182,1	113713	316211	12,0774	− 1
20	37646,8	163755	479966	12,7492	0
15	50767,8	227631	707597	13,9379	0
10	67556,4	300703	1008300	14,9253	0

32. *Calculation of* a_x^{aa} (*or* N_x^{aa}) *for quinquennial ages.* Putting

$$p_x^{aa} = (1 - q_x^a)(1 - i_x)$$

we have from (46) and (48)

$$\text{(66)} \qquad a^{aa}_{x\overline{5}\rceil} - a^{a}_{x\overline{5}\rceil} = \frac{\dfrac{1}{v}\dfrac{d\, a^{a}_{x\overline{5}\rceil}}{di}}{\dfrac{1}{i_{x+1}} + 1} = -\frac{s^a(i, x)}{d(x^a : x^{aa})},$$

and calculating D_x^{aa} for quinquennial ages we find a_x^{aa} (or N_x^{aa}) for the same ages.

We give below (Table 37) the values of a_x^{aa}, according to O^M, 4 %, and K^I*, where $q_x^a = q_x$ from O^M, and $i_x = \bar{j}_x$ from K^I. Hence $a_x^a = a_x$ etc.

* K^I = Karup, Invaliditätsverhältnisse unter dem Nicht-Fahrpersonal deutscher Eisenbahnen 1877—89 (Reform des Rechnungswesens der Gothaer Lebensversicherungsbank a. G. Tabelle 19).

Table 37.

O^M; $i = 0{,}04$; K^I. Calculation of a_x^{aa} for quinquennial ages.
$N_{70}^{aa} = 1482{,}3$.

x	$\log s\ i, x$	$\log d\ x : x^{aa}$	$\log s\ d$	$a_{x\overline{5}\rvert} - a^{aa}_{x\overline{5}\rvert}$	$a_{x\overline{5}\rvert}$	$a^{aa}_{x\overline{5}\rvert}$	$10^4 \zeta$
65	0,8892	0,9116	1,9776	0,9497	4,2442	3,2945	107
60	0,9083	1,1556	1,7527	0,5658	4,3618	3,7960	23
55	0,9206	1,4661	1,4545	0,2847	4,4395	4,1548	−18
50	0,9284	1,7527	1,1757	0,1498	4,4901	4,3403	− 6
45	0,9334	2,0310	2,9024	0,0799	4,5232	4,4433	− 5
40	0,9368	2,2739	2,6629	0,0460	4,5456	4,4996	− 2
35	0,9392	2,5540	2,3852	0,0243	4,5618	4,5375	0
30	0,9412	2,9106	2,0306	0,0107	4,5751	4,5644	− 3
25	0,9427	3,1488	3,7939	0,0062	4,5856	4,5794	− 1
20	0,9438	3,3668	3,5770	0,0038	4,5930	4,5892	0

x	D_x^{aa}	$D_x^{aa} \cdot a^{aa}_{x\overline{5}\rvert}$	N_x^{aa}	a_x^{aa}	$10^3 \zeta$
65	1671,3	5506,1	6988,4	4,181	11
60	3815,9	14485	21473	5,627	7
55	6484,6	26942	48415	7,466	3
50	9554,9	41471	89886	9,407	1
45	13095	58185	148071	11,307	1
40	1727[illegible]	77717	225788	13,072	0
35	22244	100932	326720	14,688	0
30	28168	128570	455290	16,163	0
25	35321	161749	617039	17,469	0
20	44020	202017	819056	18,606	0

33. *Calculation of S_x for quinquennial ages.* We have

$$(I\,a)_{x\overline{n}\rvert} = \frac{S_x - S_{x+n} - n\,N_{x+n}}{D_x}$$

$$(I\,a)_{\overline{n}\rvert} = \sum_{0}^{n-1} (n+1)v^n,$$

and proceeding as shown in article 27 we find

$$(67) \qquad (I\text{a})_{x\overline{n}|} - (I\text{a})_{\overline{n}|} = \frac{\frac{1}{v}\frac{d\,(I\text{a})_{\overline{n}|}}{d\,i}}{\frac{1}{q_{x+t}} + t} = -\frac{\sigma(i)}{\delta(i,\,1:x)},$$

where

$$\sigma(i) = -\frac{1}{v}\frac{d(I\text{a})_{\overline{n}|}}{d\,i} = \sum_{1}^{n-1} n(n+1)v^n.$$

As in the former cases t is about $= 1$ for $n = 5$.

We give below, according to H^M, an example of the application of the formula (67).

Table 38 gives the values of $\log \delta(i,\,1:x)$ for $n = 5$ as calculated by (67) at $i = 0$, $i = 0{,}04$ and $i = 0{,}06$.

Table 39 gives the values of $(I\text{a})_{\overline{n}|}$ and $\log \sigma(i)$ for $n = 5$ at different rates of interest.

Table 40 shows the calculation of S_x at 5 ½ %, by means of $\delta(i,\,1:x)$ taken at the same rate of interest (interpolated from the values in Table 38). The values of N_x have been taken from Table 19.

34. In preparing the subsidiary tables of the preceding articles, $d\,(i, 1:x)$, $d\,(i, x:1)$, $s\,(i, x)$ etc., we have to calculate, for one or two rates of interest, the financial elements for all ages. It will be convenient in this calculation to use the following elements (for $n = 5$):

$$l_x,\quad v\,l_{x+1},\quad v^2\,l_{x+2},\quad v^3\,l_{x+3},\quad v^4\,l_{x+4};$$
$$l_{x+5},\quad v\,l_{x+6},\quad v^2\,l_{x+7},\quad v^3\,l_{x+8},\quad v^4\,l_{x+9};$$
$$l_{x+10},\quad v\,l_{x+11},\quad v^2\,l_{x+12},\quad v^3\,l_{x+13},\quad v^4\,l_{x+14};$$

etc.

These elements contain only four different multiplicands v, v^2, v^3, v^4, and we then get an easy and rapid calculation, which moreover may be immediately verified: $\Sigma\,v\,l = v\,\Sigma\,l$ etc.

Table 38.

H^M; $\log \delta(i, 1:x)$ for $n = 5$, as calculated by (67).

x	$i = 0$	$i = 0,04$	$i = 0,06$	$10^5 \Delta \log \delta(i, 1:x)$	
10	2,39726	2,39606	2,39547	−120	−59
15	2,46378	2,46496	2,46555	−118	+59
20	2,18253	2,18266	2,18272	13	6
25	2,17237	2,17249	2,17256	12	7
30	2,10423	2,10434	2,10439	11	5
35	2,04286	2,04305	2,04315	19	10
40	1,98158	1,98167	1,98171	9	4
45	1,89131	1,89161	1,89176	30	15
50	1,78160	1,78183	1,78194	23	11
55	1,65534	1,65564	1,65580	30	16
60	1,50470	1,50502	1,50517	32	15
65	1,35098	1,35112	1,35119	14	7
70	1,19366	1,19383	1,19392	17	9
75	1,02238	1,02214	1,02202	− 24	−12
80	0,87677	0,87620	0,87591	− 57	−29
85	0,76502	0,76374	0,76310	−128	−64
90	0,65512	0,65359	0,65283	−153	−76

Table 39.

$(Ia)_{\overline{n|}}$ and $\log \sigma(i) = \log \sum_{1}^{n=1} n(n+1) v^n$ for $n = 5$.

i	$(Ia)_{\overline{5|}}$	$\log \sigma(i)$	i	$(Ia)_{\overline{5|}}$	$\log \sigma(i)$
0,0300	13,87254	1,56049	0,0450	13,35906	1,54027
0,0325	13,78476	1,55709	0,0475	13,27647	1,53693
0,0350	13,69788	1,55371	0,0500	13,19471	1,53361
0,0375	13,61188	1,55033	0,0525	13,11377	1,53029
0,0400	13,52675	1,54697	0,0550	13,03363	1,52699
0,0425	13,44248	1,54361	0,0575	12,95429	1,52369
			0,0600	12,87573	1,52041

Table 40.

H^M; $i = 0{,}055$; S_x as calculated by means of $\delta(i, 1:x)$. N_x and D_x from Table 19.

x	$\log \delta(i, 1:x)$	$\log((Ia)_{\overline{5}\rvert} - (Ia)_{x\overline{5}\rvert})$	$(Ia)_{\overline{5}\rvert} - (Ia)_{x\overline{5}\rvert}$	$(Ia)_{x\overline{5}\rvert}$	$S_x - S_{x+5} - 5N_{x+5}$	$S_x - S_{x+5}$	S_x
90	0,65302	0,87397	7,4811	5,5525	65,481	71,338	72,896
85	0,76326	0,76373	5,8040	7,2296	413,82	570,22	643,12
80	0,87598	0,65101	4,4772	8,5564	1644,54	2658,85	3301,97
75	1,02205	0,50494	3,1984	9,8352	4556,48	8798,03	12100,00
70	1,19390	0,33309	2,1532	10,8804	9776,22	22567,37	34667,37
65	1,35117	0,17582	1,49906	11,53457	17515,07	48102,42	82769,79
60	1,50513	0,02186	1,05162	11,98201	28395,31	90311,21	173081,0
55	1,65576	$\bar{1}$,87123	0,74341	12,29022	43011,1	155170,0	328251,0
50	1,78191	$\bar{1}$,74508	0,55601	12,47762	62402,0	250114,5	578365,5
45	1,89172	$\bar{1}$,63527	0,43179	12,60184	88250,4	385108,4	963473,9
40	1,98170	$\bar{1}$,54529	0,35099	12,68264	122582,0	573377,8	1536851,7
35	2,04312	1,48387	0,30470	12,72893	168605,2	832828,4	2369680,1
30	2,10438	1,42261	0,26461	12,76902	230236,6	1187736,3	3557416,4
25	2,17254	$\bar{1}$,35445	0,22618	12,80745	312549,6	1670174,5	5227590,9
20	2,18271	1,34428	0,22094	12,81269	422542,1	2322900,6	7550491
15	2,46540	$\bar{1}$,06159	0,11524	12,91839	568380,4	3202396	10752887
10	2,39562	$\bar{1}$,13137	0,13532	12,89831	755106,5	4373920	15126807

Über die Verwendung von Mittelwertprocessen in der Bevölkerungsstatistik und in der Zinsrechnung.

Von Dr. **Karl Goldziher** (Budapest).

Im Anschluss an die im Jahre 1916 erschienene Monographie von E. J. GUMBEL: »Die Berechnung des Bevölkerungsstandes durch Interpolation« (Leipzig, Vogel) hat Verfasser dieser Zeilen den formalen Aufbau der für die Praxis einfachsten Interpolationsmethoden der mathematisch-statistischen Behandlung zugeführt;[1] auf dieser Grundlage hat dann GUMBEL die so erhaltenen verallgemeinerten Ansätze bereits auf praktische Fragen der Bevölkerungslehre angewendet.[2] Im Folgenden sollen einige Resultate dieser Untersuchungen mitgeteilt werden, und zwar in Hinblick darauf, dass dieselben bei der Konstruktion von Volkssterbetafeln und bei der Ausarbeitung der Deckungssysteme in der Socialversicherung Verwendung finden können. Die für die Statistik und für die wirtschaftliche Mathematik (z. B. Grundlegung der Zinsfunktionen) so wichtigen Mittelwertoperationen erscheinen erst durch die nähere methodische Bearbeitung in der für die zielbewusste Anwendung notwendigen Beleuchtung. Die mathematische Diskussion der Mittelwert-Interpolationen dünkt uns vom statistischen Gesichtspunkt als wesentlich, wenn auch der Verwaltungsstatistiker für primitivere Zwecke eine kürzere Behandlung der präcisen Auseinandersetzung bevorzugt. Dieser Standpunkt erweist sich als gerechtfertigt, sobald man — wie es z. B. in der Lebensversicherungstechnik

[1] Angedeutet im Allgemeinen Statistischen Archiv X [1917] S. 307—313, zusammenhängend dargestellt und vom wirtschaftlich-mathematischen Gesichtspunkt beleuchtet in einer seit 1916 im Durck befindlichen grössern Abhandlung.

[2] Deutsches Statistisches Centralblatt IX [1917] Sp. 11—22

der Fall ist — nicht nur Abschätzungen im Grossen vornimmt, sondern auf Grundlage des empirischen Materials feinere Berechnungen anstellt, deren numerisches Resultat von der Präcision der Ausgleichungsprocesse abhängt. Hauptziel der folgenden Betrachtung ist die genauere Festlegung der in der Verwaltungsstatistik üblichen rohen Interpolationsansätze, um auf diesem Wege solche Formeln zu gewinnen, die den Erfahrungen besser angepasst werden können und die es weiterhin ermöglichen, dass die Berechnung der auf den Interpolationsprocess beruhenden wichtigern Masszahlen (z. B. verlebte Zeit, Vermehrungsintensität, Fixirung partieller Bevölkerungsmassen, etc.) einer mathematischen Kritik unterworfen werden können.[1]

1. *Das Interpolationsproblem:* Die primitivste Interpolation zwischen den zwei Rahmendaten P_0 und P_1 des Zählungsintervalles $0\ldots1$ liefert die lineare Formel:

$$P(x) = P_0 + x(P_1 - P_0) = (1-x)P_0 + xP_1$$

In der zweiten Form wird ein *gewogener arithmetischer Mittelwert* der Rahmendaten (Nenner: Summe der Gewichte $= 1$) definirt. Unser Grundgedanke ist, dass wir nicht den Funktionscharakter, sondern den Mittelwertcharakter dieses rohen Ansatzes verallgemeinern und zwar in der Weise, dass seine statistisch wesentlichen Merkmale erhalten bleiben und durch Einführung eines empirisch bestimmbaren Parameters die starre Willkür eines solchen hypothetischen Ansatzes bezwungen wird.

Es ergiebt sich, dass zur Weiterbildung des Processes die folgenden beiden Eigenschaften der arithmetischen Interpolationsformel die wertvollsten sind und als Postulate der allgemeinen Konstruktion zu Grunde gelegt werden können:

a) Der zu verwendende Mittelwert besitze den *associativen* Charakter, d. h. es soll durch Mittelwert-Interpolation zwischen beliebigen partiellen Mittelwerten des Intervalles, jeden *mit*

[1] Im Gumbel'schen Werk sind auch die komplicirteren Methoden der Interpolation des Bevölkerungsstandes systematisch zusammengestellt; wir verweisen besonders auf das statistisch weitgehendste Snow'sche Verfahren, welches statt formal-hypothetischer Ansätze die multiple Korrelation von Bevölkerungsbewegungen zür Berechnung des Bevölkerungsstandes verwertet.

der Summe seiner komponenten Gewichte gewogen, die Interpolationskurve aus den Rahmendaten reproducirt werden. Diesen Charakter besitzen nur diejenigen Mittelwerte, deren Bestimmungsformel in dem Argument der Interpolation linear anamorphisirbar ist; es wird also eine für statistische Zwecke speciell interessirende Mittelwertsklasse durch das Postulat a.) abgegrenzt. Der Kern der Forderung besteht darin, dass hierdurch die Interpolationskurve mit den ursprünglichen Rahmendaten in einfachster Weise *eindeutig* bestimmt wird, und somit von den möglichen Zergliederungen des Intervalles unabhängig ist.

b.) Bei Erhaltung der Rahmendaten soll die aus der Formel entspringende Centralbevölkerung dem *einfachen* Mittel aus den Rahmendaten gleich sein.

Die simultane Verbindung der beiden Postulate sichert einen formal einfachsten Interpolationsprocess, der durch fortgesetzte Intervallhalbierung in eindeutiger Weise festgelegt werden kann. Die Verallgemeinerung des arithmetischen (und gleichzeitig des sonst üblichen geometrischen) Mittelwertansatzes geschieht nun dadurch, dass wir das *allgemeine associative Potenzmittel* zum Ausgang wählen und somit einen frei verfügbaren Parameter (k) einführen. Dieser Mittelwert ist in allgemeiner Form angeschrieben:

$$M = \sqrt[k]{\frac{g_1 a_1^k + g_2 a_2^k + \cdots + g_n a_n^k}{g_1 + g_2 + \cdots + g_n}}$$

(a_i: Elemente, g_i: Gewichte, positiv und von 0 verschieden).

Aus der Lehre dieser Mittelwerte ist bekannt, dass

A.) für $k = 1$ der arithmetische, für $k \to 0$ der geometrische,[1] für $k = -1$ der harmonische Mittelwert als Specialfall resultirt;

B.) es gilt das Lagengesetz:[2]

$$\left(\frac{\sum_{(i)} g_i a_i^k}{\sum_{(i)} g_i}\right)^{\frac{1}{k}} < \left(\frac{\sum_{(i)} g_i a_i^{k+1}}{\sum_{(i)} g_i}\right)^{\frac{1}{k+1}}$$

---

[1] Die einfachste Ableitung erfolgt in der Weise, dass man den Logarithmus des Ausdruckes für $k \to 0$ nach der l'Hôpital'schen Regel behandelt.

[2] Ein specieller Fall der Cauchy Hölder'schen Ungleichung.

Für unsern Fall angewendet: Das Postulat b) führt zur Funktionalgleichung

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt[k]{\frac{[f(x)]^k + [f(y)]^k}{2}}$$: für jedes Argumentpaar des Intervalles (Postulat a)

und zu den Nebenbedingungen:

$$f(0) = P_0 \text{ und } f(1) = P_1.$$

Mit der Transformation

$$[f(x)]^k = \varphi(x)$$

übergeht die Funktionalgleichung in die folgende lineare:

$$2\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

deren allgemeine stetige Lösung — bei Annahme einer beschränkten Funktion — die folgende ist:

$$\varphi(x) = ax + b, \text{ also } f(x) = \sqrt[k]{ax + b}.$$

Mit den Nebenbedingungen erhalten wir dann die Interpolationsformel

$$f(x) = \sqrt[k]{(P_1^k - P_0^k)\,x + P_0^k} = \sqrt[k]{(1-x)\,P_0^k + x\,P_1^k} = P(x)$$

also für $P(x)$ einen gewogenen Potenzmittelwert. Führen wir den Vermehrungsfaktor $r = \frac{P_1}{P_0}$ ein, so wird:

$$P(x) = P_0 \sqrt[k]{1 + x(r^k - 1)}.$$

Specielle Fälle:

$k = 1$: arithmetische Interpolation:

$$P_a(x) = P_0[1 + x(r - 1)] = (1 - x) P_0 + x P_1,$$

$k \to 0$: geometrische Interpolation: $P_g(x) = P_0 r^x = P_0^{1-x} P_1^x$,[1]

$k = -1$: harmonische Interpolation:

$$P_h(x) = P_0 \frac{r}{x + (1 - x) r} = \frac{P_0 P_1}{x P_0 + (1 - x) P_1}.$$

In Folge des Lagengesetzes gilt für den Fall der Interpolation $(x < 1)$:

$$P_h(x) < P_g(x) < P_a(x)$$

(analog für die entsprechenden verlebten Zeiten des Intervalles). Für den Fall der Extrapolation $(|x| > 1)$ kehrt sich der Sinn dieser Ungleichungen.

Mit der angeführten Mittelwertinterpolation können nur monotone Zweige der Bevölkerungsfunktion behandelt werden. Der grosse praktische Vorteil des allgemeinen Ansatzes besteht in der Verfügbarkeit über den Parameter k, wodurch der Process verfeinert werden kann, indem ausser P_0 und P_1 weitere empirische Daten bei der Berechnung mitberücksichtigt werden können. Zur Bestimmung eines entsprechenden Parameterwertes sind drei empirische Daten notwendig; ist z. B. $P_{\frac{1}{2}}$ durch direkte Zählung oder Abschätzung bekannt, so wird k durch das Postulat der Erhaltung der Centralbevölkerung mitbestimmt. Man kann den Anschluss an das benachbarte Intervall sichern, indem man k so bestimmt, dass P_{-1}, P_0, P_1 erhalten bleiben. Will man ein Intervall mit einer längeren Reihe von Zählungsdaten berücksichtigen, so ist am zweckmässigsten, dass man zu den festzuhaltenden Rahmendaten als drittes Element den gewogenen Schwerpunkt des Systemes wählt. Zur Orientirung kann auch ein Parameter-Mittelwert aus mehreren Intervallen herangezogen werden. Jedenfalls ist die richtige Abgrenzung der zu verwendenden Intervalle von praktischer Wichtigkeit; bei einer grössern Reihe von Zählungsdaten kann eventuell eine vorangehende

[1] Die einfachste Ableitung erfolgt in der Weise, dass man den Logarithmus des Ausdruckes für $k \to 0$ nach der L'Hôpital'schen Regel behandelt.

schwache mechanisch-graphische Ausgleichung (glättend und reprodcirend) erfolgen. Hat man drei Daten fixirt: P_1, P_2 und P_3, zwischen denen die Interpolationsformel besteht:

$$P_2^k = (1 - \tau) P_1^k + \tau P_3^k$$

so erhält man für k eine transcendente Gleichung. Mit

$$\frac{P_1}{P_2} = a \text{ und } \frac{P_3}{P_2} = b$$

schreiben wir diese Gleichung in der Form:

$$(1 - \tau) a^k + \tau b^k = 1 .$$

Ausser leicht entwickelbaren approximirenden Lösungsverfahren, kann die folgende Methode am raschesten zum Ziele führen. Man setzt:

$$\left.\begin{aligned} (1 - \tau) a^k &= \sin^2 \vartheta \\ \tau b^k &= \cos^2 \vartheta \end{aligned}\right\}$$

so dass:

$$\left.\begin{aligned} \log (1 - \tau) + k \log a &= 2 \log \sin \vartheta \\ \log \tau + k \log b &= 2 \log \cos \vartheta \end{aligned}\right\}$$

also

$$\frac{\log a}{\log b} = \frac{2 \log \sin \vartheta - \log (1 - \tau)}{2 \log \cos \vartheta - \log \tau} .$$

Mit Hilfe einer kleinen logarithmisch-trigonometrischen Tabelle kann aus der letzten Gleichung durch einfaches Probiren ein Näherungswert für ϑ bestimmt werden, der dann mit einer grösseren Tabelle und weiterer Interpolation verfeinert wird. Das zweite System ergiebt zwei Werte für k, die zur gegenseitigen Korrektion zu gebrauchen sind (Auf dieses einfache Verfahren hat mich Herr Dr. E. Sós aufmerksam gemacht).

Einfacher noch verfährt Gumbel bei der praktischen Ausnutzung meiner Formeln. Durch eine recht zufriedenstellende stufenweise Abschätzung von k erhält er, dass bei Betrachtung aller zwischenliegenden Volkszählungsdaten

für die Bevölkerung Deutschlands 1875—1910: $k = -1$

» » der Schweiz 1860—1910: $k = -3$

die beste Anpassung ergiebt.

Berechnet man aus je drei aufeinanderfolgenden Zählungsdaten das k, so erhält man für eine längere Zählungsreihe eine Folge der k-Werte, welche zur numerischen Charakterisirung der Bevölkerungsentwickelung dienen kann. (Extremal- oder Inflexionstendenzen der Bevölkerungsfunktion können mit diesen analytischen Processen nicht erfasst werden). Die Interpolationskurve eines Intervalles ist für $k > 1$ konkav, für $k < 1$ konvex (s. GUMBEL); der Vergleich der einzelnen Kurvenzüge folgt aus dem Lagengesetz.[1]

Für die von der Bevölkerung im Zählungsintervall $r_1 \ldots r_2$ verlebte Zeit (durchschnittliche Bevölkerungsziffer) erhält man:

---

[1] Ein genauer Vergleich zweier Interpolationskurven erfolgt durch die Betrachtung des Verlaufes der Differenzen oder der Quotienten entsprechender Werte, als Funktionen des Intervallargumentes. Man erhält für den Quotienten, dass für zwei verschiedene Parameter k und l der Quotient für das Intervallargument

$$\tau = \frac{l(r^k - 1) - k(r^l - 1)}{(k - l)(r^k - 1)(r^l - 1)}$$

sein Maximum hat. Dieser Wert ist nur im Falle $k = -l$ von r unabhängig (z. B. arithmethische und harmonische Interpolation) und zwar ist dann $\tau = \frac{1}{2}$, der Maximalwert: $\frac{\frac{(r^k + 1)^2}{k}}{4\sqrt{r}}$ und die Quotienwerte lagern symmetrisch um diesen Maximalwert.

Man erhält ferner: Der Quotient

a) der arithmetisch und der geometrisch interpolirten Werte hat an der Stelle $\tau = \frac{1}{\log r} - \frac{1}{r - 1}$.

b) der geometrisch und der harmonisch interpolirten Werte hat an der Stelle $\tau = -\frac{1}{\log r} + \frac{r}{r - 1}$

sein Maximum; die Abscissenwerte liegen für $r = 1{,}04$ dem $\tau = \frac{1}{2}$ am nächsten.

$$P(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} P(\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{k P_0}{(k+1)(r^k - 1)(\tau_2 - \tau_1)} \left[(1 + \tau_2 (r^k - 1))^{\frac{k+1}{k}} - (1 + \tau_1 (r^k - 1))^{\frac{k+1}{k}} \right].$$

Specielle Formeln:

$$P(0, 1) = \frac{k P_0}{k+1} \frac{r^{k+1} - 1}{r^k - 1}$$

$P_a(0, 1) = P_0 \frac{r+1}{2} = \frac{P_0 + P_1}{2}$, (unabhängig von r, ein Nachteil des arithmetischen Processes)

$$P_g(0, 1) = P_0 \frac{r - 1}{\log \mathrm{nat}\, r}$$

$$P_h(0, 1) = P_0 \frac{r \log \mathrm{nat}\, r}{r - 1}.$$

Die nähere Untersuchung der speciellen Mittelwertinterpolationsformeln führt zu statistisch bemerkenswerten speciellen Eigenschaften, die im gegebenen Fall für die Verwendung eines bestimmten Processes massgebend sein können. Auch könnte man schon bei der Grundlegung selbst das eine oder das andere dieser Merkmale (eventuell mit Weglassung einer der obigen Forderungen) als Postulat mitberücksichtigen; es zeigt sich jedoch, dass hiermit die Theorie komplizirter und die Anwendung von sehr beschränktem Umfang wird. In dieser Arbeit wollen wir nur an einige in der Literatur oft besprochene Detailfragen herantreten, um diese in Beziehung mit unserer theoretischen Grundlegung in neuer Beleuchtung erscheinen zu lassen.

Die arithmetische Interpolation — und wie mit der Methode der Funktionalgleichungen leicht zu beweisen ist, von den Potenzmittelprocessen nur diese — besitzt die folgende Eigenschaft (*additiv distributive Eigenschaft*): Bezeichnet P die Gesamtbevölkerung und P_ν eine Teilbevölkerung, so ist:

$$\sum_{\nu=1}^{n} P_\nu(t) = P(t) \text{ und } \sum_{\nu=1}^{n} P_\nu(0,1) = P(0,1).$$

In statistischer Formulirung: es ist eine Korrektion zur übereinstimmenden Berechnung von Teilbevölkerungen nicht notwendig. (Diese Eigenschaft besitzen solche Formeln, in denen die Rahmendaten linear und homogen eintreten, mit anderen Werten: die in r linear anamorphisirbar sind). Wir erhalten also das Ergebniss, dass bei allen andern hier betrachteten Processen nur durch Korrektionsmethoden eine solche Übereinstimmung zu erwirken ist (über verschiedene Ansätze dieser Art s. das II. Kap. § 6 der GUMBEL'schen Monographie). Jedenfalls verdient nun auch eine solche Methode in vielen praktischen Fällen den Vorzug, bei welcher die wichtigsten Korrektionsverfahren für die verlebte Zeit besonders einfache, geschlossene Ausdrücke liefern. Betrachten wir die sogenannte Registrar General's method (s. GUMBEL, S. 44—46), so nimmt die harmonische Interpolation eine ganz wesentliche Stellung ein. Wir haben bei Ausnutzung der additiven Eigenschaft der arithmetischen Operation zwischen zwei additiven Ansätzen die Wahl: (es bezeichne $\overline{P}_\nu$ die korrigirte Teilbevölkerung)

a) komplizirter indirekter Ansatz:

$$\overline{P}_\nu(t) = [P_\nu(0) + t(P_\nu(1) - P_\nu(0))] \cdot \frac{\text{mit dem betreff. Mittelwert interpolirte Gesamtbevölkerung}}{\text{arithmetisch interpolirte Gesamtbevölkerung}}$$

und dann ist

$$\overline{P}_\nu(0,1) = \int_0^1 \overline{P}_\nu(t)\, dt,$$

b) einfacher direkter Ansatz:

$$\overline{P}_\nu(0,1) = \frac{P_\nu(0) + P_\nu(1)}{2} \cdot \frac{\text{mit dem betreff. Mittelwert berechnete verlebte Zeit der Gesamtbevölkerung}}{\text{arithmetisch berechnete verlebte Zeit der Gesamtbevölkerung}}.$$

Die harmonische Interpolation hat die Eigenschaft, dass für sie die beiden angeführten Ansätze übereinstimmende Werte für die verlebte Zeit ergeben. Der Beweis dieser Thatsache erfolgt durch eine einfache Rechnung; der durch den indirekten Ansatz angeschriebene Ausdruck für die korrigirte verlebte Zeit der Teilbevölkerung enthält Integrationen, welche mittels Zerlegung in Partialbrüche auszuführen sind. So erhält man für den indirekten Ansatz der harmonischen Interpolation:

$$\overline{P}_{\nu}(0,1) = \frac{P_{\nu}(0) + P_{\nu}(1)}{2} \cdot \frac{2r \operatorname{lognat} r}{r^2 - 1}$$

und dieser Wert stimmt mit dem auf direktem Wege berechneten überein, da der zweite Faktor das Verhältnis der harmonischen zur arithmetischen verlebten Zeit der Gesamtbevölkerung darstellt. Die eingehendere Analyse ergiebt, dass unter den zu betrachtenden Potenzmittelprocessen diese erweiterte additive Eigenschaft *nur* der harmonischen Interpolation zukommt.

Zum Schluss sei auf eine Eigenschaft der geometrischen Interpolation kurz hingewiesen. Durch die neueren Arbeiten von Bortkiewicz (besonders s. Zeitschrift für die gesamte Versicherungs-Wissenschaft XVI [1916] S. 692—718) ist die auch in der Mathematik der Socialversicherung wichtige Frage: wie das Tempo der Bevölkerungsvermehrung zahlenmässig zu erfassen ist, unabhängig von dem Interpolationsprocess aus zwei Rahmendaten erledigt worden. So tritt also die Verwendung der sog. Verdopplungszeit resp. der Halbwertzeit bei diesem Problem in den Hintergrund. Wir wollen trotzdem auf diese Frage zurückkommen, da in der Literatur diesbezüglich konträre Anschauungen wahrzunehmen sind. Die Berechnung dieser beiden hypothetischen Masszahlen hängt vom Interpolationsansatz ab und sie können zur Beurteilung des Tempos nur dann herangezogen werden, wenn ihr Wert von der Wahl des Ausgangspunktes unabhängig ist. Es ist leicht zu beweisen, dass eine solche Unabhängigkeit bei den Potenzmitteln nur im Falle der geometrischen Interpolation zutrifft (in diesem Umstand ist auch

die sonstige Verwendung einer geometrischen Vermehrungsrate für unser Problem begründet).

Die Definitionen sind die folgenden:

$$\left.\begin{array}{r} \text{Verdopplungszeit } (D)\colon\ P(t+D) = 2\,P(t) \\ \text{Halbwertzeit } (H)\colon\ P(t+H) = \frac{1}{2}\,P(t) \end{array}\right|\ t\colon \text{ Ausgangspunkt.}$$

Für die allgemeine Potenzmittelinterpolation erhält man nun nach ausgeführter Rechnung:

$$D = \frac{2^k - 1}{r^k - 1} + t\,(2^k - 1),$$

$$H = -\frac{1}{2^k}\left(\frac{2^k - 1}{r^k - 1} + t\,(2^k - 1)\right).$$

Diese sind in der That nur für $k \to 0$ vom Ausgangspunkt t unabhängig.

In der citirten Abhandlung von Gumbel findet man eine weitergehende Analyse der hier zu besprechenden Fragen; in der zusammenfassenden Arbeit des Verfassers werden mehrere formale Beziehungen der D und H-Werte angegeben. Mit dem Tempo der Bevölkerungsvermehrung können aber alle diese Ergebnisse nur dann in Beziehung gebracht werden, wenn die Wahl eines $k \to 0$ als berechtigt erscheint.

Es kann nun noch die ganz allgemeine Frage gestellt werden, welche die allgemeine Form der Funktionen ist, für die aus der Forderung

$$f(x + D) = 2\,f(x)$$

ein solcher Wert der Verdopplungszeit D resultirt, der von x unabhängig ist (analog für die Definitionsgleichung der Halbwertzeit). Zur Lösung dieser Funktionalgleichung sei eingeführt

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{a^x}.$$

Dann ist

$$\varphi(x + D) = \frac{f(x + D)}{a^{x+D}} = \frac{2\,f(x)}{a^x\,a^D} = \frac{2\,\varphi(x)}{a^D}.$$

Es muss also, damit die unabhängige Bestimmung für ein festes D möglich sei, die folgende Beziehung bestehen:

$$\varphi(x+D) = \varphi(x)$$

d. h. $\varphi(x)$ eine periodische Funktion mit der Periode D sein. Es ist somit

$$a^{\frac{2}{D}} = 1$$

und resumirend:

$$f(x) = 2^{\frac{x}{D}} \varphi(x).$$

Die geometrische Interpolationsfunktion ist ein Entartungsfall dieser allgemeinen Funktionsklasse; für sie ist nämlich $\varphi(x) = \text{const.}$ und $\frac{f(x+t)}{f(x)}$ nicht nur für ein specielles t, sondern für jedes beliebige t von x unabhängig.

(Man erhält für $k \to 0$: $D = \frac{\log \text{nat} 2}{\log \text{nat} r}$ und $H = -\frac{\log \text{nat} 2}{\log \text{nat} r}$).

2. *Das Extrapolationsproblem:* Die für das Interpolationsproblem — ihres associativen Verhaltens wegen — brauchbaren Potenzmittel sind für längere vorwärtige Extrapolationen nicht zweckmässig, da die entsprechenden Kurven ins Unendliche laufen. Man müsste an die Formeln eine Korrektur anbringen,[1] oder man muss solche Mittelwerte konstruiren, die für ein unendliches Argument endliche Werte annehmen. Dieser letzte Weg ist der einfachere und es ist — wie GUMBEL richtig bemerkte — für den in der Praxis wichtigsten Fall der vorwärtigen Extrapolation nicht notwendig, dass der zu gebrauchende Mittelwert die associative Eigenschaft besitze.[2] So haben wir dann vorgeschlagen den folgenden, allgemein nicht associativen Potenzmittelwert zu verwenden:

---

[1] Eine solche Methode ist von *Verhulst* angegeben worden, s. hierüber die Arbeit von GUMBEL im Allgemeinen Statistischen Archiv, X [1916] S. 644—652. Über ähnliche Versuche für die Zinseszinsformel s. das weiter unten citirte Werk BARRIOL's S. 101—106.

[2] Für kürzere Extrapolationen reichen die Processe des vorigen Abschnittes aus.

$$M = \frac{g_1 a_1^{k+1} + g_2 a_2^{k+1} + \cdots + g_n a_n^{k+1}}{g_1 a_1^k + g_2 a_2^k + \cdots + g_n a_n^k}.$$

Dieser enthält für $k = 0$ den arithmetischen und für $k = -1$ den harmonischen Mittelwert und liefert für $k = 1$ den in der statistischen Praxis bekannten antiharmonischen Mittelwert. Auch für diese Mittelwerte besteht ein einfaches Lagengesetz. Die entsprechende Extrapolationsformel aus zwei Rahmendaten lautet:

$$P(x) = \frac{(1-x) P_0^{k+1} + x P_1^{k+1}}{(1-x) P_0^k + x P_1^k} = P_0 \frac{1 + x(r^{k+1} - 1)}{1 + x(r^k - 1)}.$$

Für $k \neq 0, -1$ erhält man für $P(\infty)$ endliche Werte, indem

$$P(\infty) = P_0 \frac{r^{k+1} - 1}{r^k - 1}.$$

So ist für vorwärtige Extrapolation die antiharmonische Formel:

$$P(x) = P_0 \frac{1 + x(r^2 - 1)}{1 + x(r - 1)}$$

der einfachste Ansatz. Über die nähere Anwendung verweisen wir auf die Abhandlung von GUMBEL.

Der angeführte Mittelwertprocess besitzt die folgenden, statistisch wichtigen Eigenschaften: Es ist

$$P_{\frac{1}{2}} = \frac{P_0^{k+1} + P_1^{k+1}}{P_0^k + P_1^k}$$: einfacher Mittelwert, eine Folge der Gewichtsbestimmung.

$$P(t_1, t_2) = \frac{P_0}{(t_2 - t_1)(r^k - 1)^2}\left[(r^k - 1)(r^{k+1} - 1)(t_2 - t_1) - r^k (r - 1) \log \operatorname{nat} \frac{1 + (r^k - 1) t_2}{1 + (r^k - 1) t_1}\right],$$

$$P(0, 1) = P_0 \frac{(r^k - 1)(r^{k+1} - 1) - k r^k (r - 1) \log \operatorname{nat} r}{(r^k - 1)^2}.$$

Eine nähere Untersuchung ergiebt, dass die Übertragung des als indirekte Registrar General's method bezeichneten Korrek-

tionsverfahrens geschlossene Ausdrücke liefert, hingegen im Kreise der früher behandelten Potenzmittel dies allgemein nicht der Fall ist (z. B. bereits bei der geometrischen Interpolation). Die numerische Behandlung ist einfacher, als im frühern Fall; bei drei Zählungsdaten P_1, P_2 und P_3 erhalten wir mit den bereits eingeführten Bezeichnungen die folgende Gleichung:

$$(a-1)(1-\tau)\,a^k + (b-1)\,\tau\,b^k = 0$$

aus der in expliciter Form:

$$k = \frac{\log(b-1) - \log(1-a) + \log\tau - \log(1-\tau)}{\log a - \log b}.$$

3. *Die Theorie der Vermehrungsfunktion und der Zuwachsfunktion.* Im Folgenden soll eine axiomatische Grundlegung der geometrischen, beziehungsweise der arithmetischen Interpolationsprocesse versucht und dann auf weitere mögliche Verallgemeinerungen dieses Mittelwertverfahren hingewiesen werden. Diese Betrachtung führt zu charakteristischen Funktionalgleichungen der wirtschaftlichen Mathematik und vervollständigt zugleich den theoretischen Hintergrund der Zinsrechnung. Praktische Verwendung finden die hier folgenden Ansätze bei einer *Ausgleichung* mit Hilfe von statistischen Mittelwerten, wenn mehr als zwei Rahmendaten zu berücksichtigen sind.

Die Interpolation aus zwei Rahmendaten wurde im Vorangehenden auf die einschränkende Annahme eines festen Vermehrungsfaktors $\left(r = \frac{P_1}{P_0}\right)$ des Zählungsintervalles gegründet. Wir verallgemeinern diese Auffassungsweise, wenn wir durch Intervallspaltung eine Reihe: $r_1, r_2, \ldots, r_n$ dieser Faktoren einführen, d. h. den Vermehrungsfaktor als variables Argument einer für das Intervall zu definirenden *Vermehrungsfunktion* betrachten. Die Konstruktion dieser Funktion soll auf Grundlage statistisch (oder wirtschaftlich) wesentlicher Postulate in der Weise erfolgen, dass ein *eindeutiger* Vermehrungsprocess resultire. Wir wollen zuerst den geometrischen Vermehrungsansatz analysiren; eine ähnliche

Behandlung ergiebt für den arithmetischen Fall die Festlegung der *Zuwachsfunktion.*

Die Vermehrungsfunktion soll den Anfangsbestand (P_0), die Zeitdauer seit der letzten Zählung (t) und den Vermehrungsfaktor (r) zu unabhängigen Veränderlichen haben. Die zur Konstruktion heranzuziehenden Postulate seien die folgenden:[1]

a) Bei konstantem t und r sei die Vermehrungsfunktion in Bezug auf P_0 additiv distributiv, d. h. von der Spaltungsweise der Gesamtanfangsbevölkerung unabhängig. Bei Annahme einer beschränkten Funktion ergiebt die Funktionalgleichung:

$$f(P'_0) + f(P''_0) + \cdots + f(P_0^{(n)}) = f(P'_0 + P''_0 + \cdots + P_0^{(n)})$$

als eindeutige stetige Lösung

$$f(P_0) = a\,P_0$$

d. h. die Vermehrungsfunktion enthält P_0 als linearen Faktor.

b) In Bezug auf die partiellen Zeitintervalle t_i mit constantem Vermehrungsfaktor r_i besitze die Vermehrungsfunktion einen für t multiplikativ distributiven Charakter;[2] die distributive Eigenschaft sichert die Unabhängigkeit von der Zerspaltungsweise des gegebenen Gesamtintervalles.

c) Die Vermehrungsfunktion erhalte für das Gesamtintervall gewisse associative (d. h. von der Spaltungsweise des

[1] Erklärung der zu gebrauchenden Terminologie: Die Funktion $f(x)$ ist in Bezug auf x *distributiv*, wenn man eine Funktionalverbindung F finden kann, so dass

$$F(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)) = f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

Der Process ist

in *additiver Weise distributiv*, falls $F \equiv \Sigma f(x_i)$.

in *multiplikativer Weise distributiv*, falls $F \equiv \Pi f(x_i)$.

[2] Die multiplikativ distributive Eigenschaft des Vermehrungsprocesses bei einer nach der Zeit stetigen (resp. einer endlichen und eine endliche Anzahl von gewöhnlichen Unstetigkeitsstellen aufweisenden) Vermehrungsintensität wird präcis behandelt in CANTELLI: Genesi e costruzione delle tavole di mutalità, Bolletino di Notizie sul credito e sulla providenza, 1914, No. 3. (pp. 14–16).

Intervalles unabhängige) Mittelwerte des variabeln Vermehrungsfaktors.

Wir wählen nun die allgemeinen associativen Potenzmittel und zwar so, dass wir einem jeden r_i als Gewicht das zugehörige t_i zuordnen; diese Gewichtsbestimmung bringt die Postulate b) und c) in Einklang.

Für einen konstanten Anfangsbestand wird dann der Inhalt der beiden letzten Forderungen durch die folgende Funktionalgleichung ausgedrückt:

$$f(t_1, r_1)\, f(t_2, r_2) \ldots f(t_n, r_n) =$$
$$= f\left(t_1 + t_2 + \cdots + t_n,\ \sqrt[k]{\frac{t_1 r_1^k + t_2 r_2^k + \cdots + t_n r_n^k}{t_1 + t_2 + \cdots + t_n}}\right).$$

In Folge der distributiven und der associativen Beziehung genügt es diese Funktionalgleichung mit zwei Argumenten nur für den Fall von zwei Komponenten zu behandeln; bei der stufenweisen Lösung treten die einfachsten Formen auf, die alle auf den Cauchy'schen Typus zurückzuführen sind. Als Endresultat erhält man, wenn noch a) mitberücksichtigt wird, dass die Vermehrungsfunktion die folgende Form besitzt:

$$f(P_0, t, r) = a\, P_0\, e^{(b\, r^k + c)\, t}$$

Mit der Anfangsbedingung

$$f(P_0, 0, 0) = P_0$$

erfolgt, dass $a = 1$.

In Hinblick auf das statistische Vermehrungsproblem modificiren wir den obigen Gedankengang, indem wir eine kontinuirliche Bevölkerungsbewegung supponirend die Forderung c) statt für die Vermehrungsfaktoren, für die Vermehrungsintensitäten

$$\varrho_i = \log \text{nat}\, r_i$$

aussprechen. Wir erhalten dann in gleicher Weise:

$$f(P_0, t, \varrho) = P_0\, e^{(b\, \varrho^k + c)\, t}.$$

Es wird hierdurch in der That ein eindeutiger allgemeiner geometrischer Vermehrungsprocess definirt, indem für eine gegebene Vermehrungsart

$$d\, f(P_0, t, \varrho) = f(P_0, t, \varrho)\,(b\,\varrho^k + c)\,d\,t$$

also der infinitesimale Zuwachs dem jeweiligen Stand proportional ist.

Die auf der rechten Seite auftretenden r und ϱ fixiren theoretische, von der Intervallspaltung unabhängige Werte, die wir als *den normalen Vermehrungsfaktor* bzw. als *die normale Vermehrungsintensität* bezeichnen wollen. Dieselben sind mit den gewogenen associativen Potenzmitteln gegeben, die auf Grund einer beliebigen Spaltung des Gesamtintervalles aus den partiellen r_i bzw. ϱ_i entstehen.

Der in der Bevölkerungsstatistik üblichen geometrischen Interpolation aus den Rahmendaten P_0 und P_1 entspricht die *specielle* Annahme $k = 1$ für die Funktionalform mit ϱ, es muss nur noch die weitere Anfangsbedingung

$$f(P_0, 1, \varrho) = P_1 = P_0\,e^{\varrho}$$

hinzugefügt werden. Aus dieser Bedingung folgt, dass

$$c = 0 \text{ und } b = 1$$

und wir erhalten

$$P(\tau) = f(P_0, \tau, r) = P_0\,e^{\varrho\,\tau} = P_0\,r^{\tau}\,.$$

Der allgemeine Ansatz führt also auf eine Weiterbildung des gewöhnlichen geometrischen Processes hin. Die übliche geometrische Interpolationsformel ist somit durch die folgenden Merkmale ausgezeichnet: Die Vermehrungsfunktion ist in Bezug auf P_0 in additiver, in Bezug auf t in multiplikativer Weise distributiv und erhält für das Gesamtintervall den gewogenen arithmetischen Mittelwert der partiellen Vermehrungsintensitäten (d. h. den gewogenen geometrischen Mittelwert der partiellen Vermehrungsfaktoren).[1]

[1] Dieses Resultat kan indirekt verificirt werden: für den Fall der Zinsfunktion s. diese indirekte Behandlungsweise bei Broggi: Versicherungsmathematik (Leipzig, Teubner, 1911) S. 167 und bei Boggio: Sull' interesse continuo a tasso variabile e sulle assicurazioni (Torino, Bona, 1906) S. 7.

Die entwickelte Betrachtung kann wortwörtlich übertragen werden auf die allgemeine Begründung der Kapitalsvermehrung langfristiger Anlagen. Wir führen eine *Zinsfunktion* ein und legen deren formale Abhängigkeit vom Anfangskapital, von der Zeitdauer und von dem variabeln Zinsfaktor $\left(r = 1 + \frac{P}{100} = 1 + p\right)$ durch wirtschaftliche Voraussetzungen fest. Die zu gebrauchenden Forderungen sind mit den obigen identisch und können auf Grund einer näheren Analyse der Interessenwahrung des Schuldners und des Gläubigers angepasst werden.[1] Man hat das Resultat, dass der Effekt der Kapitalsvermehrung für eine längere Periode mit variabeln Zinsfaktoren statistisch so aufzufassen ist, dass der gewogene geometrische Mittelwert der Zinsfaktoren (bzw. bei Annahme einer kontinuirlichen Kapitalisirung der gewogene arithmetische Mittelwert der Verzinsungsintensitäten) erhalten bleibt. Die Methode der Funktionalgleichungen wurde bisher für dieses Problem nur in Bezug auf das Anfangskapital und auf die Zeitdauer verwertet (z. B. in Arbeiten von Lewin, Laurent, etc). Es muss aber hervorgehoben werden, dass diese Behandlungsweise erst dann einen rechten Inhalt besitzt, wenn die Abhängigkeit vom variabeln Zinssatz mit untersucht wird; dieses Moment ist bisher unberücksichtigt geblieben. Wir können das Resultat so formuliren: Hat man eine auf die Stabilität geprüfte längere Reihe von zeitlich variabeln Verzinsungsfaktoren, so ist bei normalen Verhältnissen der im obigen Sinne gewogene geometrische Mittelwert dieser Faktoren als ein theoretisch entsprechender Orientirungswert für zukünftige langfristige Geschäfte (z. B. in der Mathematik der Lebensversicherung) anzusehen. Der so definirte *normale* Zinsfuss ist also ein Mittelwert; für einzelne Anlagearten kann dann dieser theoretische Wert noch

---

[1] Die wirtschaftsmathematische Auseinandersetzung der hier nur skizzirten Fragestellungen haben wir in einer in der ungarischen Zeitschrift Közgazdasági Szemle (Bd. XXXIX [1915] S. 461—475) erschienen en Arbeit mitgeteilt. — Die Verbindung der Resultate für die Bevölkerungs- und für die Kapitalsvermehrung können weiterhin mit der Abhandlung von Bortkiewicz über die Deckungsmethoden der Socialversicherung (Verhandl. des VI. internat. Kongresses für Versicherungswissenschaft, Wien [1909] S. 473—497) in Beziehung gebracht werden.

durch wirtschaftliche Korrelationsberechnungen[1] der wirklichen Praxis adaptirt werden. Mit diesen feineren Berechnungen ist die Frage numerisch zu lösen, in welcher Weise ein fixer normaler Zinsfuss für die einzelnen Zweige des langfristigen Kapitalmarktes in Hinblick auf die ungewisse Zukunft von vornherein statistisch angegeben werden kann.

In diesem Zusammenhang betrachten wir noch den Fall der einfachen Zinsrechnung, d. h. den Kapitalzuwachs bei kurzfristigen Anlagen; hierbei kann eine statistische Analogie mit dem arithmetischen Interpolationsprocess erschlossen werden. An Stelle des Vermehrungsfaktors (r) resp. des Verzinzungsfaktors tritt der *Zuwachsfaktor* (p, auch Vermehrungsrate genannt) und statt von einer Vermehrungsfunktion handelt es hier von einer *Zuwachsfunktion* (φ). Die Definition des Zuwachsfaktors ist:

$$p = \frac{P_1 - P_0}{P_0}, \text{ also } r = 1 + p$$

$$P_1 = P_0 + p P_1 .$$

Der Zuwachsprocess wird dadurch charakterisirt, dass, mit Beibehaltung der andern, das distributive Postulat b) *additiv* ausgesprochen wird. In dieser Weise haben wir für die Zuwachsfunktion die folgende Funktionalgleichung:

$$\varphi(t_1, p_1) + \varphi(t_2, p_2) + \cdots + \varphi(t_n, p_n) =$$
$$= \varphi\left(t_1 + t_2 + \cdots + t_n,\ \sqrt[k]{\frac{t_1 p_1^k + t_2 p_2^k + \cdots + t_n p_n^k}{t_1 + t_2 + \cdots + t_n}}\right).$$

Die allgemeine Lösung ist — alles zusammenfassend —:

$$\varphi(P_0, t, p) = P_0 t (b p^k + c)$$

wobei $\bar{p}$ den *normalen Zuwachsfaktor* festlegt. Wir erhalten

[1] Ansätze zu solchen Berechnungen findet man bei NORTON: Statistical studies in the New York money market (New York, Macmillan, 1902) Kap. VII; s. weiterhin YULE: An introduction to the theory of Statistics (London, Griffin, 1912) S. 162. Über die Methode solcher Untersuchungen s. die Arbeiten von SORER im Allg. Statist. Archiv VIII [1914] S. 193—209 und Giornale degli Economisti 1914.

somit einen allgemeinen arithmetischen Process, indem der Zuwachs dem Anfangsbestand proportional ist.

Der üblichen statistischen arithmetischen-Interpolation resp. der in der Praxis verwendeten einfachen Zinsrechnung, entspricht die specielle Annahme: $k = 1$ mit der folgenden, Bedingung:

$$\varphi(P_0, 1, p) = P_1 - P_0.$$

Mit dieser Anfangsbedingung folgt dann:

$$c = 0, \quad b = 1,$$

so dass

$$P(\tau) = P_0 + \varphi(P_0, \tau, p) = P_0(1 + \tau p) = P_0[1 + \tau(r - 1)].$$

Der gewöhnlichen arithmetischen Interpolation, bzw. der einfachen Zinsrechnung, entspricht also jener Zuwachsprocess, dessen Zuwachsfunktion den gewogenen arithmetischen Mittelwert der durch beliebige Intervallspaltung gebildeten partiellen Zuwachsfaktoren (oder hier auch den gewogenen arithmetischen Mittelwert der partiellen Vermehrungsfaktoren) erhält.[1] Dieser Mittelwert bestimmt einen normalen Zuwachsfaktor.

Auf der entwickelten Grundlage könnte man eine ganze Reihe neuer Ansätze für die Bevölkerungs- bzw. für die Kapitalsvermehrung konstruiren. Die Praxis hat die einfachsten Typen — die oben besprochenen speciellen Fälle — ausgewählt. Es könnte z. B. die Bedingung $k = 1$ aufgegeben werden oder es könnten auch ganz neue Processe definirt werden. Als Beispiel diene die Annahme der Erhaltung des gewogenen geometrischen Mittelwertes der Zuwachsfaktoren (also $k \rightarrow 0$), bei welcher durch zweckmässige Konstantenbestimmung für $r \neq 1$ die Formel resultirte:

$$P(\tau) = P_0[1 + \tau \log(r - 1)].$$

Die Auswahl der praktischen Zinsrechnung wird auch durch wirtschaftliche Bedingungen mitbestimmt; diese werden

[1] Die Formel zeigt, dass in diesem Fall die Zuwachsfunktion in Bezug auf alle drei Argumente additiv distributiv ist; dies der Grund dafür, dass eine direkte übereinstimmende Berechnung von Teilbevölkerungen möglich ist.

in der mathematischen Behandlung von neuen Seiten beleuchtet. Als Grundprincip gilt dabei, dass in Bezug auf den Zinsfussmittelwert bei der kurzfristigen Anlage die Interessen des Gläubigers, bei der langfristigen die des Schuldners hervortreten sollen,[1] also im ersten Fall ein grösserer Mittelwert, im zweiten ein kleinerer Mittelwert erhalten werde. So entspricht für die kurzfristigen liquiden Anlagen des Geldmarktes der arithmetische Mittelwert, der auch sonst die Abnormitäten des beweglichen Zinsfusses stark widerspiegelt. Für die langfristigen Anlagen des Kapitalmarktes passt der kleinere und auch stabilere geometrische Mittelwert der sonst beständigern Zinsfaktoren. Bei der noch strittigen Korrelationsfrage der beiderseitigen Zinsfussarten müssen aber ausser diesen allgemeinen Gesichtspunkten — welche für die Gewinn-Komponente bestimmend sind — die sonstigen Komponenten des Zinsfusses gesondert berücksichtigt werden. So ist der geometrische Mittelwert für den Schuldner entsprechender, da dem grössern Risiko der langfristigen Anlage zu Folge, die Risikokomponente des Zinsfusses ohnehin eine stärkere ist; hingegen ist bei der kurzfristigen Anlage für den Gläubiger wesentlich, dass die sich in kurzer Zeit amortisirende Kostenkomponente durch Erhaltung eines grössern Mittelwertes unterstützt werde. — Bei der theoretischen Annahme einer kontinuirlichen Verzinsung fallen diese Ansätze zusammen, indem der gewogene arithmetische Mittelwert der Verzinsungsintensitäten die normale Zinsintensität charakterisirt.[2]

4. Erster Anhang: *Mittelwertausgleichungen.* Handelt es von einer kürzeren Reihe von Zählungsdaten, aus denen ein bester Vermehrungsfaktor für das ganze Intervall zu bestimmen ist, so können die Mittelwertprocesse entsprechender gestaltet werden, als die für lange Reihen konstruirten üblichen Ausgleichungsprocesse der Wahrscheinlichkeitslehre.[3]

[1] Bekanntlich hat LAURENT in seinen Werken die Grundlegung der Zinseszinsrechung auf eine Ausgleichung der beiderseitigen Interessen gegründet (z. B. Statistique mathématique, Paris, Doin, 1908, § 43), ohne aber auch auf die Abhängigkeit vom variabeln Zinsfuss einzugehen.

[2] Wie überhaupt in dieser Grenzauffassung die verschiedenen praktischen Beziehungen zusammenfallen, z. B. die dekursive und die anticipative Begriffsbildung oder die nominelle und die effektive partielle Zinsrate.

[3] Die folgenden Bemerkungen weisen mannigfache Beziehungen mit der mathematischen Behandlung der *Indexzahlen* auf. Die hierbei zu stel-

Wir wollen eine Reihe der Zählungsdaten

$$P_0, P_1, \ldots, P_n$$

und die entsprechende Reihe der Vermehrungsfaktoren

$$r_i = \frac{P_i}{P_{i-1}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

betrachten und einige formale Gesichtspunkte angeben, wie ein passender Mittelwert der letzteren zu wählen ist. Bei Erhaltung des geometrischen Mittelwertes wird der Process

$$P(x) = P_0 r^x = P_0^{1-\frac{x}{n}} P_n^{\frac{x}{n}}$$

charakterisirt, wobei

$$r = \sqrt[n]{\frac{P_1}{P_0}\frac{P_2}{P_1}\cdots\frac{P_n}{P_{n-1}}} = \sqrt[n]{\frac{P_n}{P_0}} \quad \ldots a)$$

von der Spaltung des Gesamtintervalles unabhängig ist.

Wegen dieser Eigenschaft ist wohl der geometrische Mittelwert am zweckmässigsten für das gegebene Problem zu verwenden. Es können aber auch andere Mittelwerte von Verhältnisszahlen herangezogen werden, die eine praktisch wesentliche Beschaffung haben. Wir verweisen in dieser Richtung auf das XXII. Kapitel der Kollektivmasslehre FECHNER's (Leipzig, Engelmann, 1897), wo die praktischen Vorteile des sog. »summarischen Mittel's» behandelt werden. Dieser Mittelwert von Verhältnisszahlen, in unserem Fall:

$$M = \frac{P_1 + P_2 + \cdots + P_n}{P_0 + P_1 + \cdots + P_{n-1}}:$$

mit den Nennern gewogener arithmetischer Mittelwert der $r_i \ldots b)$

teilt mit dem einfach gewogenen geometrischen Mittel die

lenden Forderungen müssten einheitlich zusammengefasst werden um eine endgültige Grundlegung im Sinne dieser Arbeit auch für dieses Problem zu schaffen. — Ähnliche Berechnungen treten auch in dem TAYLOR-GILBRETH'schen System auf, bei Bestimmung des totalen Leistungsgrades eines zusammengesetzten Betriebes.

Eigenschaft, dass

$$M\binom{a}{c} = M\binom{a}{b} M\binom{b}{c}.$$

Dieses wesentliche Merkmal kommt allen Mittelwerten zu, für welche gilt:

$$M\binom{a}{b} = \frac{M(a)}{M(b)} = \frac{f(a)}{f(b)}.$$

Die beiden Mittelwerte a) und b) werden in der bereits citirten Arbeit von BORTKIEWICZ (Zeitschr. für die gesamte Versich. Wiss. Bd. XVI) für die Vermehrungsrate $p = 1 - r$ weiter verwertet; es wird a) als summarische Vermehrungsrate, b) als mittlere Vermehrungsrate bezeichnet. Es wäre wohl zweckmässig diese Terminologie mit der FECHNER'schen Benennungsweise in Einklang zu bringen.

Die Mittelwertausgleichung hat ihre praktische Anwendung bei einer Extrapolation, die mehr als drei vorangehende Zählungsdaten berücksichtigen soll. (Wollen wir in einem solchen Falle linear extrapoliren, so ist die PEARSON'sche Methode der Momente in ihrer graphostatischen Form[1] oder die CANTELLI'sche Methode der Flächen[2] empfehlenswert zur Kontrolle des durch die Erhaltung des arithmetischen Mittelwertes bestimmten Vermehrungsfaktors aus den vorangehenden Zählungen).

5. Zweiter Anhang: *Tabelleninterpolation.* In der Praxis der Wirtschaftsmathematik haben wir neben direkten Tabellen auch die Tabelle der reciproken Werte zur Hand und es entsteht somit die Frage, in welcher Weise ein Interpolationswert zwischen ganzzahligen Argumenten am besten zu bestimmen ist.[3] Da gilt nun Folgendes: Die mit den reciproken Werten ausgeführte arithmetische (lineare) Interpolation ist eine harmonische (hyperbolische) Interpolation mit

[1] S. PEARSON: On the systematic fitting of curves to observations and measurements II (Biometrika, II [1902] S. 13—14).

[2] S. unsere Besprechung des GUMBEL'schen Werkes im Allg. Stat. Archiv Bd X.

[3] S. hierüber die Abhandlung von LANDRÉ im Ehrenzweigs Assekuranz Jahrbuch XXIV [1903], S. 81—90.

den direkten Werten so, dass die direkte arithmetische Interpolation stets grössere Resultate liefert. Es hängt also vom Verlauf und von den Krümmungstendenzen der gegebenen Kurve ab, an welcher Tabelle zu interpoliren ist. Vorteil einer geometrischen (exponentiellen) Interpolation ist, dass a) die beiden interpolirten Werte übereinstimmen und b) derselbe zwischen dem arithmetisch und dem harmonisch berechneten Wert liegt.

6. Dritter Anhang: *Zinsrechnung für Bruchteilperioden.* Eine wichtige Anwendung der Nebeneinanderstellung von arithmetischer, geometrischer und harmonischer Interpolation liefert das oft behandelte Problem der für die Bruchteilsdauer der Zeiteinheit zu erfolgenden Zinsrechnung. Hier wird der mit einfachem Zins rechnenden kommerziellen Methode die auf dem Begriff der kontinuirlichen Kapitalisirung fussende exponentielle Auffassung principiell gegenübergestellt. Diese Frage wird nun am einfachsten gelöst, wenn man beide Arten der Berechnung auf gemeinsamer Grundlage als Mittelwert-Interpolationen deutet und die Wahl des Mittelwertes durch das bekannte Lagengesetz derselben je nach aktuellem Bedarf trifft. Nach ganz einfachen Überlegungen hat man die folgenden Resultate:

a) In der dekursiven kommerziellen Auffassung erfolgt eine arithmetische Interpolation.

b) In der anticipativen kommerziellen Auffassung erfolgt eine harmonische Interpolation.

c) In der exponentiellen Auffassung erfolgt dekursiv und anticipativ gerechnet eine geometrische Interpolation. Durch das Lagengesetz erhält man dann — ohne weitläufige Berechnungen — für gleichwertige Zinsätze die bekannten Vergleichsresultate.

Diese Bemerkungen betreffen den Fall der Kapitalisirung; der Diskontirung entsprechen die bezüglichen Interpolationen aus reciproken Werten und ein umgekehrter Sinn der direkten Vergleichsresultate.

In diesem Zusammenhang wollen wir eine in der Literatur des Gegenstandes oft angeführte Zinsformel von Moser[1]

[1] Cours professés à Berne; s. weiterhin Barriol: Théorie et pratique des opérations financières (Paris, Doin, 1908) S. 5, Dumas im Journal de Statistique Suisse 1906 und Carl in der Zeitschr. für math. und naturwiss. Unterricht XLVIII (1917).

richtigstellen; diese lautet:

$$f(t+r) = 1 + pr - p^2 r(1-r), \; p = \frac{P}{100}.$$

Diese parabolische Formel hat den Mangel, dass das Korrektionsglied einen kommerziellen Diskont darstellt, also anticipativ berechnet wird, wogegen der erste Teil der Formel dekursiv genommen ist. Um dieser Vermengung der Auffassungsweisen aus dem Wege zu gehen, muss das Korrektionsglied als rationeller Diskont auch dekursiv berechnet werden, wodurch die Formel entsteht

$$f(t+r) = 1 + pr - \frac{p^2 r(1-r)}{1 + p(1-r)}.$$

Es ist leicht zu zeigen, dass dies eine dekursive Aufzinsung mit harmonischer Interpolation bedeutet.[1] Der Vergleich des MOSER'schen korrigirten Aufzinsungswertes mit dem nichtkorrigirten Wert liefert, dass die Differenz in symmetrischer Folge für $r = \frac{1}{2}$ den grössten Wert hat; der analoge Vergleich für unsere Formel liefert dasselbe Resultat für den Quotienten der beiden Werte.

[1] Die MOSER'sche Formel hingegen gehört nicht zum Potenzmitteltypus. Nach der angegebenen Weise könnte auch eine analoge Formel konstruirt werden für die anticipative Aufzinsung mit Verwendung einer arithmetischen Interpolation.

Eksamen i Forsikringsvidenskab og Statistik ved Københavns Universitet. 1' Del. Den skriftlige Prøve.

Vinteren 1918—19.

Interpolationsregning og Iagttagelseslære (*4 Timer*).

1.

Bestem ved numerisk Integration Integralet mellem Grænserne 0 og 3 af den nedenfor tabellerede Funktion:

x	$f(x)$
0	294
1	207
2	30
3	÷ 200
4	÷ 428
5	÷ 581
6	÷ 563
7	÷ 261

2.

For 3 Punkter, der vides at ligge i samme rette Linie, er fundet Ordinaterne 1,62 som Middeltal af 4 Maalinger, 1 208 som Middeltal af 5 Maalinger og 0,36 som Middeltal af 2 Maalinger svarende til Abscisserne henholdsvis 1, 2 og 4. Find udjævnede Værdier af Ordinaterne, naar de enkelte Maalinger alle er udførte med samme Nøjagtighed.

Hvor stor Middelfejl maa der antages at have været paa den enkelte Maaling?

3.

Blandt Medlemmerne af en større Forsamling, af hvilke

50 %	hører	til	Partiet	A
40 %	»	»	»	B og
10 %	»	»	»	C

skal ved Lodtrækning vælges et Udvalg paa 5 Medlemmer. Find Sandsynligheden for, at Partiet A faar Flertal i Udvalget samtidig med, at B er repræsenteret.

Rentesregning (*4 Timer*).

1.

Hvor stor 1/4-aarlig Nettopræmie skal der betales i 10 Aar for en 20 Aar opsat 25-aarig, 1/4-aarlig og forudbetalt Annuitet, stor 400 Kr. aarlig, naar Renten er 4 % p. a. betalbar halvaarlig?

2.

En Laangiver yder et Laan til 4 1/2 % p. a. (betalbar 1/2-aarlig), idet der til Forrentning og Amortisation ydes 4 % halvaarlig. Hvor mange Terminer vil Amortisationen vare, og hvormeget skal der betales i sidste Termin?

Hvis Laangiveren anbringer de Ydelser, han modtager, i en Sparekasse til en Rente af 3 1/2 % p. a. (betalbar 1/2-aarlig), med hvilken ensartet Rente vil den udlaante Kapital da være vokset i Laanetiden? Hvor stor er den tilsvarende kontinuerlige Rentefod?

3.

Et Pengeinstitut tilbyder at yde et 5 % Laan til Kurs 99, idet Amortisationen sker saaledes, at der i hver af de førstkommende 20 halvaarlige Terminer foruden 2 1/2 % Rente af Restgælden betales 1/20 af Laanets oprindelige Beløb som Afdrag. Laantageren ønsker imidlertid hellere et 4 1/2 %'s Laan paa samme Amortisationsvilkaar. Til hvilken Kurs kan Institutet yde dette, naar den opnaaede Rente skal være den samme i de to Tilfælde?

Matematik I (*4 Timer*).

1.

Udregn

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 x + \sin^3 x \cos^3 x)\, dx + \int_2^{\frac{7}{3}} \frac{(x-3)\, dx}{\sqrt{(x-1)\,.\,(x-2)}}.$$

2.

Find det fuldstændige Integral til Differentialligningen

$$(1+2x)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 6(1+2x)\frac{dy}{dx} + 16y = 0.$$

og bestem dernæst det partikulære Integral $y = f(x)$, der gaar gennem Punktet $(x, y) = (0, 2)$ og i dette Punkt berører Kurven

$$\cos(\sin x) + 3 \operatorname{tg} x + 2 e^{(y-2)^2} + 3(y-3) = 0.$$

Find sluttelig de 5 første Koefficienter i den Potensrække

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

der fremstiller det omhandlede partikulære Integral $f(x)$, og angiv Potensrækkens Konvergensinterval.

Matematik II (4 Timer).

1.

En Rumkurve er givet i et retvinklet Koordinatsystem XYZ ved Ligningerne

$$x = e^{2t} \cos t, \qquad y = e^{2t} \sin t, \qquad z = e^{2t},$$

hvor t er en variabel Parameter. Find Buelængden af det Stykke af Kurven, der ligger imellem de to til $t = 1$ og $t = 2$ svarende Punkter, samt bestem Kurvens Krumning og Kurvens osculerende Plan i det til $t = 0$ svarende Punkt.

2.

En Ellipse E med Halvakserne $^5/_2$ Meter og 3 Meter og en ret Linie L, som er parallel med Ellipsens Storakse og har Afstande paa henholdsvis 3 Meter og 4 Meter fra Lilleaksens to Endepunkter, er forbundet ved den Flade (Konoide), der frembringes af en ret Linie, som bevæger sig saaledes, at den hele Tiden er vinkelret paa L og skærer saavel L som E. Find Voluminet af det kileformede Legeme, der begrænses af Konoiden og Ellipsens Plan.

Borgerlig Ret (4 Timer).

At udvikle de særlige Regler om Transport af Gældsbreve.

Sommeren 1919.

Interpolationsregning og Iagttagelseslære (4 Timer).

1.

Der er givet følgende Tabel over Funktionen $f(x)$:

x	$f(x)$
5	18 862
10	13 888
15	8 114
20	1 578

Angiv med 2 rigtige Decimaler den Værdi af x, for hvilken $f(x)$ = 10,000.

2.

En Mand har 5 Sønner, der deltage i Krig, 2 som Officerer og 3 som menige. Naar Sandsynligheden er $^1/_{10}$ for, at en Officer skal falde, og $^1/_{20}$ for, at en menig skal falde, hvor stor er da Sandsynligheden for, at 4 af Sønnerne kommer levende tilbage, medens den ene falder i Krigen?

3.

De to Kateter a og b i en retvinklet Trekant er maalt hver 25 Gange, for hver enkelt Katete hver Gang med samme Nøjagtighed.
Resultatet har været:

for a's Vedkommende				for b's Vedkommende			
16,0	cm.	1	Gang	29,2	cm.	1	Gang
16,1	»	2	Gange	29,3	»	1	»
16,2	»	3	»	29,4	»	4	Gange
16,3	»	7	»	29,5	»	9	»
16,4	»	8	»	29,6	»	7	»
16,5	»	3	»	29,7	»	2	»
16,6	»	1	Gang	29,8	»	1	Gang

Hvilken Længde med tilhørende Middelfejl maa man efter disse Maalinger tillægge de to Kateter samt Højden paa Hypotenusen?

Rentesregning (4 Timer).

1.

Et Laan forrentes og amortiseres ved en aarlig Ydelse paa 5 % af Laanets oprindelige Beløb, idet der i de første 10 Aar beregnes en Rente paa 3 ½ % p. a. af Restgælden og derefter 4 % p. a.

Hvorlænge varer Amortisationen og hvor stor bliver den sidste Ydelse? Til hvilken Kurs kan Laanet ydes, naar der skal opnaas en Rente paa 4 ¼ % p. a.?

2.

En Sparekasse modtager Indskud paa følgende Vilkaar:

Af hvert Indskud overføres straks $^1/_{11}$ til Sparekassens Administrationsfond, medens Resten opføres paa Indskyderens Konto og forrentes med $3\,^1/_2$ % p. a. Hvor stort Beløb skal der indskydes aarligt forud i 20 Aar, for at Kontoen om 20 Aar kan udvise et Beløb af 1 000 Kr.?

Hvis Sparekassen yder Indskyderen Andel i Udbytte, der udbetales kontant med lige store Beløb henholdsvis 5, 10, 15 og 20 Aar efter første Indskuds Betaling, hvor stor maa da hver af disse Udbytteandele være, for at Indskyderen alt i alt skal have opnaaet $3\,^1/_4$ % af sine Penge?

3.

Et $3\,^1/_2$ % Laan ydes til pari, idet der til Forrentning og Amortisation betales et konstant Beløb aarligt i 20 Aar, og Udtrækning sker til Kurs 105:

a) Til hvilken opnaaet Rente svarer det nævnte Laan?

b) Hvilken Kurs kan der gives for et lignende Laan med Udtrækning til pari, for at den opnaaede Rente skal være som under *a*)?

Matematik I (4 Timer).

1.

Find den mindste Værdi, som Funktionen

$$z = \frac{x^2 y^2}{(x-1)(y-2)}$$

antager i den ved Ulighederne $x > 1$, $y > 2$ bestemte Kvartplan af XY-Planen.

2.

Find det fuldstændige Integral til Differentialligningen

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 4y = 3e^x + 2\sin x.$$

3.

Funktionen

$$y = x^3 \qquad (-a < x < a)$$

udvikles i en Sinusrække. Angiv derefter Rækkens Sum for enhver Værdi af x (i eller udenfor Intervallet).

Matematik II (4 Timer).

1.

Find Volumen af den Del af det af Fladen

$$4x^2 + 12y^2 + 6z^2 = 25$$

begrænsede Legeme, der ligger indenfor Cylinderfladen

$$4x^2 + 12y^2 = 1.$$

2.

En Kurve er givet i polære Koordinater (r, θ) ved Ligningen $r \cdot \theta = 1$ $(0 < \theta < \infty)$. Tegn Kurven. Find dernæst Længden af det Kurvestykke PQ, der begrænses af de to til henholdsvis $\theta = 1$ og $\theta = 5$ svarende Punkter P og Q. Find sluttelig de polære Koordinater til det til Punktet P svarende Krumningscentrum.

Borgerlig Ret (4 Timer).

At fremstille Reglerne om Ansvaret for en afdød Persons Gæld.

Vinteren 1919—20.

Interpolationsregning og Iagttagelseslære (4 Timer).

1.

Et Selskab paa n Personer tager i tilfældig Orden Plads ved et rundt Bord. Hvad er Sandsynligheden for, at to bestemte Personer

kommer til at sidde ved Siden af hinanden, samtidig med at to andre bestemte Personer ikke kommer til at sidde ved Siden af hinanden?

Hvor stort skal Selskabet være, for at Opgaven har en fra Nul forskellig Løsning? Hvor stort skal det være, for at den søgte Sandsynlighed faar den størst mulige Værdi, og hvad er denne?

2.

Idet u_x er en Funktion med forsvindende lille $4'$ Differens, udtrykkes $u_{1\frac{1}{3}}$ ved u_0, u_1, u_2 og u_3.

Anvend den fundne Formel til at beregne $f(85)$, naar følgende Brudstykke af en Tabel er givet:

x	$f(x)$
80	0,2891262
83	0,7260422
86	1,1625291
89	1,5985578
92	2,0341591

hvori dog en Fejl er tilstede, som maa rettes inden Benyttelsen.

3.

I et Livsforsikringsselskab er indtegnet nedenstaaende Forsikringer, der bliver at udbetale senest i de vedføjede Aldre:

Udbetalingsalder	Antal Forsikringer
70	31
65	433
60	1 370
55	1 064
50	728
45	129
40	45
35	12

Idet Udbetalingsaldrene opfattes som Gentagelsesresultater, beregnes den gennemsnitlige Udbetalingsalder og dens Middelfejl.

Fremstil Iagttagelsesmaterialet ved den typiske Fejllov, idet Ordinaten i Midtpunktet af et Interval antages at repræsentere Integralet over dette Interval, og udtal Dem, paa Grundlag af en Sammenligning mellem de iagttagne og udjævnede Værdier, om Formlens Egnethed til at gengive dette Materiale.

Rentesregning (4 Timer).

1.

Tre Summer paa henholdsvis 20 000 Kr., 40 000 Kr. og 10 000 Kr. forfalder til Udbetaling om henholdsvis 21, 25 og 32 Aar. Hvilken Pris kan en Køber i Øjeblikket betale for Retten til disse Udbetalinger, naar Renten af Pengeanbringelser i Almindelighed antages at være 4 $^1/_2$ % p. a., betalbar halvaarlig, men han forlanger at blive stillet saaledes, at han i de første 15 Aar erholder $^1/_4$ % halvaarlig mere af sine Penge?

2.

En ikke amortisabel Obligation for 5 000 Kr., der forrentes med 5 % p. a. betalbar halvaarlig, forfalder til Udbetaling den 1' Januar 1930. Obligationen, som var udstedt den 1' Januar 1906, solgtes den 1' Juli d. A. af den oprindelige Ejer til den nuværende for en Pris af 4 350 Kr. Hvilken helaarlig Rentefod har den oprindelige Ejer haft, naar hans Tab ved Salget tages med i Betragtning, og hvilken helaarlig Rentefod erholder den ny Ejer ved sin Pengeanbringelse?

3.

En Bank udlaaner et Beløb af 100 000 Kr., der skal tilbagebetales i Løbet af 20 Aar ved Hjælp af en Annuitet, saaledes at Laanerenten er 5 $^1/_2$ %, medens Opsamlingsrenten er 4 %. Umiddelbart før Erlæggelsen af den 12' aarlige Ydelse ønsker Laantageren at afgøre hele Laanet paa en Gang. Hvor stor er Restgælden, og hvilket Beløb vilde De tilraade Banken at forlange for at kvittere Laanet?

Matematik I (4 Timer).

1.

Find det største Volumen af en foranderlig Ellipsoide, hvis Halvakser a, b, c skal tilfredsstille en Ligning af Formen

$$\alpha a + \beta b + c = 3k,$$

hvor α, β, k er positive Konstanter.

2.

Man skal udvikle Funktionen

$$y = l(z + \sqrt{1 + x^2})$$

i en Potensrække. For hvilke Værdier af x er Rækken konvergent? Find ved Hjælp af Rækken $l \cdot \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)$ med 3 Decimaler.

Matematik II (4 Timer).

1.

Tegn den Kurve, hvis Ligning i polære Koordinater er

$$r^2 . \theta = 4$$

Find Krumningsradius til Punktet $\theta = \frac{\pi}{4}$, $r = \frac{4}{\sqrt{\pi}}$. Find dernæst det Areal, der i 1ste Kvadrant begrænses af Linjerne: $\theta = \frac{\pi}{4}$ og $\theta = \frac{\pi}{2}$, samt af de Buer, der afskæres mellem disse Linjer paa Kurvens 1:ste Vinding (svarende til $0 < \theta \leqq 2\pi$, $r > 0$) og paa Kurvens 3:dje Vinding (svarende til $4\pi < \theta \leqq 6\pi$, $r > 0$).

2.

Find Volumen af de Dele, hvori Ellipsoiden

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = 5$$

deles af en Omdrejningskegleflade om Z-Aksen, hvis halve Toppunktsvinkel er 60^c, og hvis Toppunkt ligger i Begyndelsespunktet.

Borgerlig Ret (4 Timer).

Hvilke Regler gælder der med Hensyn til Forsinkelse med Ydelsen fra en Købers eller Sælgers Side?

Sommeren 1920.

Interpolation og Iagttagelseslære (4 Timer).

1.

Peter ejer 5 Øre, Søren 10 Øre. De spiller Plat og Krone med en Indsats af 5 Øre hver og agter at gentage Spillet, indtil den ene af dem har mistet, hvad han har. Find Sandsynligheden for:

(a) at Spillet varer højst tre Omgange;

(b) at det aldrig afsluttes;

(c) at det slutter med, at Søren vinder i Løbet af højst fire Omgange.

2.

Udled Formlerne for Halvering af Intervaller og anvend dem til at interpolere følgende Tabel til Midten:

x	$f(x)$
82	16 567
84	29 507
86	42 077
88	54 296
90	66 183
92	77 756
94	89 030
96	100 020

under Forudsætning af, at femte Differens tør bortkastes.

3.

Nedskriv Sandsynligheden for i k Forsøg med Sandsynligheden p at erholde ν gunstige Udfald.

Idet k og p antages konstante, bestemmes den eller de Værdier af ν, for hvilke den angivne Sandsynlighed erholder sin største Værdi.

Beregn de fire første Halvinvarianter for Fejlloven for ν, vis, at tredje og fjerde Halvinvariant kan antage baade positive og negative Værdier, og at disse Halvinvarianter for $0 < p < 1$ ikke samtidig kan forsvinde.

Rentesregning (4 Timer).

1.

Angiv en Formel til Beregning af Værdien af en kn-aarig efterbetalt Annuitet, naar Rentefoden de første n Aar er i_1, de næste n Aar i_2, o. s. v.

Hvilket aarligt forudbetalt Indskud i en Sparekasse udkræves for i 35 Aar at tilvejebringe et Beløb af Kr. 10 000, naar Rentefoden i det første Tiaar er $4\frac{1}{2}$ % p. a. og aftager med $\frac{1}{4}$ % hvert Tiaar?

2.

Et 7 % Laan udtrækkes til Kurs 105 med $\frac{3}{50}$ aarlig, sidste Gang dog med $\frac{1}{10}$. Til hvilken Kurs kan Laanet overtages af et Pengeinstitut, der paaregner 6 % Rente af sine Pengeanbringelser?

3.

Værdien af 5 000 Kr. betalbar ved Udløbet af hvert femte Aar i de første 70 Aar er lig Værdien af en fjortenaarig efterbetalt Annuitet paa 2 000 Kr. Hvilken Rentefod er forudsat?

Matematik I (4 Timer).

1.

Bestem de 9 Koefficienter α_{rs} i en ortogonal Substitution

$$\begin{aligned} x &= \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} y_1 + \alpha_{13} z_1 \\ y &= \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} y_1 + \alpha_{23} z_1 \\ z &= \alpha_{31} x_1 + \alpha_{32} y_1 + \alpha_{33} z_1, \end{aligned}$$

som fører den kvadratiske Form

$$-4x^2 - 7y^2 + 2z^2 + 4yz - 16zx + 20xy$$

over i en ny kvadratisk Form

$$b_{11} x_1^2 + b_{22} y_1^2 + b_{33} z_1^2 + 2 b_{23} y_1 z_1 + 2 b_{31} z_1 x_1 + 2 b_{12} x_1 y_1,$$

hvori de 3 Produktkoefficienter b_{23}, b_{31}, b_{12} alle er 0. Angiv endvidere Kvadratkoefficienterne b_{11}, b_{22}, b_{33} i den reducerede Form.

2.

Find det fuldstændige Integral til Differentialligningen

$$(x - 2y)\,dx + 2x\,dy = 0.$$

Bestem dernæst den partikulære Integralkurve, der gaar gennem Punktet $(x, y) = (0,1)$, samt skitser paa en Figur, hvorledes den partikulære Integralkurve, der gaar gennem Punktet $(x, y) = (1,0)$, forløber i Halvplanen til højre for Ordinataksen.

Matematik II (4 Timer).

1.

Vis, at Fladen

$$z = 2y^4 + 11x^2 + 11y^2 - 14xy + 2$$

ligger helt over Fladen

$$z = 2x^2 + 2y^2 - 2xy - 12.$$

Find endvidere Volumen af det Omraade, der er begrænset af de to Flader og den rette cirkulære Cylinderflade, hvis Radius er 1, og hvis Akse er den Linje parallel med Z-Aksen, hvorpaa der mellem Fladerne afskæres det korteste Stykke.

2.

Find Arealet af den Del af Ellipsoiden

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1,$$

der ligger indenfor Cylinderfladen

$$y^2 + z^2 = \tfrac{1}{4}.$$

Borgerlig Ret (4 Timer).

At udvikle Hovedreglerne om Servituter.

Literatur.

H. E. Timerding: *Die Analyse des Zufalls.* Braunschweig (Vieweg) 1915. (Die Wissenschaft. Bd. 56.) VIII + 168 sidor.

Wenn man eine sehr grosse Anzahl von Messungen einer physikalischen Grösse, sagen wir einer Länge, macht, wenn man ferner das Mittel von allen erhaltenen Resultaten bildet und die Verteilung der Abweichungen vom Mittel näher untersucht, so erhält man bekanntlich mit guter Annäherung die schöne Gauss'sche Glockenkurve. Das erste Mal, wenn man diese Kurve aus der Fülle der Ziffern sozusagen hervorwachsen sieht, und wirklich erkennt, dass die Gleichheit der empirischen Figur und der exakt mathematischen nicht eine nur oberflächliche ist, kann man sich wohl kaum enthalten, die seltsame Gesetzmässigkeit der Natur zu bewundern. Man wundert sich noch mehr, wenn man nachher zum Beispiel eine Untersuchung über die Länge verschiedener Männer eines gewissen Alters studiert, und dieselbe Kurve wiederkehrt. Aber eben solche gesetzmässige Abweichungen sind es, die man »rein zufällige» Fehler nennt. Der Begriff des Zufalls ist also, so gefasst, mit einer bestimmten Gesetzmässigkeit verknüpft, was ein Widerspruch zu sein scheint. Man fragt sich, ob man unter Zufall ganz logisch etwas zu verstehen hat, und was denn? Und man wünscht die Erscheinungen, welche man zufällige nennt, näher zu studieren, und dem Werden der damit zusammenhängenden Gesetzmässigkeiten nachzugehen.

Der Verfasser der Arbeit, die ich hier anzukündigen beabsichtige, hat zunächst eine meines Erachtens sehr wertvolle Zusammenstellung der Ansichten verschiedener Denker — Stuart Mill, Schopenhauer, Spinoza, Kant, d'Alembert, Laplace, Gauss, Wundt, Sigwart, Windelband u. a. — über das Wesen des Zufalls gemacht und ihre Meinungen kritisch beleuchtet. Zu einer Definition in mathematischem Sinne kommt es aber nicht. Der Verfasser bleibt bei der subjektiven Erklärung stehen, dass man von Zufälligkeit reden soll, »wenn alle erfahrungsmässig feststehenden Umstände, die bei einem Ereignis in Betracht kommen, dieses Ereignis noch nicht bestimmen, vielmehr es, wenn alle diese Umstände erfüllt sind, eintreten, aber auch ausbleiben kann». Vielleicht könnte man sich doch eine schematische Definition eines zufälligen Geschehens denken. Können bei einem Versuch nur zwei gleich mögliche Ereignisse, 0 und 1, eintreffen, so kann das Geschehen als eine Reihe von der Form

0010111001000110101111010010Q110111 . . .

aufgefasst werden. Wenn wir dieses Geschehen untersuchen wollen, konstatieren wir zuerst, dass 0 und 1 im grossen gleich oft wiederkehren. Man könnte sich dann denken, dass die Zufälligkeit dadurch definiert wurde, dass jede Kombination zu n Elementen, wo n beliebig ist, im grossen gleich oft wiederkehren muss. (Die Einschränkung, dass hier die Wahrscheinlichkeiten gleich ein halb werden, lässt sich ja leicht beseitigen.) Man hatte dann zum Beispiel die Erfahrungstatsache auszusprechen: das Spielen mit einer so genau wie möglich symmetrischen Münze verläuft annähernd wie ein elementares Zufälligkeitsschema. Von dem elementaren Schema hätte man dann das allgemeine aufzubauen, ganz analog wie man aus einem Funktionselement die Weierstrass'sche Idee der analytischen Funktion aufbaut. — Dieses nur im Vorbeigehen.

Die Diskussionen über das Wesen des Zufalls sind oft in Form eines endlosen Kampfes geführt worden zwischen der Ansicht, dass die ganze Natur durch eherne mathematische Gesetze regiert wird, einerseits, und andererseits derjenigen, welche für gewisse Ereignisse (die zufälligen) eine Art anthropomorphen freien Willens annehmen wollen. Erst in der neuesten Zeit bricht sich eine neue Auffassung Bahn. Wir beginnen einzusehen, dass die Vorstellung einer mathematisch bestimmten Welt, sagen wir »das mathematische Schema«, einem allgemeineren Schema weichen muss. Wir haben nie ein physikalisches Gesetz beobachtet, das genau mathematisch wäre, ebenso wenig wie wir eine absolute Gerade physisch beobachten können. Das primäre ist vielmehr Beobachtungen, die um Mittelwerte schwanken und welche irgendwie durch ein »statistisches Schema« gedeutet werden müssen. Wenn wir zum Beispiel statt einer Korrelations- (oder Summen-) Funktion zweier Veränderlichen einen mathematischen Funktionszusammenhang dieser Variablen einführen, so ist dies eine Vereinfachung des beobachteten Naturgeschehens, die Einführung eines neuen Schemas, das uns ein einfacheres Bild des Geschehens geben soll. Die mathematisch gebundene Kausalität kann eben darum mit der Beobachtung »zufälliger« Ereignisse nicht im Widerspruch sein, weil ihre einzige Existenz in unserem Gehirn ist. Wir haben mit anderen Worten kein Recht, eine streng mathematische Kausalität einzuführen, da wir in der Natur nur angenäherte Gesetze beobachten können. Diese Auffassung ist meiner Meinung nach der einzige Weg, um den Widerspruch zwischen Kausalität und Zufälligkeit zu vermeiden. Der Verfasser der vorliegenden Arbeit scheint sich gewissermassen dieser Auffassung zu nähern. Wenigstens heisst es Seite 83 bei der Besprechung der physikalischen Beobachtungen, wo man allgemein an die Existenz eines »wahren Wertes« hinter den Beobachtungswerten glaubt: »Was der wahre Wert unabhängig von den gemachten Beobachtungen bedeutet, bleibt allerdings zu beantworten. Die Gewissheit seiner Existenz schöpft man erstlich aus der Überzeugung von der Unveränderlichkeit des Gegenstandes, auf den sich die Beobachtungen beziehen, wenigstens während der Dauer dieser Beobachtungen. Sodann liegt aber auch ein über die blosse Erfahrung hinausgehende Urteil zugrunde.

das uns die von unseren Beobachtungen, d. h. von unseren Wahrnehmungen unabhängige Existenz der Naturobjekte behaupten lässt. Wir gelangen hiermit jedoch auf das unwegsamste Gebiet der ganzen Naturphilosophie. Die Frage, um die es sich handelt, lässt sich mit kurzen Worten gar nicht abmachen, weil sie wesentlich davon abhängt, was man unter Existenz versteht. Darin sind die Auffassungen sehr verschieden.» Der Verfasser schlägt dann vor, den »wahren Wert» als Grenzwert des arithmetischen Mittels bei immer steigender Beobachtungszahl anzunehmen. Streng genommen, kann man ja ebenso gut auf einen wahren Wert verzichten. Die Verteilungsfunktion ist da, und wenn man für die praktische Arbeit einen »wahren Wert» irgendwie definiert, so bleibt das eine Annahme unseres Geistes, nur der Einfachheit wegen eingeführt. Durch diese Annahme können wir selbstverständlich keinen Widerspruch in die Natur, das heisst in die Beobachtungen, hineinzaubern.

Der Verfasser unterscheidet die statistische Theorie des Zufalls und die genetische. Diese sucht in die innere Natur der zufälligen Ereignisse einzudringen (man denke an die Möglichkeit, biologische Verteilungen durch erblichkeitstheoretische Erwägungen zu deuten), während jene das Wahrscheinlichkeitsschema nur als Vergleich benutzt, um die in der Natur vorkommenden Verteilungsfunktionen zu studieren. Es muss aber hervorgehoben werden, dass ja auch die sogenannte statistische Theorie dahin zielt, in die Natur der Erscheinungen einzudringen. Der Unterschied ist wohl nur der, dass diejenigen, welche die statistische Methode anwenden, die Hoffnung hegen, dass man durch allgemeine Überlegungen wird beweisen können (oder gar schon hinreichend plausibel gemacht habe), dass das Vorhandensein einer gewissen Art von Verteilung auf die irgendwie zufällige Natur der betreffenden Erscheinungen schliessen lässt. Der Verfasser hat aber klar eingesehen, wie viel Aufklärung und Vertiefung in diesen Fragen noch nötig ist. Man vergleiche zum Beispiel die Warnungen vor Überschätzung der Kriterien der normalen, übernormalen und unternormalen Dispersion (S. 139). Dass zufällige Ereignisse empirisch ganz willkürliche Verteilungsfunktionen generieren können, zeigt der Verfasser auch durch Aufstellen einer allgemeinen Formel, welche eine endliche Summe Gauss'scher Funktionen enthält (S. 132). Er erhält dabei einen Anschluss an die Entwicklungen von Bruns, auf die jedoch nicht weiter eingegangen wird. In diesem Zusammenhang behauptet der Verfasser, von einer an sich sehr interessanten mathematischen Kritik ausgehend, dass die bekannte Pearson'sche Entwicklung ziemlich willkürlicher Verteilungsfunktionen aus einem bestimmten Wahrscheinlichkeitsschema nur heuristisch aufzufassen sei, eine Bemerkung, der ich aber nicht ganz zustimmen möchte. Ich finde es nämlich nicht ausgeschlossen, dass man bei der endlichen, diskontinuierlichen (mehr oder weniger asymmetrischen) Verteilung stehen bleibt und dabei die Kontinuität der erhaltenen Kurve als eine Folge der ungenauen Beobachtung oder des ungenauen Zustandekommens der Verteilung ansieht.

Die mathematischen Ausführungen des Verfassers sind klar und logisch aufgebaut. Aus der grossen Fülle von Formeln und Ableitungen sucht der Verfasser nur das aus, was in den Rahmen seiner Ausführungen passt, und ergänzt es oft durch eigene Arbeit. Ich möchte zum Beispiel auf die Einführung eines Schwankungsmasses (S. 71) hinweisen, worauf dann ganz klar die mittlere Abweichung, der mittlere Fehler des Mittels und allmählich das interessante ABBE'sche Kriterium heranwachsen.

Der Wert des Buches liegt meiner Meinung nach vor allem in der grossen Sorgfalt, mit der das Material ausgewählt, und der scharfen Kritik, mit der es geboten wird. Der Verfasser ist sich immer bewusst, dass diese Wissenschaft sich auf den Grenzgebieten des Wissens über die Natur bewegt. Er hat mit anderen Worten die Schwierigkeit und auch die Bedeutung der Fragen erfasst, was man leider nicht von allen Schriftstellern auf diesem Gebiet behaupten kann. Was die mathematische Statistik vor allem braucht, scheint mir eben kritische Geister zu sein, die nicht nur rechnen, sondern auch denken können. Zwar gilt es dann auch, dass die Resultate nicht so leichtfertig eingeholt werden, aber statt dessen werden die spärlichen Ergebnisse für ein tieferes Verstehen des Naturgeschehens umso wertvoller sein. Man darf behaupten, sagt der Verfasser, »dass sich kaum irgendwo eine Gelegenheit findet, in das Wesen der Dinge durch exakte Methoden so tief einzudringen wie hier. Es fragt sich nur, mit welcher Stufe der Erkenntnis man sich zufrieden geben will. Je kritischer ein Mensch gestimmt ist, um so bescheidener und zurückhaltender wird er sein, wenn er sich das Eindringen in die Ordnung der Natur zur Aufgabe macht.»

So muss man denn von der Arbeit des Verfassers sagen, — auch mit Gefahr, den Käuferkreis des Büchleins einzuschränken, — dass es nur für diejenigen geschrieben ist, denen an der voraussetzungslosen Erforschung der Wahrheit gelegen ist.

K.-G. Hagström.

Ein Weg zur Analyse der Invaliditäts-anwartschaften.

Von **A. Görig.**

(Vortrag, gehalten in der »Svenska Aktuarieföreningen» in Stockhom am 4. November 1920).

Ausgehend von der Fiktion, es sei formell eine vollständige Trennung des Invalidisierungs- und Sterbeprozesses möglich, kann man weitgehende Analogien zwischen allen Arten von Versicherungen auf den Invaliditätsfall einerseits und entsprechend bestimmten Überlebensansprüchen andererseits feststellen und dadurch zu einer einheitlichen und übersichtlichen Darstellung der Invaliditätswerte gelangen.

Aus der evidenten Gleichheit

$$l_x^a = \sum_0^{\omega-x} {}^{\nu}\, d_{x+\nu}^a + \sum_0^{\omega-x} {}^{\nu}\, I_{x+\nu}$$

folgt unter der Annahme der Differenzierbarkeit beider Summanden die fundamentale Differentialgleichung

$$-\frac{d l_x^a}{l_x^a d x} = -\frac{d \Sigma d_{x+\nu}^a}{l_x^a d x} - \frac{d \Sigma I_{x+\nu}}{l_x^a d x},$$

welche durch die drei Definitionen

$$\mu_x^a = \frac{-d \Sigma d_{x+\nu}^a}{l_x^a d x} \qquad \nu_x = \frac{-d \Sigma I_{x+\nu}}{l_x^a d x}$$

$$\mu_x^{aa} = \frac{-d l_x^a}{l_x^a d x}$$

die Gestalt der »KARUPschen Differentialgleichung»

$$\mu_x^{aa} = \mu_x^{a} + \nu_x$$

annimmt und den folgenden Überlegungen zu Grunde liegt; sie besagt, dass die »Ausscheidekraft der Aktiven» darstellbar ist als Summe zweier Komponenten, der »Reinen Sterbekraft der Aktiven» und »Reinen Invalidisierungskraft».

Von diesem Gesichtspunkte aus lässt sich die konstante Anwartschaft auf gleichbleibende Invaliditätsrente auffassen als »Überlebensrente (im weiteren Sinne) des Aktiven an den Invaliden», wobei der Eintritt der Invalidität das die Fälligkeit auslösende Ereignis ist und Identität zwischen »begünstigter» und »nicht begünstigter Person» besteht: Identität in der Weise, dass dasselbe aktive Individuum beide Parteien in sich vereinigt, sodass mit dem Invalidisierungsfalle also ein »Überlebensfall im weiteren Sinne» gegeben ist.

Der Barwert der Anwartschaft auf Invalidenrente erscheint dann in der Form

$$a_x^{ai} = \int_0^\infty \nu_{x+t}\, e^{-\int_0^t (\mu_{x+t}^{aa} + \delta)\, dt}\, a_{x+t}^{i}\, dt$$

oder, ausführlicher geschrieben,

$$a_x^{ai} = \int_0^\infty \left[\nu_{x+t}\, e^{-\int_0^t (\mu_{x+t}^{a} + \nu_{x+t} + \delta)\, dt} \int_0^\infty e^{-\int_0^r (\mu_{x+t+r}^{i} + \delta)\, dt}\, dr \right] dt,$$

wobei $\mu_x^i = \frac{-dl_x^i}{l_x^i\, dx}$ als »Sterbekraft der Invaliden» definiert ist.

Die variable Anwartschaft auf konstant bleibende Invalidenrente — deren Höhe also vom Anfallszeitpunkte Invaliditätseintritte abhängt — ergibt sich als:

$$(va)_x^{ai} = \int_0^\infty (\alpha + \beta t)\, \nu_{x+t}\, e^{-\int_0^t (\mu_{x+t}^{aa} + \delta)\, dt}\, a_{x+t}^{i}\, dt.$$

Hierbei sind α und β vereinbarte Konstante, wenn die Höhe der Invalidenrente eine *lineare* Funktion der Aktivitätsdauer des Versicherten ist.

Die Analogie zwischen den Versicherungswerten

$$(va)_{x|y} \int_0^\infty (\alpha + \beta t)\mu_{x+t} e^{-\int_0^t (\mu_{x+t}+\mu_{y+t}+\delta)dt} a_{y+t} dt$$

und

$$(va)_x^{ai} = \int_0^\infty (\alpha + \beta t)\, \nu_{x+t} e^{-\int_0^t \left(\nu_{x+t}+\mu^a_{x+t}+\delta\right) dt} a^i_{x+t} dt$$

ist vollkommen.

Besonders vorteilhaft erscheint die Auffassung des Invaliditätsfalles als »einseitigen Überlebensfalles einer Verbindung zu zweien», wenn man die verschiedenen Arten *aufgeschobener und temporärer* Invalidenrenten studiert.

Es seien zunächst folgende Gesichtspunkte für eine Gruppierung der Aufschubmöglichkeiten vereinbart.

Gruppe I. Nur der *Anspruch* auf Invalidenrente ist während eines bestimmten Zeitraumes aufgeschoben in dem Sinne, dass überhaupt keine Rente fällig wird, wenn die Invalidisierung innerhalb der Aufschubzeit eintritt; nach deren Ablauf aber erfolgt die Auszahlung an den Invalidwerdenden unmittelbar und lebenslänglich.[1]

Gruppe II. Nur die *Auszahlung* der Invalidenrenten ist während einer festgesetzten Frist aufgeschoben, nach Ablauf derselben aber erfolgt die Rentenzahlung an alle Invaliden lebensl. [1], also auch an jene, welche innerhalb der Aufschubzeit invalid geworden sind.

Unter Benützung der eingangs definierten Intensitäten erhält man für diese beiden Gruppen der aufgeschobenen Invalidenrenten in kontinuierlicher Schreibweise zwei typische formale Ausdrücke.

---

[1] Hier und in den folgenden Betrachtungen ist der Fall Reaktivierung ausgeschaltet, um die Darstellung zu vereinfachen.

Typus I.

$$ {}_n a_x^{ai} = \int_n^{\infty} \nu_{x+t}\, e^{-\int_0^t (\mu_{x+t}^{aa}+\delta)\,dt}\, a_{x+t}^{i}\,dt = $$

$$ = \int_n^{\infty} \nu_{x+t}\, e^{-\int_0^t (\nu_{x+t}+\mu_{x+t}^{a}+\delta)\,dt}\, a_{x+t}^{i}\,dt; $$

stellt man dem gegenüber die Überlebensversicherung

$$ {}_n a_{x\,y} = \int_n^{\infty} \mu_{x+t}\, e^{-\int_0^t (\mu_{x+t}+\mu_{y+t}+\delta)\,dt}\, a_{y+t}\,dt, $$

so findet man vollständige Übereinstimmung des formellen Ausdruckes von ${}_n a_x^{ai}$ mit dem Analogon: Letzteres wurde unter der Bezeichnung ${}^{\mathrm{I}}_{n} a_{x\,y}$ von JÖRGENSEN als Typus I der aufgeschobenen Überlebensrente definiert [JÖRGENSEN, »Grundzüge einer Theorie der Lebensversicherung», Kopenhagen 1913].

Typus II.

$$ {}_n a_x^{ai} = \int_0^{\infty} \nu_{x+t}\, e^{-\int_0^t (\mu_{x+t}^{aa}+\delta)\,dt}\, {}_{n-t}a_{x+t}^{i}\,dt. $$

Wiederum besitzt

$$ {}_n a_x^{ai} = \int_0^{\infty} \nu_{x+t}\, e^{-\int_0^t (\nu_{x+t}+\mu_{x+t}^{a}+\delta)\,dt}\, {}_{n-t}a_{x+t}^{i}\,dt $$

ein genau entsprechendes Gegenstück in

$$ {}^{\mathrm{II}}_{n} a_{x\,y} = \int_0^{\infty} \mu_{x+t}\, e^{-\int_0^t (\mu_{x+t}+\mu_{y+t}+\delta)\,dt}\, {}_{n-t}a_{y+t}\,dt, $$

dem JÖRGENSEN'schen Typus II der aufgeschobenen Überlebensrenten [a. a. O. in § 68].

Die Anwartschaft auf eine nach Art II aufgeschobene Invalidenrente, deren Höhe vom Zeitpunkte des Invalidwerdens abhängt (der hier nicht identisch ist dem Anfallszeitpunkte der Rente), lautet dann

$$(v_n\, a)_x^{ai} = \int_0^\infty (\alpha + \beta t)\, \nu_{x+t}\, e^{-\int_0^t (\mu_{x+t}^{aa} + \delta)\, dt}\; {}_{n-t}a_{x+t}^{i}\, dt.$$

Typus III. Es ist noch eine dritte Auffassung des Aufschubes von Überlebens- und Invalidenrenten denkbar, die allerdings praktisch wohl nicht direkt in Betracht kommt, doch späterhin gute theoretische Dienste leisten wird.

JÖRGENSEN definiert an der erwähnten Stelle seiner »Theorie der Lebensversicherung» als ${}_{n}^{III}a_{\overline{x}\,|\,y}$ jene Überlebensrente, »welche zu laufen anfängt, wenn n Jahre nach dem Tode des (x) verflossen sind»

$${}_{n}^{III}a_{x|y} = \int_0^\infty \mu_{x+t}\, e^{-\int_0^t (\mu_{x+t} + \mu_{y+t} + \delta)\, dt}\; {}_{n}a_{y+t}\, dt.$$

Gleiche Struktur besitzt die folgende Invaliditätsanwartschaft:

$$\int_0^\infty \nu_{x+t}\, e^{-\int_0^t (\nu_{x+t} + \mu_{x+t}^{a} + \delta)\, dt}\; {}_{n}a_{x+t}^{i}\, dt,$$

das ist eine »Versicherung auf den Inval.-fall, bei welcher die Rentenauszahlungen erst n Jahre nach Eintritt der Invalidität beginnen».

Man kann die behandelten drei Grundtypen des Aufschubes von Invalidenrenten in eine sehr anschauliche Form bringen, indem man sich folgender graphischer Darstellung bedient.

Es sei ein Halbstrahl als Repräsentant des Zeitverlaufes gegeben. Sein Anfangspunkt O sei der Moment der Gegen-

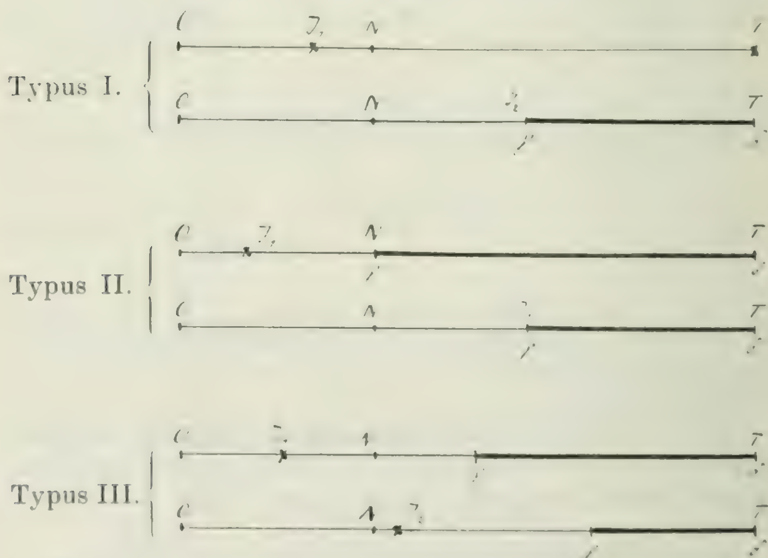
wart, jeder zukünftige Zeitpunkt P sei durch seine Abszisse OP bestimmt; so seien insbesondere der Eintritt der Invalidität (I) und des Todes des Versicherten (T) markiert.

ON sei die Aufschubzeit von n Jahren.

Jene Strecke auf OX, welche dem Zeitraume der Rentenzahlung an den Invaliden entspricht, sei mit Masse belegt gedacht. (Etwa wie man in der mathemathischen Statistik die Individuallinien vom Geburtspunkte bis zum Tode sich mit Masse belegt denkt.) Diese Strecke $\gamma\delta$ sei in der Figur durch Verstärkung des Halbstrahles kenntlich gemacht.

Man erhält unter der Annahme der vorstehenden Konstruktionsbedingungen folgenden übersichtlichen bildlichen Ausdruck für die drei verschiedenen Auffassungen aufgeschobener Invalidenrenten, indem man dabei in jedem der drei Fälle beachtet, dass der Eintritt der Invalidität *vor* oder *nach Ablauf* der Aufschubzeit erfolgen kann, dass also der

Aufgeschobene Invaliden-/Überlebens-Renten. Graphische Darstellung der drei typischen Auffassungsmöglichkeiten.



Figuren »A«.

Punkt I auf der Zeitlinie innerhalb oder ausserhalb der Strecke $\overline{ON}$ gelegen sein kann.

In den folgenden Figuren und auch später sind diese beiden »Unter-Fälle» durch die Indizes der Untergruppen (I_1) und (I_2) auseinandergehalten. Um deren Vergleich zu erleichtern, sind sie vollständig getrennt gezeichnet und senkrecht über einander angeordnet, sodass man jeden Typus des Aufschubes durch eine Doppelfigur charakterisiert sieht.

Es entspricht der weitreichenden Analogie zwischen den Invaliditätsansprüchen und Versicherungswerten auf den Überlebensfall, dass das vorstehende geometrische Schema ohne wesentliche Abänderung zur Darstellung der verschiedenen Auffassungen von Überlebensrenten geeignet ist.

Man erhält die drei Grundtypen einer einseitigen, aufgeschobenen Überlebensrente, etwa der Witwenpension ${}_{n|}a_{x|y}$, indem man unter dem Zeitpunkte T den Tod der Frau $T_{(y)}$ versteht und den Pkt. I_1 bezw. I_2 als durch den Todespunkt $T_{(x)}$ des Mannes bestimmt auffasst.

Auch die verschiedenen Möglichkeiten des Aufschubes einer gegenseitigen Überlebensrente sind durch die Figuren A I, II, III charakterisiert: Es genügt dazu, wie man sich leicht überzeugt,

$$I = T_{(1)} \text{ und } T = T_{(2)}$$

zu setzen, wobei die Indizes die zeitliche Reihenfolge der Todesfälle des Paares angeben.

Ein Vergleich der Figuren A I, II, III gibt Anlass zu folgender Bemerkung.

Lässt man gleichzeitig $I_1 \rightarrow N \leftarrow I_2$ eintreten und verfolgt dabei, wie sich der Unterschied in der Rentenauszahlung ändert, welche für die beiden Untergruppen desselben Typus erfolgt, so erkennt man unmittelbar, dass

im Falle II ein stetiger Übergang erfolgt,

im Falle III überhaupt keine principielle Verschiedenheit der Zahlungsmodi für die Untergruppen (I_1) und (I_2) besteht. Hingegen weist dieser Unterschied für den Typus I des Aufschubes an der Stelle N eine »Unstetigkeit erster Art» auf. Der Invaliditätseintritt im Zeitpunkte $n-0$ löst die Fälligkeit der Invalidenrente *nicht* aus, die Invalidisierung $I_{(n+0)}$

dagegen führt zu sofortigem Flüssigwerden einer lebenslänglichen Rente. Selbst, wenn man für den praktisch natürlich ganz unwahrscheinlichen Fall, dass der Invaliditätseintritt exakt mit dem Zeitpunkte n koinzidiert, eine besondere Bestimmung getroffen hat [man kann $I_{(n)}$ als I_1 oder I_2 betrachten], bleibt doch die gleiche Schwierigkeit, einen derartigen Grenzfall korrekt zu entscheiden.

Zu ganz analogen Ergebnissen gelangt man bei der Betrachtung der verschiedenen Auffassungsmöglichkeiten temporärer Invalidenrenten; auch hier erweist es sich als ausserordentlich vorteilhaft, beim Studium der Grundtypen den Invalidisierungsfall als »Überlebensfall im weiteren Sinne» anzusehen.

Für die Gruppierung der temporären Invalidenrenten seien die folgenden Bestimmungen vereinbart.

Gruppe I. Nur der Versicherungs*anspruch* ist temporär, erlischt nach Ablauf einer festgesetzten Frist; die innerhalb derselben fällig werdenden Invalidenrenten aber sind lebenslänglich.

Gruppe II. Die *Auszahlung* der Rente ist temporär, indem sie in einem *fixen*, vom Invalidisierungsfalle unabhängigen Endtermine aufhört.

Gruppe III. Die Rentenzahlung ist temporär in dem Sinne, dass sie *n Jahre nach* dem Eintritte der Invalidität aufhört.

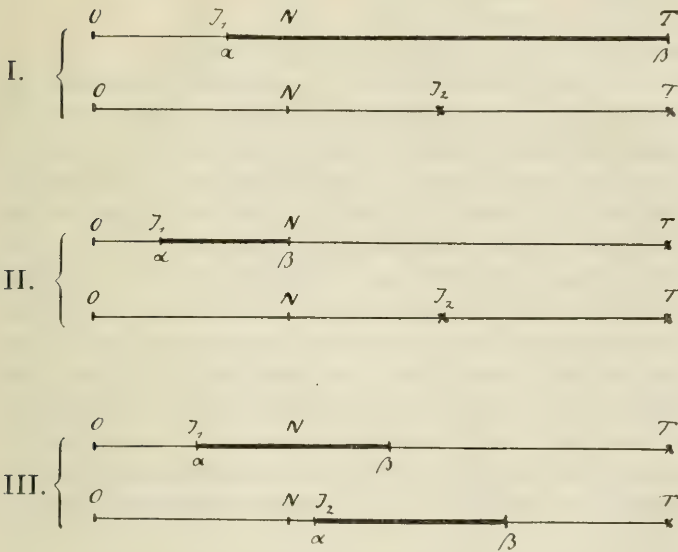
Auch für die hiermit charakterisierten Typen der temporären Invalidenrenten bietet die angedeutete symbolische Darstellung den Vorteil grosser Übersichtlichkeit; als Ausdruck der drei Auffassungsmöglichkeiten ergibt sich unter Beibehaltung aller früher getroffenen Konstruktionsannahmen die folgende Darstellung (Siehe S. 9).

Der Vergleich von B I, II, III ergibt sofort das Resultat, dass ein Unterschied in den Zahlungsmodalitäten zusammengehöriger Untergruppen $(I_1):(I_2)$

bei Typus III prinzipiell nicht besteht — die Zahlungsdauer der Rente ist hier (höchstens) n Jahre (wenn der Invalide so lange lebt) und daher vom Zeitpunkte der Invalidisierung unabhängig —,

bei Typus II einen kontinuierlichen Übergang zulässt; wenn man nämlich $I_1 \to N \to I_2$ erfolgen lässt, nimmt die

Graphische Darstellung der drei Typen temporärer *Invaliden-* / *Überlebens* *Renten.*



Figurenbezeichung »B», gegenüber »A» bei Aufschub.

Zahlungsdauer in der Untergruppe (I_1) kontinuierlich vom Werte $t_{(0)} = n$ bis zum Werte $t_{(n)} = 0$ ab und erreicht damit stetig den Zahlungsmodus, der innerhalb der ganzen Untergruppe (I_2) darin besteht, dass überhaupt keine Rentenauszahlung eintritt. Dagegen weist

Typus I im Punkte N einen »Unstetigkeitspunkt erster Art» bezüglich der Zahlungsdauer der flüssig werdenden Invalidenrente auf. Man kann sich mittels der Fiktion des Prozesses $I_1 \rightarrow N \leftarrow I_2$ leicht überzeugen, dass der Invaliditätseintritt $I_{(n-0)}$ die Liquidierung einer lebenslänglichen Rente herbeiführt, wogegen die Invalidisierung $I_{(n+0)}$ zu einem Anspruche auf Invalidenrente *nicht* führt.

Später wird man für diese dreifache Behauptung einen anschaulichen, direkten Ausdruck mit Hilfe eines rechtwinkeligen Koordinatensystems erhalten. Hier sei zunächst bloss die Diskontinuität der Auszahlungen im Falle I gegenüber-

gestellt der Kontinuität derselben im Falle II und III. Wenn damit gewissermassen ein stärkeres Band zwischen den Typen II und III gegeben ist, so kann man andererseits auch ein Bindeglied nachweisen, das bloss zwischen den beiden Typen I und II besteht.

Betrachtet man nämlich in den Figuren B I, II, III zunächst nur die Untergruppen (I_2), also ausschliesslich Invalidisierungsfälle nach Ablauf der festgesetzten n Jahre, so findet man, dass die Typen I und II vollständig zusammenfallen. Greifen wir dagegen drei allgemeine[1] Fälle aus den Untergruppen (I_1) heraus, so sind wir imstande, mittels derselben alle drei Typen auseinander zu halten.

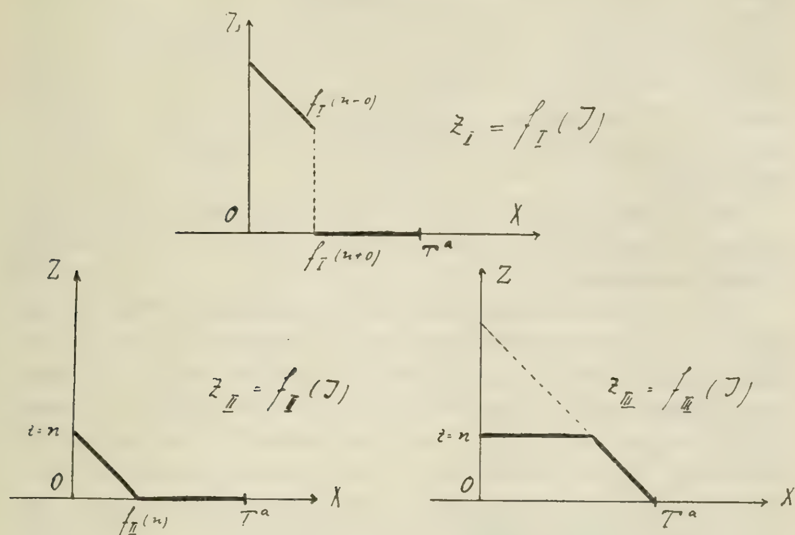
Dass bei den verschiedenen Möglichkeiten des Aufschubes von Invalidenrenten ganz analoge Verhältnisse herrschen, davon überzeugt ein Blick auf die Figuren A I, II, III; auch dort decken sich, wenn man zunächst bloss die Untergruppen (I_2) ins Auge fasst, die Typen I und II vollkommen, so dass man sie nicht unterscheiden kann. Dagegen ist durch jeden allgemeinen[1] Fall einer Invalidisierung aus der Untergruppe (I_1) der Typus des Aufschubes hinlänglich charakterisiert.

Es sei nun gestattet, die angekündigte graphische Darstellung in der Ebene anzudeuten. Die Abszisse eines kartesischen Koordinatensystems sei das Zeitmass für die Aktivitätsdauer des Versicherten vom Zeitpunkte seines Beitrittes an, die Ordinate messe die Zahlungsdauer der Invalidenrente als Funktion der Aktivitätsdauer. Die Gleichung $y = f_\lambda(I)$ wird dann eine Kurve ergeben, aus welcher man direkt ablesen kann, welchen Rentenanspruch die in einem bestimmten Zeitpunkte erfolgende Invalidisierung nach sich zieht, wenn die abgeschlossene Versicherung eine *temporäre* Invalidenrente vom Typus λ darstellt.

Man bemerke, dass der Vergleich des Kurvenverlaufes für die drei Typen eine unmittelbare Bestätigung der früheren Behauptungen über die Unstetigkeit des Rententypus I im Punkte N sowie derjenigen über die Kontinuität der beiden letzten Typen enthält.

[1] Der Fall $I = 0$ verwischt zwar die Grenzen zwischen den Typen II und III, darf aber wohl ausser Acht gelassen werden.

Die Rentenauszahlungskurve $z = f(I)$ für die temporären Invalidenrenten.



Figuren: »B*».

Die Kurven $z_{\mathrm{I}} = f_{\mathrm{I}}(I)$, $z_{\mathrm{II}} = f_{\mathrm{II}}(I)$ und $z_{\mathrm{III}} = f_{\mathrm{III}}(I)$ besitzen einen einfachen konstruktiven Zusammenhang mit den Figuren B I, II und III.

Legt man in die dort gegebene Zeitlinie OX nun die Abszissenachse, so fallen bei Annahme gleichen Massstabes die korrespondierenden Punkte, also auch O, I, N, T in beiden Figuren zusammen. Überdies sind die Ordinaten in B*, da sie ja die Zahlungsdauer der Invalidenrente messen, als Grössen gleichwertig den mit Masse belegt gedachten Strecken $\alpha\beta$ in B. Daher ergibt sich die einfache Möglichkeit, von den Figuren B zu den Kurven $z = f(I)$ überzugehen, indem man in den ersteren die Strecken $\overline{\alpha\beta}$ um ihren Anfangspunkt, der hier überall identisch ist dem Invalidisierungspunkte, eine Drehung von $+ 90°$ ausführen lässt.

Der Endpunkt β gelangt dabei in einen Punkt von $z = f(I)$ und man kann beliebig viele Kurvenpunkte erhalten,

wenn man die gleiche Konstruktion sich für variierende Lagen von I auf der Individuallinie OT ausgeführt denkt.

Es liegt auf der Hand, dass die Figuren B I bis B* III auch als geometrische Repräsentanten temporärer Überlebensrenten angesehen werden können. Wenn man $I = T_{(x)}$ $T = T_{(y)}$ setzt, erhält man die Grundtypen der einseitigen, temporären Überlebensrente, setzt man $I = T_{(1)}$ $T = T_{(2)}$, so geben dieselben Figuren den graphischen Ausdruck für die drei Auffassungsmöglichkeiten gegenseitiger, temporärer Überlebensrenten.

Man gelangt auf diesem Wege also zu einer systematischen Gruppierung ganz analoger Art für die temporären Überlebensrenten.

Doch scheint es zunächst, als ob damit ein Widerspruch zu der von Jörgensen gegebenen Darstellung temporärer Überlebensrenten erfolge: Denn in der »Theorie der Lebensversicherung» folgt im § 69 auf die Definition von zwei Auffassungsmöglichkeiten der temporären Überlebensrente der Satz: »Eine dritte Möglichkeit findet hier nicht statt, weil die zwei Möglichkeiten (1 und 2 für aufgeschobene Renten entsprechend) zusammenfallend sind».

Indessen erkennt man bei genauerer Untersuchung, dass Jörgensen's »Auffassung 1» der temporären Überlebensrente, welche die Typen I und II gleichzeitig umfasst, in zwei getrennte Definitionen gespalten werden kann, sodass man auch bei den temporären Überlebensrenten zu drei verschiedenen Auffassungen geführt wird. Das gelingt beispielsweise dadurch, das man die Analoga zu den oben gegebenen Definitionen der Gruppen I und II temporärer Invalidenrenten bildet.

Übrigens entwickelt Jörgensen selbst in § 66 *drei* verschiedene Formeln für die temporären Überlebensrenten, welche eine vollständig analoge Gruppierug voraussetzen, wie sie sich als Korrelat der vorangehenden Analyse temporärer Invalidenrenten ergibt. Man wird für diese Übereinstimmung in den später folgenden Formeln den direkten Beweis finden.[1]

[1] Dass die Untergruppen (I_2) bei den temporären Invaliden- und Überlebensrenten der Typen I, und II tatsächlich identisch sind, wurde bereits früher festgestellt; aber auch, dass dieselbe Identität bei den Typen I und II der aufgeschobenen Renten besteht.

Eine wichtige Tatsache, die in den späteren Formeln auch algebraisch zum deutlichen Ausdrucke kommt, ergibt sich als unmittelbarer anschaulicher Ausdruck, wenn man das geometrische Bild einer speziellen temporären Rente in Verbindung setzt mit dem Bilde einer auf dieselbe Art aufgeschobenen Rente, wenn man also einen beliebigen Fall aus den Figuren »B» mit seinem Gegenstücke unter »A» vergleicht.

Man sieht, dass die Superposition der beiden Zeitlinien (gleiche Massstäbe vorausgesetzt) in allen sechs möglichen Unterfällen zu einer zusammenhängenden, mit Masse belegten Strecke $\overline{IT}$ führt, dem Ausdrucke für eine ununterbrochene Rentenzahlung, die im Invalidisierungszeitpunkte beginnt und bis zum Ableben des Versicherten dauert.

Da sich dabei die aus den beiden verschiedenen Ausgangsfiguren stammenden Teilstrecken $\overline{\alpha\beta}$, $\overline{\gamma\delta}$ nirgends überdecken, sondern immer $\beta = \gamma$ ist, daher die Gleichung

$$\overline{\alpha\beta} + \overline{\gamma\delta} = \overline{IT}$$

exakt gilt, hat man nun ein einfaches Hilfsmittel, um die verschiedenen Fälle temporärer Invalidenrente zu berechnen, wenn man die Werte der korrespondierenden aufgeschobenen Versicherung bereits kennt, oder um umgekehrt die letztere aus der ersteren abzuleiten.

Beispielsweise ist jede der sechs Untergruppen temporärer Invalidenrenten darstellbar als die Differenz der unmittelbar fälligen, lebenslänglichen Invalidenrente a_x^{ai} und der entsprechenden Untergruppe unter den aufgeschobenen Renten.

Dabei fallen je zwei Untergruppen, die demselben Typus angehören, unter denselben Formelausdruck, sodass schliesslich drei verschiedene Formeln erscheinen, welche den drei Auffassungsmöglichkeiten des Aufschubes von Invalidenrenten entsprechen.

Bevor wir diese aber entwickeln, möge hier eine interessante Zwischenbetrachtung angestellt werden.

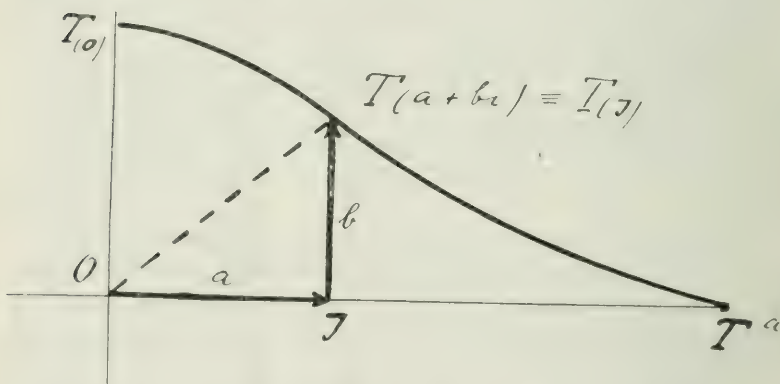
Das oben verwendete Koordinatensystem gestattet, der eben ausgesprochenen Relation zwischen Aufschub und Abkürzung von Renten eine besonders klare Form zu geben.

Doch sei zunächst eine Modifikation an demselben vorgenommen, die es ermöglicht, den Vorgängen in der Wirklichkeit bei der geometrischen Darstellung wesentlich näher zu kommen.

Für die Repräsentation eines auf den Invaliditätsfall versicherten aktiven Individuums seien folgende Konstruktionsbestimmungen getroffen.

Die Individuallinie sei eine einmal rechtwinkelig gebrochene Strecke: Ihr horizontaler Teil enthalte alle Lebenspunkte, in welchen das Individuum aktiv der Versicherung angehört, während der anschliessende vertikale Schenkel jene Zeitstrecke darstellt, in welcher der Versicherte als Invalider lebt. Verlegt man den Zeitpunkt des Versicherungsabschlusses in den Ursprung eines rechtwinkeligen Koordinatensystems, dessen Abszisse die Aktivitätsdauer des Versicherten misst. so ist der horizontale Teil der Individuallinie identisch mit OI; ihr vertikaler Teil IT werde in der positiven Ordinatenrichtung durchlaufen und man bringe hier die »Invalidenzeit» mittels desselben objektiven Zeitmassstabes zum Ausdrucke.

Das geometrische Bild, welcher man so erhält, erinnert an die Darstellung einer komplexen Grösse $T(a + bi)$ in der



Zahlenebene. Man denke sich den Vektor OT als die Summe der Vektoren $OI + IT$ ausgedrückt und erhält so die Individuallinie eines Versicherten, der *a Jahre aktiv* ist, dann noch weitere *b Jahre invalid* lebt, sodass $T(a + bi) = T_{(I)}$.

dem Todespunkt des Individuums, vorausgesetzt, dass die Invalidisierung im Zeitpunkte I erfolgt.

Bei dieser Wahl der geometrischen Repräsentation geniesst man nun den grossen Vorteil, dass die biologische Tatsache, welche sich in der höheren Sterblichkeit der Invaliden äussert, hier auch bei der Konstruktion berücksichtigt werden kann.

Bezeichnet T^a den Zeitpunkt, in welchem das Individuum OIT stürbe, wenn es *nicht* invalid würde, so äussert sich die Relation $w_x^i > w_x^a$ graphisch in der Ungleichung $IT_{(I)} < IT^a$. Die Gesamtheit der Todespunkte, welche sich ergibt, wenn man die Invalidisierungsmöglichkeit desselben Versicherten in allen Zeitpunkten der Aktivität vom Momente des Beitrittes bis zum Tode als Aktiver betrachtet $I(O \rightarrow T^a)$, ergibt somit eine kontinuerliche Kurve, die den Punkt $T_{(0)}$ mit einem Nachbarpunkte von T^a verbindet.

Es wäre leicht, auf Grund von Invaliditätstafeln Genaueres über den Verlauf der Kurve $T_{(I)}$ auszusagen.

Hier sei indessen lediglich die fundamentale Tatsache festgestellt, dass die Fläche $OT^a T_{(0)}$ umso kleiner ausfallen muss, je ausgeprägter die Lebensverkürzung ist, welche durch den Invaliditätsfall hervorgerufen wird.

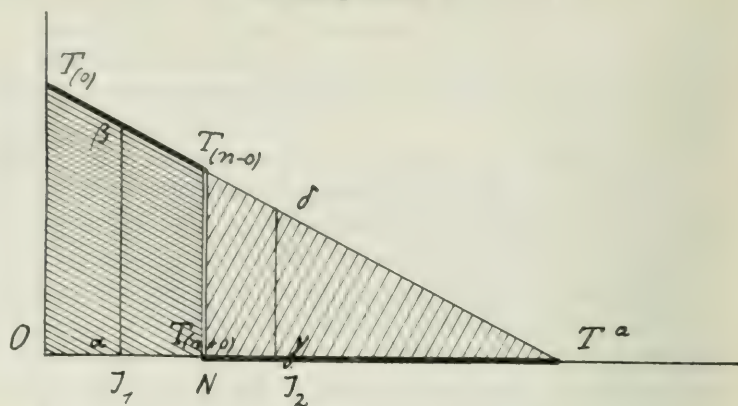
Im folgenden ist $T_{(I)}$ als die Gerade $T_{(0)} T^a$ aufgefasst unter der vereinfachenden Voraussetzung, es wirke eine Invalidisierung von konstanter Intensität auf einen und denselben Versicherten nach einer bestimmten Aktivitätsdauer in der Weise ein, dass eine proportionale Verkürzung der restlichen Lebensdauer eintrete. Man wird also in diesem Falle in dem mehr oder weniger spitzen Winkel $OT^a T_{(0)}$ ein Mass für die Lebensverkürzung des Organismus durch eine bestimmte Invalidisierung besitzen.

Dies vorausgeschickt, wollen wir nun die früher betonte Relation zwischen korrespondierenden Typen aufgeschobener und temporärer Invalidenrenten in der Ebene geometrisch interpretieren.

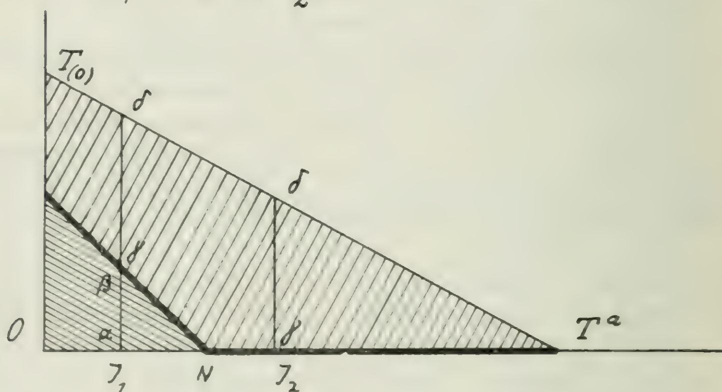
Wir sind in der Lage, mit Benützung des Begriffes der »gebrochenen Individuallinie« den Inhalt aller bisherigen Figuren in den folgenden drei zu vereinigen, ohne dass dabei die einzelnen Aussagen an Klarheit verlieren; dieselben wer-

Aufschub und *Abkürzung* von *Renten* geometrisch in der Ebene dargestellt.

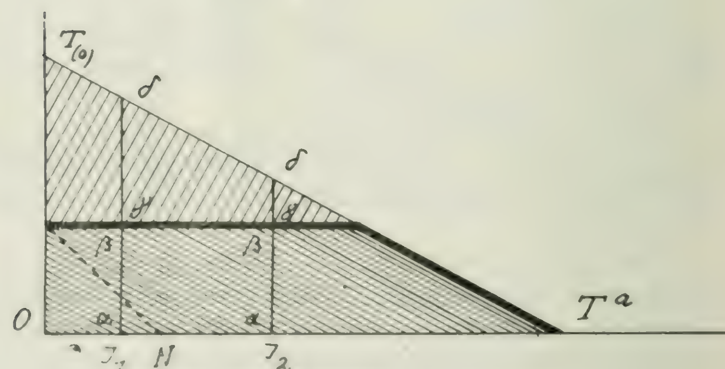
Typus I.



Typus II.



Typus III.



Figuren C[illegible].

den vielmehr bei dieser Gegenüberstellung exakter und den wirklichen Vorgängen gerechter.

Man betrachte die Kurven $z_1 = f_{\mathrm{I}}(I)$, $z_2 = f_{\mathrm{II}}(I)$ und $z_3 = f_{\mathrm{III}}(I)$, welche wie früher in den Bildern $\mathrm{B}^*_{\mathrm{I}}$, $\mathrm{B}^*_{\mathrm{II}}$ und $\mathrm{B}^*_{\mathrm{III}}$ die *Zahlungsdauer* der drei Auffassungstypen *temporärer* Invalidenrenten *als Funktion der Aktivitätsdauer* des Versicherten wiedergeben.

Das Gebiet, welches von den beiden Koordinatenachsen und der kontinuierlichen Kurve der Todespunkte $y = T_{(I)}$ begrenzt ist, wird bei den Typen II und III durch die »Rentenauszahlungskurve» $Z = f(I)$ in zwei Teilgebiete zerlegt.

Bei Typus I ist dies zunächst *nicht* der Fall, da die Auszahlungskurve hier aus zwei getrennten Strecken besteht, die in ihrer Gänze auf dem Umfange des betrachteten Gebietes liegen; doch genügt es, die zur Ordinate parallele Gerade $x = n$ zu ziehen und die im Innern des Gebietes liegende Strecke derselben $NT_{(n-o)}$ mit Einschluss der beiden Endpunkte als Bestandteil der Auszahlungskurve anzusehen, um auch in diesem Falle von *zwei Gebieten* sprechen zu können, in welche die »*Invaliditätsfläche*» eines versicherten Aktiven durch die Kurve $z = f(I)$ *geteilt wird.*

Dann durch die Hilfsstrecke $NT_{(n-o)}$ wird die Verbindung der beiden Punkte

$$y = f_{\mathrm{I}}(N + 0) \text{ und } y = f_{\mathrm{I}}(N - 0)$$

hergestellt und damit die Unstetigkeit der Funktion $y = z_{\mathrm{I}} = f_{\mathrm{I}}(I)$ beseitigt.

Dass die Invaliditätsfläche durch die Auszahlungskurven der temporären Invalidenrenten vom Typus II und III in zwei Teilgebiete zerfällt, erübrigt eines Beweises.

In den Figuren »C» sind mittels *verschiedener Schraffierung* die beiden Teilgebiete jedes Typus hervorgehoben; nach der Lage relativ zu der erzeugenden Auszahlungskurve soll im folgenden die Bezeichnung »*unteres*» und »*oberes Teilgebiet*» verwendet werden.

Es sei nun die Frage gestellt: Welche Strecke einer beliebig herausgegriffenen Individuallinie gehört dem »oberen Teilgebiete» an, liegt also zwischen den beiden Kurven $y = f(I)$ und $y = T_{(I)}$?

Man findet, indem man auf die Figuren A I, II, III zurückgeht, unmittelbar, dass das gefragte Stück der Individuallinie präzise jenen Zeitraum definiert, während dessen Verlauf eine Auszahlung von Rente an den Invaliden erfolgt, falls er auf *denjenigen Typus* λ (I, II, III) einer *aufgeschobenen* Invalidenrente versichert ist, den die *Auszahlungskurve* $y = f_\lambda(I)$ in jedem betrachteten Einzelfalle besitzt.

Es sind nämlich die Strecken $\gamma\delta$ in den Figuren »C», wie man sich leicht überzeugt, nicht anderes als die mit Masse belegt gedachten Auszahlungsstrecken $\gamma\delta$ aus den Figuren »A» mit dem einzigen Unterschiede, dass sie nun in ihrer Länge *verkürzt* erscheinen, in dem Masse, als die Lebensdauer des Invaliden hinter jener des (gleichaltrigen) Aktiven zurückbleibt.

Der *Auszahlungszeitraum der aufgeschobenen Invalidenrente* kann daher, wenn man nun die Betrachtung auf *alle* Invalidisierungsmöglichkeiten: $I(O \rightarrow T^a)$ des dargestellten aktiven Individuums erstreckt, durch ein bestimmtes Gebiet definiert werden, das man sich aus den Strecken $\gamma\delta$ während kontinuierlicher Verlegung des Invaliditätseintrittes enstanden denken kann: Es ist dies — wie unmittelbar ersichtlich — identisch dem »oberen Teilgebiete» der Invaliditätsfläche und sein Inhalt ist in Übereinstimmung mit der eben angedeuteten fiktiven Erzeugungsmöglichkeit gegeben durch das Integral

$$\int_0^L \gamma\delta \, dt,$$

wobei $L = OT^a$ und $\gamma\delta$ als Funktion der Aktivitätsdauer OI aufzufassen ist.

Man findet analog, dass das Gebiet des Auszahlungszeitraumes *temporärer* Invalidenrenten unter Berücksichtigung aller Invalidisierungsmöglichkeiten für den Aktiven identisch ist mit dem »unteren Teilgebiete», also dem Bereiche innerhalb der positiven Koordinatenachsen und der Auszahlungskurve $y = f_\lambda(I)$ — λ = I, II, III —, was ja schon aus dem Begriffe der letzteren folgt.

Da $f_{II}(I)$ und $f_{III}(I)$ stetig sind, aber auch $f_I(I)$ integrabel ist, kann man mit allgemeiner Giltigkeit schreiben:

$$\int_0^L f(I) = \int_0^L \overline{\alpha\beta}\, dt = \int_0^\infty \alpha\beta\, dt.$$

Wiederum erscheint $\alpha\beta(I)$ in den Figuren »C« in seiner Länge *verkürzt* gegenüber »B«, wie es der kürzeren Lebensdauer des Invaliden entspricht.

Mit dieser letzten Behauptung ist aber kein Widerspruch gegenüber der früheren Darstellung gegeben, wie man aus folgender Überlegung erkennt:

Benützt man zur geometrischen Repräsentation des versicherten Aktiven eine gerade Strecke OT, wie dies in »A» und »B» geschehen ist, so muss man die Möglichkeit zulassen, längs derselben Strecke *zwei objektiv verschiedene Massstäbe des Zeitverlaufes* anzulegen. Dass dieser Vorbehalt tatsächlich *notwendig* ist, sieht man beispielsweise indirekt, wenn man Invalidisierungsfälle nach verschiedener Aktivitätsdauer einander gegenüberstellt. Aus jeder der Figuren A I bis B III lesen wir nämlich die folgende Doppelgleichung direkt ab

$$OI_1 + I_1T = OI_2 + I_2T = OT.$$

Dieselbe wäre aber *falsch*, wenn man die beiden Teilstrecken mit *demselben* Zeitmassstabe objektiv messen wollte[1]; sie hat aber dennoch volle subjektive Giltigkeit für den Versicherten, wie ja auch alle übrigen aus den Figuren »A» und »B» abzulesenden Relationen subjektiv richtig sind.

Nach dieser Zwischenbemerkung kehren wir nun zur ebenen Darstellung in »C» zurück, wo die Auszahlungsstrekken $\overline{\alpha\beta}$ und $\overline{\gamma\delta}$ in verkürzter Länge erscheinen und mit dem objektiv gleichen Massstabe in der Ordinatenrichtung gemessen sind, wie die Aktivitätsdauer längs der Abszisse.

Wir können mit dem Anspruche auf Giltigkeit für alle

---

[1] Sie würde nämlich aussagen, dass die Lebensdauer des Versicherten unabhängig sei vom Zeitpunkte des Invaliditätseintrittes, was wegen $w_x^i > w_x^a$ unrichtig ist.

drei Typen temporärer und gleichartiger aufgeschobener Invalidenrenten die Gleichung aufstellen

$$F = \int_0^L \alpha\beta\, dt + \int_0^L \gamma\delta\, dt = \int_0^L (\alpha\beta + \gamma\delta)\, dt = \int_0^L I\, T_I dt.$$

Dabei ist unter F die Fläche des *Gesamtgebietes* zwischen den positiven Koordinatenachsen und der *Kurve der Todespunkte* T_I — das ist also die »*Invaliditätsfläche*» — verstanden.

Man kann dieses »*Gesetz der Summation*» auch für die *Überlebensrenten* bestätigen.

Die Analogie zwischen Invaliditätsanwartschaften und Überlebensansprüchen äussert sich bei der geometrischen Darstellung in der Ebene in typischer Form.

Der horizontale Bestandteil jeder gebrochenen Individuallinie eines Aktiven stellt, wenn es sich um eine *einseitige* Überlebensrente, beispielsweise Witwenrente handelt, den Zeitraum vor, innerhalb dessen das Ehepaar verbunden lebt, während der vertikale Teil die Zeit misst, um welche die Frau den Mann überlebt.

Aber man erkennt sofort, dass die Kurve $y = T_{(y)}$ von wesentlich anderer Form sein muss als $y = T_{(I)}$, an deren Stelle sie im geometrischen Bilde tritt; auch sieht man, dass im allgemeinen ein viel grösseres Gebiet des ersten Quadranten abgeschnitten wird, dessen Inhalt insbesondere vom Alter der Frau abhängig ist; man könnte es (entsprechend der früheren »Invaliditätsfläche») die »*Überlebensfläche*» der Witwe nennen. Aber auch hier zerfällt F in jedem Falle durch die Auszahlungskurve der *temporären* Witwenrente in ein »unteres» und »oberes» Teilgebiet, vorausgesetzt, dass man die Unstetigkeitsstelle bei Typus I in der früher angegebenen Weise beseitigt hat.

Man bestätigt sogleich, dass das »untere Teilgebiet der Überlebensfläche» identisch ist dem Auszahlungszeitraume einer temporären Witwenrente, falls man alle zeitlichen Möglichkeiten für den Tod des Mannes in Betracht zieht;

dass andererseits das »obere» Teilgebiet der Überlebensfläche jenen zeitraum beschreibt, innerhalb dessen die Aus-

zahlung einer auf korrespondierende Art aufgeschobenen Witwenrente erfolgt.

Auch alle übrigen Schlussfolgerungen liessen sich in die Begriffe einseitiger Überlebensrenten umsetzen. Für die Witwenrente nimmt die oben angegebene Gleichung nun die Form an

$$F = \int_0^\infty \overline{\alpha\beta}\, dt + \int_0^\infty \overline{\gamma\delta}\, dt = \int_0^\infty (\overline{\alpha\beta} + \overline{\gamma\delta}) dt = \int_0^\infty \overline{T_{(x)} T_{(y)}}\, dt.$$

Wenn nun F als der Inhalt der »*Überlebensfläche des Begünstigten*» definiert wird, stellt diese Gleichung die Bestätigung des »*Gesetzes der Summation*» für einseitige Überlebensrenten jeder Art vor.

Es liegt nahe, auf analoge Weise auch die Darstellung der *gegenseitigen* Überlebensrenten in der Ebene zu versuchen, indem man als horizontalen Teil der gebrochenen Repräsentationslinie die Zeit verbundenen Lebens ansieht und den vertikalen Teil als jene Zeitstrecke definiert, während welcher nur mehr eine Person des versicherten Paares am Leben ist.

Doch ist es klar, dass dieser Vertikalteil in seiner Länge im allgemeinen verschieden ausfallen wird, je nachdem die Person X oder Y im Zeitpunkte $T_{(1)}$ ablebt, entsprechend der Altersverschiedenheit der beiden Versicherten.

Man wird also als geometrischen Ort der gesamten Punkte $T_{(2)}$ anstelle der früheren *einfachen* Kurve $y = T_{(I)}$ nun im allgemeinen *zwei getrennte Kurven* erhalten

$$y_1 = T^y_{(2)} \ldots y_2 = T^x_{(2)}$$

je nachdem man annimmt, dass die Person X, beziehungsweise (im Falle y_2) die Person Y als *erste* stirbt.

Es stünde natürlich das Übereinkommen frei, dass man aus den getrennten zwei Kurven nach irgend einem Gesetze (etwa Bildung des arithmetischen Mittels der Funktionswerte gleicher Abszisse) eine einzige Zwischenkurve ermittle und diese als angenäherte Kurve des zweiten Todes ansehen solle. Damit würde dann auch hier für den Bereich F ein bestimmter Inhalt resultieren, der ein Mittel aus *zwei verschie-*

den grossen »Überlebensflächen» (im obigen Beispiele das arithmetische Mittel) darstellen würde, welche man den Personen des Paares *X und Y einzeln zuordnen* kann. Zu einer derartigen Annäherung wäre man umso berechtigter, je geringer die gegenseitigen Abweichungen der beiden Kurven y_1 und y_2 in einem gegebenen Falle sind.

Die Formeln für die temporären Invalidenrenten.

Die Bezeichnung »temporäre Invalidenrente» ist für alle drei oben definierten Auffassungen allgemein üblich, teilweise aber *sprachlich ungenau:* Denn im Falle I ist nur der Versicherungs-*Anspruch* temporär.

Wenn wir die eingangs getroffene Fiktion der *Trennung des Invalidisierungs- und Sterbeprozesses des aktiven Individuums beibehalten, gelangen wir auch hier zu wesentlicher Vertiefung der Probleme, gleichzeitig aber auch zu grösster Übersichtlichkeit der formalen Ausdrücke.*

Typus I.
$$ {}_n a_x^{ai} = \int_0^n \nu_{x+t}\, e^{-\int_0^t \left(\mu_{x+t}^{aa} + \delta\right) dt}\, a_{x+t}^i\, dt = $$
$$ = \int_0^n \nu_{x+t}\, e^{-\int_0^t \left(\nu_{x+t} + \mu_{x+t}^{a} + \delta\right) dt}\, a_{x+t}^i\, dt, $$

also ein vollständiges formelles Analogon zu

$$ {}_n a_{xy} = \int_0^n \mu_{x+t}\, e^{-\int_0^t \left(\mu_{x+t} + \mu_{y+t} + \delta\right) dt}\, a_{y+t}\, dt, $$

der ersten Formel JÖRGENSEN's für temporäre Überlebensrenten (§ 69 »Theorie der Leb. Vers.»). Verwendet man für letzteren Wert die Differenzdarstellung

$$ {}_n\overset{1}{a}_{xy} = a_{xy} - {}_{n|}\overset{1}{a}_{xy} = a_{xy} - {}_nE_{xy}\, a_{x+n\, y+n}, $$

so gibt das entsprechende Gegenstück

$$ {}_n\bar{a}_x^{ai} = a_x^{ai} - {}_n a_x^{ai} = a_x^{ai} - {}_np_x^{aa}\, a_{x+n}^{ai} $$

den Zusammenhang zwischen aufgeschobenen und temporären Invalidenrenten des ersten Typus und damit den formellen Ausdruck für die früher beobachtete Beziehung zwischen den geometrischen Repräsentanten in A_{I} und B_{I} wieder.

Typus II. Für die temporäre Invalidenrente des zweiten Typus hat man den Ausdruck »*aufhörende Invalidenpension*» eingeführt, welcher die absolut feste Begrenzung der Zahlungsdauer dieser Renten andeuten soll. Es wäre sehr zweckmässig, das hierfür übliche Zeichen $a_{x\overline{n}|}^{ai}$ *regelmässig*, aber auch *ausschliesslich* für diesen Versicherungswert zu verwenden (also *nicht* zur Bezeichnung der eben behandelten ${}_n^{\mathrm{I}}\bar{a}_x^{ai} - {}_n\bar{a}_x^{ai}$).

Dadurch würden viele Formeln an Klarheit gewinnen, zumal ja der Typus II der temporären Invalidenrente in der Praxis eine ausserordentlich wichtige Rolle spielt. Es sei hier nur auf ein einfaches Beispiel hingewiesen.

Die »*Zuschlagsprämie für die Befreiung von der Prämienzahlung im Falle eintretender Invalidität*» kann vorteilhaft so ermittelt werden, dass man nach der Prämie fragt, welche der Versicherte für eine »aufhörende Invalidenpension» in der Höhe der jährlich fälligen Prämie zu zahlen hätte:

$$ Z = P^i - P = a_{x\overline{n}|}^{ai} \cdot P $$

Das heisst: Man lässt also mit der Hauptversicherung — derzufolge ja der Versicherte durch n Jahre hindurch Prämie zu zahlen hat, auch wenn er invalid wird — eine »*Invalidenzusatzversicherung*» parallel laufen. Man besitzt dabei den weiteren Vorteil, einen eventuell vereinbarten *Rentengenuss im Falle der Invalidität* als einfachen Summanden in die Rechnung mit einbeziehen zu können.

Aus der Definition des Typus II ergibt sich unmittelbar

$$a^{ai}_{x\overline{n|}} = \int_0^n \nu_{x+t}\, e^{-\int_0^t \left(\mu^{aa}_{x+t} + \delta\right) dt} \; {}_{n-t}a^i_{x+t}\, dt$$

oder, wegen

$${}_{n-t}a^i_{x+t} = 0 \text{ für } t > n$$

$$a^{ai}_{x\overline{n|}} = \int_0^\infty \nu_{x+t}\, e^{-\int_0^t \left(\nu_{x+t} + \mu^a_{x+t} + \delta\right) dt} \; {}_{n-t}a^i_{x+t}\, dt.$$

Dieser Gleichung entspricht als Gegenstück

$${}^{II}_{n}a_{xy} = \int_0^\infty \mu_{x+t}\, e^{-\int_0^t \left(\mu_{x+t} + \mu_{y+t} + \delta\right) dt} \; {}_{n-t}a_{y+t}\, dt$$

das ist JÖRGENSEN's zweite Gleichung für die temporäre Überlebensrente (Theorie der Leb. Vers. § 69).

Verwertet man hierfür die bekannte Darstellung als Differenz einer einfachen und einer Verbindungsrente

$${}^{II}_{n}a_{xy} = {}_{n}a_{y} - {}_{n}a_{xy}$$

so gibt die Übertragung auf das Gebiet der Invaliditätsanwartschaften die Gleichung[1]

$$a^{ai}_{x\overline{n|}} = {}^{(a)}_{n}a_{x} - {}_{n}a^{a}_{x}$$

welche besagt, dass die temporäre Invalidenrente des Typ. II auch aufgefasst werden kann als die Differenz einer n jährigen »Leibrente des x jährigen Aktiven» und seiner n jährigen Aktivitätsrente. Eine kurze Überlegung bestätigt, dass das Ergebnis tatsächlich die *»mit n Jahren aufhörende Invalidenpension»* sein muss.

Auch im Falle II kann man bei der Differenzdarstellung von der lebenslänglichen Rente ausgehen und findet die Gleichung

[1] Rechtfertigung der gewählten Bezeichnungsweise erfolgt auf Seite 144.

$$ {}^{\text{II}}_{|n}\bar{a}_{x|y} = \bar{a}_{x|y} - {}^{\text{II}}_{n|}a_{x|y} $$

sowie ihr Korrelat unter den Invaliditätswerten

$$ a^{ai}_{x\overline{n}|} = \bar{a}^{ai}_{x} - {}_{n|}a^{ai}_{x} $$

als formelle Bestätigung des an den geometrischen Bildern für den Typus II abgelesenen »Gesetzes der Summation».

Man verifiziert leicht, dass die auf verschiedenen Wegen gewonnenen Resultate identisch sind, dass also gilt:

$$ {}^{(a)}_{|n}\bar{a}_{x} - {}_{|n}a^{a}_{x} - \bar{a}^{ai}_{x} - {}_{n|}a^{ai}_{x} - a^{ai}_{a\overline{n}|}. $$

Es ist eben das erste eine »qualitative», das zweite eine »quantitative» Differenzdarstellung desselben versicherungstechnischen Barwertes.

Im Laufe späterer Betrachtungen wird man auch noch zu jenen Formeln gelangen, welche gestatten, die »aufhörende Invalidenrente» aus der temporären Invalidenrente I[ter] Art abzuleiten.

Dieser Weg ist der in der Praxis bevorzugte, weil er zu dem einfachen Schema führt:

$$ a^{ai}_{x\overline{n}|} = {}_{|n}\bar{a}^{ai}_{x} - \text{Korrekturglied}. $$

Typus III der temporären Invalidenrenten wäre der Versicherungswert

$$ \int_0^\infty \nu_{x+t}\, e^{-\int_0^t \left(\mu^{aa}_{x+t}+\delta\right) dt} \; {}_{n}a^{i}_{x+t}\, dt $$

und somit *wegen* $\mu^{aa}_{x+t} = \nu_{x+t} + \mu^{a}_{x+t}$ das vollständige Analogon zu Jörgensen's

$$ {}^{\text{III}}_{n}a_{x|y} = \int_0^\infty \mu_{x+t}\, e^{-\int_0^t (\mu_{x+t}+\mu_{y+t}+\delta) dt} \; {}_{n}a_{y+t}\, dt. $$

Obwohl eine Versicherung auf eine derartige Invalidenrente von bestimmter Auszahlungsdauer als solche wohl nicht vor-

kommen dürfte, ist der obige Ausdruck doch für den Fall praktisch verwertbar, dass die Verpflichtung dem Invalidgewordenen gegenüber in einer *ein*maligen Leistung besteht:

$$A_x^{ai} = \int_0^\infty \nu_{x+t}\, e^{-\int_0^t (\mu_{x+t}^{aa} + \delta)\, dt}\, dt$$

ist die »*Versicherung auf das Invalidenkapital 1*» und *stellt in dem dargelegten weiteren Sinne das »Überlebenskapital des Aktiven an den Invaliden»* vor, wie die Gegenüberstellung mit

$$A_{xy}^1 = \int_0^\infty \mu_{x+t}\, e^{-\int_0^t (\mu_{x+t} + \mu_{y+t} + \delta)\, dt}\, dt$$

zeigt.

Man könnte die Kapitalversichering auf den Invaliditätsfall verallgemeinern, vor allem vom Zeitpunkte der Invalidisierung abhängig machen; das »variable Invalidenkapital» hat dann die Gestalt

$$(vA)_x^{ai} = \int_0^\infty (\alpha + \beta t)\, \nu_{x+t}\, e^{-\int_0^t (\nu_{x+t} + \mu_{x+t}^{a} + \delta)\, dt}\, dt.$$

Man vergleiche damit das »variable Überlebenskapital.»

$$(vA)_{xy} = \int_0^\infty (\alpha + \beta t)\, \mu_{x+t}\, e^{-\int_0^t (\mu_{x+t} + \mu_{y+t} + \delta)\, dt}\, dt.$$

Aus den bisherigen Betrachtungen geht deutlich hervor, dass der *Aktivitätszustand formell* als eine »*Verbindung zu zweien» behandelt* werden kann, wenn man ihn vom *Gesichtspunkte der beiden gesonderten Ausscheideursachen Invalidität und Sterblichkeit beurteilt.*

Gleichzeitig ergeben sich aber in diesem Zusammenhange die *Grenzen der angedeuteten Analogie zwischen Invaliditäts- und Überlebensansprüchen.*

Es besteht ja ein fundamentaler Unterschied in der gegenseitigen Stellung der Sterbekräfte zweier *verschiedener* Personen $\mu_x : \mu_y$ einerseits [da bei deren Bestimmung die Invalidität keine selbständige Rolle spielt, kann man sie als »gemischte» Sterbekräfte bezeichnen] und der gegenseitigen Relation von »reiner Invalidisierungskraft» und »reiner Sterbekraft» $\nu_x : \mu_x^a$ *desselben* aktiven Individuums anderserseits.

Die beiden ersteren kann man nämlich als voneinander unabhängig postulieren: BOHLMANN's *Axiom V* in seinem Referate über Versicherungsmathematik in der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften schliesst mit dem Satze: »Hieraus folgt die *Unabhängigkeit* beliebig vieler Sterbens- und Überlebenswahrscheinlichkeiten, wenn sie sich auf lauter *verschiedene* Individuen beziehen».

Diese Forderung ist für $\nu_x : \mu_x^a$ *nicht erfüllt;* es ist vielmehr schon *begrifflich ausgeschlossen*, dass ν_x von μ_x^a unabhängig wirken könne.

In den Formeln äussert sich nun dieser im Wesen der Sache begründete Unterschied zwischen Überlebens- und Invaliditätswerten darin, dass man zu *jenen* Überlebensversicherungen, bei welchen die *gegenseitige Unabhängigkeit aller Sterbekräfte unerlässlich ist, keine Korrelativa* unter den Invalidenversicherungen *finden kann*, beziehungsweise, dass deren *korrelative Begriffe im Bereiche der Invalidität nicht existieren.*[1]

Indessen gibt es aber Grenzfälle, wo man auch bei der Übertragung solcher Überlebenswerte in die Invaliditätsbegriffe rein formal zu einem verwendbaren versicherungstechnischen Barwerte gelangt.

Es ist nun interessant zu bemerken, dass dabei der *korrespondierende Begriff selbst nicht mehr* zu existieren braucht! So stellt beispielsweise das Invalidenkapital

$$\bar{A}_x^{ai} = \int_0^\infty \nu_{x+t}\, e^{-\int_0^t \left(\nu_{x+t} + \mu_{x+t}^a + \delta\right) dt}\, dt$$

[1] Die beiden Behauptungen sind nicht identisch, wie sich aus den folgenden Überlegungen ergibt; der Umfang des ersteren Begriffes ist nämlich weiter als der des letzteren.

das Analogon vor zu

$$A_{\overset{1}{x}y} = \int_0^\infty \mu_{x+t} e^{-\int_0^t (\mu_{x+t}+\mu_{y+t}+\delta) dt} dt,$$

wie bereits oben gezeigt wurde.

Fragen wir nun nach dem Korrelate zu der umgekehrten Versicherung

$$A_{x\overset{1}{y}} = \int_0^\infty \mu_{y+t} e^{-\int_0^t (\mu_{x+t}+\mu_{y+t}+\delta) dt} dt,$$

das heisst nach der Umkehrung von dem Versicherungswerte: »Analogon zu $[A_{\overset{1}{x}y}]$« — also nach einer »Umkehrung des Invalidenkapitales«.

A_x^{ai} konnte als »einseitiges Überlebenskapital des Aktiven an den Invaliden im weiteren Sinne« definiert werden, die nun gesuchte Umkehrung müsste daher eine »einseitige Überlebensversicherung des Invaliden an den Aktiven sein«: So kann aber ein Begriff auch im weitesten Sinne nicht definiert werden, da er eine contradictio in adjecto enthalten würde.

Nichtsdestoweniger bleiben wir auf dem Boden der Wirklichkeit, wenn wir rein formell das Korrelat zum versicherungstechnischen Werte von $A_{x\overset{1}{y}}$ bilden.

Wir finden nämlich so

$$\tilde{W}[A_{x\overset{1}{y}}] = \int_0^\infty \mu^a_{x+t} e^{-\int_0^t (\nu_{x+t}+\mu^a_{x+t}+\delta) dt} dt.$$

Dabei ist $\tilde{W}[\cdots]$ als Symbol des Begriffes *»Analogie-Wert«* eingeführt worden (W mit Ähnlichkeitszeichen als Index) und bedeutet demnach jene Invaliditätsanwartschaft, welche dem eingeklammerten Versicherungswerte als Korrelat entspricht.

Beispielsweise sagt die Gleichung

$$a_x^{ai} = \tilde{W}[a_{xy}]$$

aus: »a_x^{ai} *ist ein formeller Analogie-Wert von* a_{xy}». Durch die Einführung dieses Symbols gewinnen viele der folgenden Formeln an Kürze und Klarheit.

Der eben gewonnene analytische Ausdruck für $\tilde{W}[\bar{A}_{xy}^1]$ stimmt, wie man unmittelbar erkennt, überein mit dem Barwerte einer »Versicherung auf den Todesfall als Aktiver» und wird zweckmässig mit ${}^2\bar{A}_x^a$ bezeichnet; später werden wir zu demselben Versicherungswerte auf einem anderen Wege gelangen, wobei sich dann auch die hier getroffene Wahl in der Bezeichnung von selbst rechtfertigen wird: Zu dem in Frage stehenden Invaliditäts-Werte führt nämlich auch die Bildung von $\tilde{W}[A_{xy}^2]$ (vergl. Seite 152) und auf jenem zweiten Wege erweist sich auch der Begriff der Überlebensversicherung selbst in das Gebiet der Invaliditätswerte übertragbar.

Das Ergebnis des hier betrachteten Falles hingegen ist folgende Tatsache:

Der Mangel eines zu $\bar{A}_{xy}^1$ *korrespondierenden Begriffes hindert nicht die Existenz jenes versicherungstechnischen Wertes* unter den Invaliditätsanwartschaften, welcher als das *vollständige Korrelat* angesehen und *behandelt* werden kann.

Dass es sich nämlich hier nicht bloss um eine rein formale Analogie der beiden Gegenstücke handelt, vielmehr um eine *tatsächliche Äquivalenz* der beiden Seiten der Gleichung

$${}^2A_x^a = \tilde{W}[A_{xy}^1],$$

erkennt man beispielsweise bei der Vereinigung der beiden einseitigen Versicherungswerte des vorliegenden Falles.

Für die Überlebensversicherungen gibt die Summe

$$\bar{A}_{xy}^1 + \bar{A}_{x\dot{y}}^1 = \int_0^\infty (\mu_{x+t} + \mu_{y+t}) e^{-\int_0^t (\mu_{x+t} + \mu_{y+t} + \delta) dt} dt = \bar{A}_{xy},$$

also das »gegenseitige Überlebenskapital», welches fällig wird mit der Auflösung der Verbindnng (xy). Aber auch die

Summation der Korrelate unter den Invaliditätswerten führt zu richtigem Ergebnisse

$$A_x^{ai} + {}^2A_x^a = \int_0^\infty (\nu_{x+t} + \mu_{x+t}) e^{-\int_0^t (\nu_{x+t} + \mu^a_{x+t} + \delta) dt} dt = A_x^a,$$

zu einer *Versicherung, welche fällig wird beim Ausscheiden aus dem Zustande der Aktivität*, wie man noch deutlicher aus folgender zusammengezogener Form erkennt

$$A_x^a = \int_0^\infty \mu^{aa}_{x+t} e^{-\int_0^t (\mu^{aa}_{x+t} + \delta) dt} dt.$$

Diese letzte Gleichung gibt einen besonders klaren Einblick in die bei der bisherigen Analyse von Invaliditätsanwartschaften zu Grunde gelegte Auffassung, dass der Aktivitätszustand formell »eine Verbindung zu zweien im weiteren Sinne» vorstellt, — insbesondere wenn man die Formel für A_{xy} ein wenig modifiziert:

Man versteht üblicher Weise unter μ_{xy} die »Auflösungsintensität» des Paares (xy); um sie aus den beiden Sterbekräften der verbundenen Personen zu ermitteln, kann man von der evidenten Gleichung ausgehen

$$1 - p_{xy} = q_x + q_y - q_{xy}$$

$$\mu_{xy} dt = \mu_x dt + \mu_y dt - \mu_x \mu_y (dt)^2$$

und findet unter Vernachlässigung des letzten Summanden als unendlich kleiner Grösse zweiter Ordnung

$$\mu_{xy} = \mu_x + \mu_y.$$

Unter Benützung des Begriffes des *Auflösungsintensität* kann man das gegenseitige Überlebenskapital auch schreiben

$$A_{xy} = \int_0^\infty \mu_{x+t, y+t} e^{-\int_0^t (\mu_{x+t, y+t} + \delta) dt} dt.$$

Ein Vergleich mit dem oben gewonnenen Versicherungswerte

$$A_x^a = \int_0^\infty \mu_{x+t}^{aa} e^{-\int_0^t (\mu_{x+t}^{aa} + \delta)\, dt} dt$$

zeigt auf das deutlichste, dass der *Abbau des Standes der Aktiven mit einer fingierten »Intensität« erfolgt, deren Wirkung ganz analog ist der »Auflösungsintensität eines Paares«.*

Stellte der Versicherungswert: $\tilde{W}[A_{xy}^{1}]$, wie man sah, gleichsam einen »Grenzfall« vor für die Zulässigkeit der Analogiebildung, indem hier wohl noch die Form und damit der mathematische Wert, nicht mehr aber der Begriff des Ausgangswertes in das Gebiet der Invaliditätsanwartschaften übertragbar war, — so hört die Analogie auch rein formal naturgemäss ganz auf, wenn man zu den eingangs angeführten Invalidenrenten, die ja durchwegs »einseitige Überlebensversicherungen im weiteren Sinne« darstellten, nun die entsprechenden »gegenseitigen« Ansprüche aufstellen oder wenn man nach den »Umkehrungen« jener einseitigen Anwartschaften suchen wollte.

Mit dem Wirksamwerden der reinen Sterblichkeitskraft des Aktiven μ_x^a ist begrifflich jeder weitere Einfluss der Invalidisierungskraft ν_x abgeschnitten: Es is daher klar, dass die gesuchten beiden Ergänzungsgruppen, also die gegenseitigen und umgekehrten Anwartschaften *nur dann* überhaupt noch Versicherungswerte (*unter anderem Namen*, als es der Analogie entsprechen würde) *vorstellen können*, falls in dem Zeitpunkte, da μ_x^a wirksam wird, *bloss eine einmalige Kapitalauszahlung fällig wird.*

Unter dieser besonderen Voraussetzung ist ja das *weitere Schicksal des Versicherten ohne Belang für die Versicherungsleistung. Darin* aber, dass diese letztere nun *nicht mehr an einen »überlebenden Partner des Paares« sondern bloss an Hinterbliebene des aktiv Verstorbenen erfolgen kann, liegt gleichzeitig die Begründung* der festgestellten Tatsache, dass der auf dem Wege formaler Analogie gewonnene Versicherungswert nun eine *Namensänderung und Begriffswechsel* erfahren muss, wenn man ihn direkt definieren will.

Die Korrelationen, welche zwischen den Barwerten der Invalidenversicherung und jenen verbundener Leben bestehen, können indessen auch bei der Analyse eines *viel weiteren Kreises* von Invaliditätswerten, als er bisher betreten wurde, sehr wertvolle Dienste leisten.

Man gelangt auf diesem Wege beispielsweise auch für die »*gemischten Ansprüche Aktiver*« zu geschlossenen analytischen Darstellungsformen, wie im folgenden an einigen einfachen Beispielen gezeigt werden soll.

Bezeichnet man die lebenslängliche »Leibrente« eines gegenwärtig x jährigen Aktiven mit ${}^{(a)}a_x$, wobei die Einklammerung darauf hindeuten soll, dass der Anspruch auf den Rentenbezug nicht an den Zustand der Aktivität, sondern lediglich an das »Leben des Rentners überhaupt« gebunden ist, so kann man schreiben

$$ {}^{(a)}a_x = a^a_x + a^{ai}_x , $$

wobei der erste Summand die »Aktivitäts-Rente« vorstellt, zu deren Bezeichung im Hinblicke auf das für die Leibrente des Aktiven gewählte Symbol nun also der *einfache* Index »*a*« genügt.[1] Man hat unmittelbar

$$ a^a_x = \int_0^\infty e^{-\int_0^t (\mu^{aa}_{x+t} + \delta)\, dt}\, dt $$

in vollständiger Analogie zur Verbindungsrente

$$ a_{xy} = \int_0^\infty e^{-\int_0^t (\mu_{x+t} + \mu_{y+t} + \delta)\, dt}\, dt, $$

[1] Der Vorteil dieser Bezeichnungsweise liegt darin, dass man nun die mehrfachen Indizes zur Verfügung behält, um die Aktivitätsverbindungsrente einer Gruppe zu bezeichnen, in welcher sich mehrere Aktive befinden. So wäre a^{aa}_{xyz} beispielsweise eine Rente, gebunden an das Bestehen der Verbindung (xyz) und den Aktiv Zustand der *beiden* Personen (x) und (y). — Eine *prinzipielle Symbolik fur alle Gruppen-Anwartschaften* werden wir an späterer Stelle geben (Seite 167 u. 168), sie wird auch die obige Vereinbarung umfassen.

insbesondere, wenn man die früher definierte *Auflösungsintensität des Paares* (xy) einführt

$$a_{xy} = \int_0^\infty e^{-\int_0^t (\mu_{x+t,\,y+t} + \delta)\,dt}\,dt.$$

Für die *lebenslängliche Leibrente eines Aktiven* ergibt sich somit die Summe

$$^{(a)}a_x = \int_0^\infty e^{-\int_0^t (\mu^{aa}_{x+t} + \delta)\,dt}\,dt + \int_0^\infty \nu_{x+t}\, e^{-\int_0^t (\mu^{aa}_{x+t} + \delta)\,dt}\, a^i_{x+t}\,dt =$$

$$= \int_0^\infty [1 + \nu_{x+t} a^i_{x+t}]\, e^{-\int_0^t (\mu^{aa}_{x+t} + \delta)\,dt}\,dt.$$

Ferner wird die »kurze Leibrente des Aktiven» $^{(a)}_{\ n}a_x$ darstellbar als Summe einer kurzen Aktivitätsrente und einer temporären Invalidenrente des Typus II, also »aufhörenden Invalidenpension» $a^{ai}_{x\overline{n}|}$.

Der gemischte temporäre Versicherungswert erscheint dann in der Form

$$^{(a)}_{\ n}a_x = {}_n\bar{a}^a_x + \bar{a}^{ai}_{x\overline{n}|}$$

$$^{(a)}_{\ n}a_x = \int_0^n e^{-\int_0^t (\mu^{aa}_{x+t} + \delta)\,dt}\,dt + \int_0^n \nu_{x+t}\, e^{-\int_0^t (\mu^{aa}_{x+t} + \delta)\,dt}\, {}_{n-t}a^i_{x+t}\,dt$$

$$^{(a)}_{\ n}a_x = \int_0^n [1 + \nu_{x+t}\; {}_{n-t}a^i_{x+t}]\, e^{-\int_0^t (\mu^{aa}_{x+t} + \delta)\,dt}\,dt.$$

Auf ähnliche Weise gelangt man zur der »aufgeschobenen Leibrente des Aktiven» durch Summation einer aufge-

schobenen Aktivitätsrente und einer nach Typus II aufgeschobenen Invalidenrente ${}_n a_x^{ai}$.

$${}_n^{(a)}a_x = {}_n a_x^{a} + {}_n a_x^{ai}$$

$${}_n^{(a)}a_x = \int_n^\infty e^{-\int_0^t (\mu_{x+t}^{aa}+\delta)\,dt}\,dt + \int_0^\infty \nu_{x+t}\, e^{-\int_0^t (\mu_{x+t}^{aa}+\delta)\,dt}\; {}_{n-t}a_{x+t}^{i}\,dt .$$

Man beachte die Verschiedenheit der unteren Grenzen in den äusseren Integrationen beider Summanden, derzufolge die Summation hier zu zwei typischen Schlussintegralen führt, wenn man noch von der Relation Gebrauch macht, dass für alle Zeitpunkte nach dem Ablaufe der Aufschubzeit (also für $t > n$) die Gleichheit besteht

$${}_{n-t}a_{x+t}^{i} = a_{x+t}^{i} .$$

Die *aufgeschobene Leibrente des Aktiven* wird dann

$${}_n^{(a)}a_x = \int_n^\infty \left(1 + \nu_{x+t}\, a_{x+t}^{i}\right) e^{-\int_0^t (\mu_{x+t}^{aa}+\delta)\,dt}\,dt +$$

$$+ \int_0^n \nu_{x+t}\, e^{-\int_0^t (\mu_{x+t}^{aa}+\delta)\,dt}\; {}_{n-t}a_{x+t}^{i}\,dt .$$

Dabei stellt der *zweite Summand* in ausserordentlich anschaulicher Form den Barwert derjenigen Invalidenrenten dar, deren Fälligkeit durch Invalidisierungen innerhalb von n Jahren begründet wird, deren Auszahlung aber erst nach Ablauf dieser n Jahre beginnt und dann lebenslänglich dauert.

Den gleichen Ausdruck kann man als Antwort auf die Frage erhalten, welches »Korrekturglied« die beiden praktisch wichtigsten Typen der temporären Invalidenrenten ineinander überführt, durch welches man also von ${}_n a_x^{ai}$ zu der aufhörenden Invalidenpension: $a^{ai}_{x\overline{n|}}$ kommt.

In diskontinuierlicher Schreibweise besitzt der Barwert einer »mit n Jahren aufhörenden Invalidenrente» die Form

$$\mathrm{a}^{ai}_{x\overline{n|}} = \frac{v\, l^{j}_{x+1} R_1 + v^2 l^{j}_{x+2} R_2 + \cdots + v^{n-1} l^{j}_{x+n-1} R_{n-1}}{l^{a}_{x}},$$

wenn man unter $l^{j}_{x+\lambda}$ die Zahl jener Versicherten versteht, welche, von den im Alter x als Aktive eingetretenen Personen l^{a}_{x} stammend, im Jahre λ nach dem Eintritte invalid werden und das Ende des Jahres λ als Invalide erleben; an jeden derselben wird in diesem Zeitpunkte, der ja identisch ist mit dem Beginne des $\lambda + 1^{\text{ten}}$ Jahres, ein gewisser Barwert von Invalidenrenten, die Summe R_λ fällig.

Die Einführung der diskontierten Zahlen $D^{j}_{x} = l^{j}_{x} v^{x}$ ergibt

$$\mathrm{a}^{ai}_{x\overline{n|}} = \frac{D^{j}_{x+1} R_1 + D^{j}_{x+2} R_2 + \cdots + D^{j}_{x+n-1} R_{x+n-1}}{D^{a}_{x}}.$$

Für die Rentenbarwerte R_λ erhält man sofort

$$\begin{array}{ll} R_1 = {}_{n-1}\mathrm{a}^{i}_{x+1} & R_2 = {}_{n-2}\mathrm{a}^{i}_{x+2} \\ \vdots & \vdots \\ R_\lambda = {}_{n-\lambda}\mathrm{a}^{i}_{x+\lambda} & R_{n-1} = {}_{1}\mathrm{a}^{i}_{x+n-1}. \end{array}$$

Es ist zweckmässig, diese immer kürzer werdenden Invalidenrenten als Differenz der lebenslänglichen und je um ein Jahr länger aufgeschobenen Renten auszudrücken

$$\begin{array}{ll} R_1 = \mathrm{a}^{i}_{x+1} - {}_{n-1}\mathrm{a}^{i}_{x+1} & R_2 = \mathrm{a}^{i}_{x+2} - {}_{n-2}\mathrm{a}^{i}_{x+2} \\ \vdots & \\ R_\lambda = \mathrm{a}^{i}_{x+\lambda} - {}_{n-\lambda}\mathrm{a}^{i}_{x+\lambda} & R_{n-1} = \mathrm{a}^{i}_{x+n-1} - {}_{1}\mathrm{a}^{i}_{x+n-1}. \end{array}$$

Dann kann man für den Zähler schreiben

$$D^{a}_{x}\mathrm{a}^{ai}_{x\overline{n|}} = D^{j}_{x+1}\left[\mathrm{a}^{i}_{x+1} - \frac{\mathrm{N}^{i}_{x+n}}{D^{i}_{x+1}}\right] +$$

$$+ D^{j}_{x+2}\left[\mathrm{a}^{i}_{x+2} - \frac{\mathrm{N}^{i}_{x+n}}{D^{i}_{x+1}}\right] +$$

$$+ + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

$$+ D^j_{x+n-1}\left[a^i_{x+n-1} - \frac{N^i_{x+n}}{D^i_{x+n-1}}\right] +$$

$$+ D^j_{x+n}\left[a^i_{x+n} - \frac{N^i_{x+n}}{D^i_{x+n}}\right].$$

Dabei durfte der letzte Summand, dessen Klammerwert [ ] als Differenz gleicher Grössen identisch verschwindet, hinzugefügt werden.

Nun ergibt aber die Summation aller positiven Produkte

$$\sum_1^n {}_\lambda D^j_{x+\lambda}\, a^i_{x+\lambda} = D^a_x\ {}_n a^{ai}_x$$

und daher die prinzipielle Gleichung

$$a^{ai}_{x\overline{n}|} = {}_n a^{ai}_x - \mathit{Korrekturglied}.$$

Man kann dieses »Überführungsglied«, das den Übergang vom Typus I der temporären Invalidenrente zu Typus II bewerkstelligt, in eine einfache algebraische Form bringen, wenn man sich der auch sonst in der Praxis häufig verwendeten Definition von γ_x als dem Quotienten $\frac{l^j_x}{l^i_x}$ bedient, wobei l^i_x der »Sterbetafel der Invaliden« entnommen ist.

Man sieht nämlich sogleich, dass

$$\sum_\lambda \frac{D^j_{x+\lambda}}{D^i_{x+\lambda}} = \sum_\lambda \frac{l^j_{x+\lambda}}{l^i_{x+\lambda}} = \sum_1^n {}_\lambda \gamma_{x+\lambda}$$

und daher die »aufhörende Invalidenrente« den Wert hat

$$a^{ai}_{x\overline{n}|} = {}_n a^{ai}_x - \frac{N^i_{x+n}}{D^a_{x+n}} \sum_1^n {}_\lambda \gamma_{x+\lambda}.$$

Die kontinuierliche Schreibweise ergibt für die Differenz ${}_n a^{ai}_x - a^{ai}_{x\overline{n}|}$ den Wert:

$$\int_0^n v_{x+t}\, e^{-\int_0^t \left(\mu_{x+t}^{aa}+\delta\right) dt}\, a_{x+t}^{i}\, dt - \int_0^n v_{x+t}\, e^{-\int_0^t \left(\mu_{x+t}^{aa}+\delta\right) dt}\, {}_{n-t}a_{x+t}^{i}\, dt =$$

$$= \int_0^n v_{x+t} \left[a_{x+t}^{i} - {}_{n-t}a_{x+t}^{i}\right] e^{-\int_0^t \left(\mu_{x+t}^{aa}+\delta\right) dt}\, dt =$$

$$= \int_0^n v_{x+t}\, e^{-\int_0^t \left(\mu_{x+t}^{aa}+\delta\right) dt}\, {}_{n-t}a_{x+t}^{i}\, dt$$

und damit *volle Übereinstimmung* mit dem oben betrachteten *zweiten Summanden* in der letzteren der beiden für ${}_{n}^{(a)}a_x$ aufgestellten Gleichungen (Seite 146). Der Grund liegt offenbar darin: Dass der Übergang vom Typus I zu Typus II der n Jahre aufgeschobenen Invalidenrente durch denselben numerischen Wert als Summand erfolgt, welcher als Subtrahend die n jährige temporäre Invalidenrente erster in die zweiter Art überführt. Tatsächlich gilt immer

$${}_{n}a_{x}^{ai} = \int_0^\infty v_{x+t}\, e^{-\int_0^t \left(\mu_{x+t}^{aa}+\delta\right) dt}\, {}_{n-t}a_{x+t}^{i}\, dt$$

$$\int_n^\infty v_{x+t}\, e^{-\int_0^t \left(\mu_{x+t}^{aa}+\delta\right) dt}\, a_{x+t}^{i}\, dt + \int_0^n v_{x+t}\, e^{-\int_0^t \left(\mu_{x+t}^{aa}+\delta\right) dt}\, {}_{n-t}a_{x+t}^{i}\, dt$$

$${}_{n}a_{x}^{ai} = {}_{n}a_{x}^{ai} + \int_0^n v_{x+t}\, e^{-\int_0^t \left(\mu_{x+t}^{aa}+\delta\right) dt}\, {}_{n-t}a_{x+t}^{i}\, dt.$$

Der eben ausgesprochene Satz kann auch folgendermassen allgemein bewiesen werden, indem man die Korrekturglieder der temporären und aufgeschobenen Invalidenrenten mit K beziehungsweise K' bezeichnet

$$a^{ai}_{x\overline{n}|} = {}_n a^{ai}_x - K$$

$$\frac{{}_n a^{ai}_x = {}_n a^{ai}_x + K'}{a^{ai}_{x\overline{n}|} + {}_n a^{ai}_x = {}_n a^{ai}_x + {}_n a^{ai}_x + \{K' - K\}\,.}$$

Zufolge des »Gesetzes der Summation« ist die Summe der linken Seite gleichwertig a^{ai}_x und dasselbe gilt von den beiden ersten Summanden der rechten Seite. Aus der Gleichung

$$a^{ai}_x = a^{ai}_x + \{K' - K\}$$

folgt aber notwendig die Gleichheit der beiden Überführungsglieder: $K' = K$. Übrigens kann man das »Korrekturglied« auch bei Zugrundelegung des oben definierten Quotienten

$$\gamma_x = \frac{l^j_x}{l^i_x}$$

kontinuierlich darstellen; es ergeben sich dann die Gleichungen

$$a^{ai}_{x\overline{n}|} = {}_n a^{ai}_x - \frac{N^i_{x+n}}{D^a_x} \int_0^n \gamma_{x+t}\, dt$$

$${}_n a^{ai}_x = {}_n a^{ai}_x + \frac{N^i_{x+n}}{D^a_x} \int_0^n \gamma_{x+t}\, dt\,.$$

In diesem Zusammenhange sei darauf aufmerksam gemacht, dass man die eben betrachteten Versicherungswerte auch noch auf eine ganz andere Art darstellen kann, wenn man sich des folgenden Gedankenganges bedient, der als die »KAAN'*sche Zerlegung*« bekannt ist.

Häufig ist die direkte Ermittlung von Anwartschaften Aktiver vom rechnerischen Standpunkte aus recht umständlich und führt die *indirekte Methode* rascher zum Ziele; sie baut sich auf der Möglichkeit auf, dass man den gesamten Versicherungsanspruch Ω einer beliebig zusammengesetzten Gruppe von l_x Personen zerlegen kann in die Ansprüche der gegenwärtig aktiven Mitglieder der Gruppe: ${}^{a)}\Omega$ und die

Anwartschaften der invaliden Mitglieder derselben Ω^i. Die Gleichung

$$\Omega_x l_x = {}^{(a)}\Omega_x l_x^a + \Omega_x^i l_x^i$$

liefert dann, je nachdem man die gemischte Gruppe der linken Seite als Summe, beziehungsweise die Invalidengruppe der rechten Seite als Differenz ausdrückt, eine der beiden folgenden Formeln für den Anspruch des Aktiven

$${}^{(a)}\Omega_x = \frac{(l_x^a + l_x^i)\Omega_x - l_x^i \Omega_x^i}{l_x^a} = \Omega_x + \frac{l_x^i}{l_x^a}[\Omega_x - \Omega_x^i]$$

oder

$${}^{(a)}\Omega_x = \frac{l_x \Omega_x - (l_x - l_x^a)\Omega_x^i}{l_x^a} = \Omega_x^i + \frac{l_x}{l_x^a}[\Omega_x - \Omega_x^i].$$

Auf die Leibrente angewendet, führt die indirekte Methode daher zu der Gleichung

$${}^{(a)}a_x = a_x + \frac{l_x^i}{l_x^a}(a_x - a_x^i).$$

Zerlegen wir nun die Leibrente des Aktiven nach zwei Gesichtspunkten: Zunächst quantitativ, durch

$${}^{(a)}a_x = {}^{(a)}_{\;n}a_x + {}^{(a)}_{\;n}a_x;$$

dann qualitativ, indem wir in jedem Teilbarwerte die Invaliditätsanwartschaft (im engeren Sinne) von der Aktivitätsrente isolieren:

$${}^{(a)}_{\;n}a_x = {}_n a_x^a + a_{x\overline{n|}}^{ai} = {}_n a_x + \frac{l_x^i}{l_x^a}({}_n a_x - {}_n a_x^i)$$

$${}^{(a)}_{\;n}a_x = {}_n a_x^a + {}_n a_x^{ai} = {}_n a_x + \frac{l_x^i}{l_x^a}({}_n a_x - {}_n a_x^i).$$

Wir gewinnen so auf indirektem Wege den Wert der aufhörenden Invalidenpension

$$a^{ai}_{x\overline{n}|} = a_x - {}_na^a_x + \frac{l^i_x}{l^a_x}\left({}_na_x - {}_na^i_x\right)$$

und ebenso als eine indirekte Darstellung der aufgeschobenen Invalidenrente des Typus II die Gleichung

$${}_na^{ai}_x = {}_na_x - {}_na^a_x + \frac{l^i_x}{l^a_x}\left({}_na_x - {}_na^i_x\right).$$

Ablebensansprüche.

Auch die »Ablebensansprüche nach Aktiven« lassen sich in geschlossener analytischer Form darstellen, wenn man die formelle Auseinanderhaltung der Invalidisierungskraft und reinen Sterbekraft des aktiven Individuums zulässt.

Die Versicherung auf den »Todesfall überhaupt« kann von diesem Gesichtspunkte aus als die Resultierende zweier Teilbarwerte betrachtet werden, welche den beiden Möglichkeiten[1] entsprechen, dass das Ableben im Zustande der Aktivität oder nach vorangegangener Invalidisierung erfolgt

$${}^{(a)}A_x = {}^2A^a_x + {}^2A^{ai}_x,$$

ganz analog wie mit

$$A_{xy} = A_{\overset{2}{x}y} + A_{x\overset{2}{y}}$$

eine Zerlegung der »Versicherung auf den *letzten Tod*« eines Paares definiert ist.

Beim ersten Summanden liegt nun der in anderem Zusammenhange angekündigte Fall vor, dass man bei der *Übertragung zweier verschiedener* Versicherungswerte aus dem Gebiete der eigentlichen Überlebensversicherungen *zu derselben Anwartschaft eines Aktiven* gelangt; bei dem Barwerte ${}^2A^a_x$ handelt es sich nämlich um einen Grenzfall, welcher zwei Auffassungen gestattet.

Wir fanden bereits auf Seite 140 u. 141

[1] Der Fall der Reaktivierung ist auch hier wieder ausgeschaltet.

$$ {}^2A_x^a = \int_0^x \mu_{x+t}^a \, e^{-\int_0^t (\mu_{x+t}^{aa} + \delta)\, dt} \, dt $$

als rein formales Gegenstück zu dem Werte

$$ A_{x\dot{y}}^{\,1} = \int_0^x \mu_{y+t} \, e^{-\int_0^t (\mu_{x+t} + \mu_{y+t} + \delta)\, dt} \, dt. $$

Nun sollte, — vorausgesetzt natürlich, die obigen beiden Zerlegungen von ${}^{(a)}\bar{A}_x$ und $\bar{A}_{xy}$ seien wirklich analogen Wesens, — ${}^2A^a$ als Gegenstück des Barwertes $A_{xy}^{\,2}$ fungieren.

Indessen bestätigt eine kurze Überlegung, dass man tatsächlich *denselben* Versicherungswert erhalten muss, wenn man rein formal die Analogie bildet zu

$$ A_{xy}^{\,2} = \int_0^x \mu_{y+t} \, e^{-\int_0^t (\mu_{x+t} + \mu_{y+t} + \delta)\, dt} \, \bar{A}_{x+t} dt. $$

Denn in dem Momente des Wirksamwerdens von μ_x^a stirbt der Aktive; der Todesfall als Aktiver stellt aber im Sinne der bisherigen Auffassung eines Verbindungscharakters des Aktivitätszustandes nun die *zeitliche Koinzidenz* der *Ausscheidefälle beider Partner* des Paares vor. Daher wird in dem korrespondierenden Falle des Invaliditätswertes $\tilde{W}[A_{xy}^{\,2}]$ für $\tilde{W}[\bar{A}_{x+t}]$ hier schon die *volle Einheit fällig* werden und es ist also

$$ \tilde{W}[A_{xy}^{\,2}] = \int_0^x \mu_{x+t}^a \, e^{-\int_0^t (\mu_{x+t}^{aa} + \delta)\, dt} \, .\, 1 \, .\, dt. $$

Somit ist wirklich

$$ {}^2A_x^a = \tilde{W}[A_{x\dot{y}}^{\,1}] = \tilde{W}[A_{xy}^{\,2}], $$

wie zu beweisen war.

Gehen wir zurück zur Zerlegung der gemischten Todesfallsversicherung

$$ {}^{(a)}A_x = {}^2A_x^a + {}^2A_x^{ai}; $$

deren ersten Teilbarwert wir als Korrelat zu $A_{\overset{2}{x}y}$ erkannt haben.

Der zweite Summand ${}^2A_x^{ai}$ stellt gemäss der Voraussetzung den Wert einer Todesfallversicherung vor, welche nur unter der Bedingung zur Auszahlung gelangt, dass der jetzt x jährige Aktive als Invalider stirbt.

Man sieht unmittelbar

$$ {}^2A_x^{ai} = \int_0^\infty \nu_{x+t}\, e^{-\int_0^t (\mu^{aa}_{x+t} + \delta)\, dt}\, A^i_{x+t}\, dt $$

in voller Übereinstimmung mit dem Gegenstücke unter den Überlebensversicherungen

$$ A_{x\overset{2}{y}} = \int_0^\infty \mu_{x+t}\, e^{-\int_0^t (\mu_{x+t} + \mu_{y+t} + \delta)\, dt}\, A_{y+t}\, dt. $$

Daher sind wir *berechtigt*, die formelle Zusammensetzung der *Anwartschaft auf den »letzten Todesfall eines Paares»*

$$ A_{xy} = A_{\overset{2}{x}y} + A_{x\overset{2}{y}} $$

als die Analogie anzusehen für den *Aufbau der Todesfallversicherung eines Aktiven.*

Nach dem vorangehenden gilt die Gleichung

$$ {}^{(a)}A_x = \int_0^\infty \mu^a_{x+t}\, e^{-\int_0^t (\nu_{x+t} + \mu^a_{x+t} + \delta)\, dt} \,.\, 1 \,.\, dt $$

$$ + \int_0^\infty \nu_{x+t}\, e^{-\int_0^t (\nu_{x+t} + \mu^a_{x+t} + \delta)\, dt}\, A^i_{x+t}\, dt $$

und die »Todesfallversicherung des Aktiven« erscheint schliesslich in der Form

$$^{(a)}A_x = \int_0^\infty \left[\mu^a_{x+t} + \nu_{x+t} A^i_{x+t}\right] e^{-\int_0^t (\mu^{aa}_{x+t} + \delta)\, dt} \, dt.$$

Vergleicht man den hier gewonnenen analytischen Wert des »Invaliden-Sterbekapitals«

$$^2A^{ai}_x = \int_0^\infty \nu_{x+t}\, e^{-\int_0^t (\mu^{aa}_{x+t} + \delta)\, dt} A^i_{x+t} dt$$

mit dem früher entwickelten »Invalidenkapital«

$$A^{ai}_x = \int_0^\infty \nu_{x+t}\, e^{-\int_0^t (\mu^{aa}_{x+t} + \delta)\, dt} \, dt,$$

so liegt ein Unterschied lediglich in der Belastung des Versicherers durch den Invaliditätseintritt: Während im letzteren Falle die volle Versicherungssumme sofort ausgefolgt werden muss, wird im ersteren bloss der Barwert auf die Invalidentodesfallversicherung A^i_{x+t} fällig; die Kapitalsauszahlung ist eben auf den Todespunkt des Invaliden hinausgeschoben.

Dieser Verlegung des Auszahlungstermines auf einen späteren Zeitpunkt entspricht die Ungleichung

$$^2A^{ai}_x < A^{ai}_x,$$

welche nach beiderseitiger Addition des Wertes $^2A^a_x$ mit Rücksicht auf die beiden Gleichungen

$$A^{ai}_x + {}^2A^a_x = A^a_x$$

$$^2A^{ai}_x + {}^2A^a_x = {}^{(a)}A_x$$

zu der neuen Ungleichung führt:

$${}^{(a)}A < A^{a}_{x}.$$

Die Richtigkeit derselben leuchtet unmittelbar ein; desgleichen bestätigt man sofort die Giltigkeit von

$$A^{ai}_{x} < A^{a}_{x} \ldots {}^{2}A^{ai}_{x} < {}^{(a)}A_{x}$$

$${}^{2}A^{a}_{x} < {}^{(a)}A_{x} < A^{a}_{x},$$

denn die Werte der linken Seiten sind alle *als Teil-Barwerte* in den Anwartschaften der rechten Seiten enthalten.

Es ist interessant, aus der erwiesenen Relation

$$\tilde{W}[A_{x\overset{1}{y}}] = \tilde{W}[A_{\overset{2}{x}y}]$$

zwei formelle Konsequenzen zu ziehen, welche zunächst überraschend scheinen.

I. $A^{a}_{x} = \tilde{W}[A_{xy}] = \tilde{W}[A_{\overset{1}{x}y} + A_{x\overset{1}{y}}] = \tilde{W}[A_{\overset{1}{x}y}] + \tilde{W}[A_{x\overset{1}{y}}]$

unter Einführung der obigen gleichwertigen Analogiegestalt an die Stelle des zweiten Summanden ergibt sich als Fortsetzung der Gleichheiten

$$= \tilde{W}[A_{\overset{1}{x}y}] + \tilde{W}[A_{\overset{2}{x}y}] = \tilde{W}[A_{\overset{1}{x}y} + A_{x\overset{2}{y}}] = \tilde{W}[A_{x}].$$

II. ${}^{(a)}A_{x} = \tilde{W}[A_{xy}] = \tilde{W}[A_{\overset{2}{x}y} + A_{x\overset{2}{y}}] = \tilde{W}[A_{\overset{2}{x}y}] + \tilde{W}[A_{x\overset{2}{y}}]$

und wird durch die reziproke Substitution

$$= \tilde{W}[A_{x\overset{1}{y}}] + \tilde{W}[A_{x\overset{2}{y}}] = \tilde{W}[A_{x\overset{1}{y}} + A_{x\overset{2}{y}}] = \tilde{W}[A_{y}].$$

Diese beiden Resultate machen auf den ersten Anblick einen paradoxen Eindruck, erklären sich aber widerspruchsfrei aus den getroffenen Grundannahmen, denen zufolge die *beiden Parteien* unserer *fingierten Doppelverbindung* in einem festen gegenseitigen oder genauer *»einseitigen Abhängigkeitsverhältnisse«* stehen.

Der Charakter dieser Gebundenheit möge unter Zuhilfenahme einfacher *geometrischer Begriffe,* in denen er sich gleichzeitig *exakt* und sehr *anschaulich* ausprägt, untersucht werden.

Ein Bereich (y) sei definiert als die Gesamtheit aller Punkte einer Ebene, welche *innerhalb* einer geschlossenen Kurve y liegen; die Punkte der Grenzkurve selbst seien nicht mehr zum Bereiche gehörig. Dieses Gebiet (y) *enthalte als Teil-Gebiet* den Aktivitäts-Bereich (x), der definiert sei als das Stück der Ebene im Innern der geschlossenen Kurve x; wiederum sei die *Grenzkurve selbst nicht mehr Bestandteil* des durch sie definierten Bereiches.

Die beiden Grenzkurven y und x seien längs des Kurvenstückes *PQR identisch zusammenfallend;* im übrigen aber muss x notwendiger Weise innerhalb des Bereiches (y) verlaufen, wenn die Grenzkurve x einen »Teilbereich« von (y) umschliessen soll. Wir können die eben ausgesprochenen Konstruktionsbedingungen formell durch die folgenden vier Definitionsbestimmungen[1] festlegen

$$\text{I.} \quad \ldots \quad (y) = \,]\,y\,[$$
$$\text{II.} \quad \ldots \quad (x) = \,]\,x\,[$$
$$\text{III.} \quad \ldots \quad (x) \ll (y)$$
$$\text{IV.} \quad \ldots \; {}^{x}PQR \quad {}^{y}PQR\,.$$

Der Zweck dieser Begriffsbildung wird sich im folgenden erweisen; sie führt zu grosser Anschaulichkeit und Klarheit des uns hier beschäftigenden Problems, insbesondere dann, wenn man die *Vereinbarung* trifft, den Definitionen I und II volle Selbständigkeit zu geben, soweit dies ohne Widerspruch zur Ungleichung III möglich ist: Stellt man sich beispielsweise vor, dass das *engere Gebiet* (x) gleichsam durch ein *zweites Flächenstück* gebildet werde, welches *auf die Grund-Ebene aufgelegt* worden sei, dann hat man hiermit ein sehr klares geometrisches Symbol für die den bisherigen Betrachtungen zu Grunde gelegte Auffassung des Begriffes »Aktives

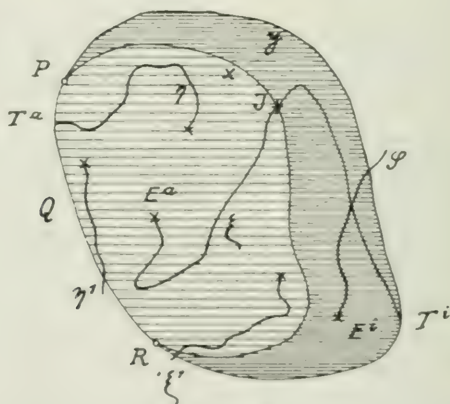
[1] Die Zeichen] [sollen die Bereiche (x) und (y) als »*offene Bereiche*« charakterisieren; die Verdoppelung des Ungleichheitszeichens $\ll$ soll zum Ausdrucke bringen, dass der Bereich (x) *nicht nur kleiner* ist als (y), sondern als dessen *Teilbereich* in letzterem vollständig *enthalten* ist.

Individuum» als einer Verbindung zu zweien, deren Partner voneinander nach bestimmten Gesetzen abhängig sind.

Der Lebensverlauf eines Versicherten sei nun in der Ebene der Bereiche (x) und (y) durch eine zusammenhängende Kurve veranschaulicht und zwar so, dass deren Form durch gewisse *zeitlich-gesundheitliche*[1] *Masse* bestimmt sei.

Über die Art der Massbestimmung selbst soll aber an dieser Stelle keine andere Voraussetzung gemacht werden, als dass alle Vereinbarungen getroffen seien, auf Grund deren jedem beliebigen Zeitpunkte innerhalb der Versicherungsdauer ein *bestimmter* Punkt der *Individualkurve* zugeordnet ist, während *nicht gefordert* wird, dass die *Eindeutigkeit umkehrbar* sei.

Eine kurze Überlegung zeigt, dass eine derartig definierte Kurve geeignet ist, den Lebensverlauf eines Individuums von dem speziellen Standpunkte aus darzustellen, welcher für die Versicherung in Betracht kommt. Hat man nämlich die Konstruktionsbestimmungen entsprechend gewählt, so ist jede so gewonnene Lebenskurve im Prinzip eine »*Wertungskurve des Versicherten*« vom Gesichtspunkte des Versicherers aus.



Figur D

[1] Der Begriff Gesundheit ist hier von einem möglichst *objektiven* Standpunkte aus zu fassen. Auch der medizinische Umfang desselben wäre in der Regel noch zu eng, da er das Moment einer dauernden äusseren Gefahrerhöhung unberücksichtigt lässt, welches ja für die Wertung eines Versicherten entscheidende Bedeutung besitzt.

Es sei E der Eintrittspunkt eines Versicherten; er gehört dem Bereiche (x) an, falls der Eintretende aktiv ist. Die Wertungskurve verläuft nun, solange der Versicherte aktiv bleibt, dauernd innerhalb der Doppelfläche (x): daher kann jeder Punkt von ξ während der Aktivitätsdauer als *Doppelpunkt* angesehen werden, insofern er *gleichzeitig dem Gebiete* (x) *und dem Gebiete* (y) angehört.

Wird der Versicherte invalid, so verlässt ξ die Doppelfläche, ohne aber dabei aus dem Bereiche (y) auszutreten: Der *Eintritt der Invalidität* ist also charakterisiert durch einen Punkt I der *Grenzkurve* x, welcher ausserhalb jenes Kurvenstückes liegt, das beiden Grenzkurven gemeinsam ist (PQR).[1]

Es ist klar, dass die Wertungskurve ξ in den Bereich der Doppelfläche nicht mehr zurückkehren kann, falls man — wie dies hier immer geschehen — von dem Falle der Reaktivierung Abstand nimmt. Vielmehr verläuft ξ gemäss den vereinbarten Gesichtspunkten in bestimmter Gestalt innerhalb des »einfachen Gebietes» von (y), solange der Invalide lebt, und schliesst mit dem Todespunkte T^i, welcher auf y liegt, doch ausserhalb des auch der Grenzkurve x angehörenden Stückes PQR.[2]

Der in Figur »D» eingezeichnete Typus »η» einer Individuallinie stellt die Wertungskurve eines Versicherten vor, der *als Aktiver stirbt.* Hier sind *alle* Punkte der Lebenskurve Doppelpunkte im obigen Sinne, der Todes-Punkt T^a liegt auf dem laut Definition III beiden Grenzkurven gemeinsamen Teile (mit Einschluss der Endpunkte P und Q).

Legt man diese geometrischen Begriffe den vorangegangenen Überlegungen zu Grunde, so erhalten die beiden formellen Schlussfolgerungen, welche sich aus der Gleichung

$$W[A_{xy}^1] = W[A_{xy}^2]$$

ergeben hatten, einen sehr deutlichen Sinn. Man kann jetzt tatsächlich sagen, dass die beiden Gleichungen gelten:

[1] Auch die Endpunkte P und Q sind daher als Invalidisierungspunkte ausgeschlossen!

[2] P und Q können also auch keine Todespunkte Invalider vorstellen; sie können *nur* Endpunkte von Individualkurven des Typ η sein.

$$A_x^a = \tilde{W}[A_x] \text{ und } {}^{(a)}A_x = \tilde{W}[A_y].$$

Die erste Gleichung beinhaltet nämlich, dass kein Punkt ausserhalb des Bereiches (x) dem Zustande der *Aktivität* entspricht, während die zweite Gleichung aussagt, dass kein Punkt ausserhalb des Gebietes (y) einen *Lebenspunkt* darstellen kann.

Es folgt übrigens die zweite Gleichung unmittelbar aus der Giltigkeit der ersteren, wie folgender Zusammenhang zeigt:

$$\begin{aligned} {}^{(a)}A_x = \tilde{W}[A_{xy}] &= \tilde{W}[A_x + A_y - A_{xy}] \\ &= \tilde{W}[A_x] + \tilde{W}[A_y] - \tilde{W}[A_{xy}]; \end{aligned}$$

nimmt man nun die Giltigkeit der Relation

$$A_x^a = \tilde{W}[A_{xy}] = \tilde{W}[A_x]$$

als *gegeben* an, so reduziert sich obige algebraische Summe auf den mittleren Summanden und die Gleichung daher auf dieselbe Form

$${}^{(a)}A_x = \tilde{W}[A_y],$$

wie wir sie früher auf anderem Wege erhalten hatten.

Anhand der geometrischen Darstellung ergibt sich unter anderem auch folgende Konsequenz. Die »Überlebensversicherung im weiteren Sinne« $\tilde{W}[A_{xy}^1]$ wird fällig, wenn die Wertungskurve »ξ« aus dem Doppelbereiche (x) in das einfache Teilgebiet von (y) übergeht. Die »Umkehrung«, also der *Begriff* des Versicherungswertes $\tilde{W}[A_{x\overset{1}{y}}]$ müsste folgerichtig lauten: Versicherung auf den Fall, dass irgend eine Wertungskurve (Typus ?) den Bereich (y) *verlässt*, *ohne* aber aus dem Bereiche (x) auszutreten.

Gemäss den getroffenen geometrischen Voraussetzungen gibt es aber keinen Punkt ausserhalb des Gebietes (y), welcher dem Bereiche (x) angehören kann, der ja laut Definition III ein Teilgebiet von (y) ist.

Damit ist hier eine anschauliche Bestätigung für die früber aufgestellte Behauptung gegeben, dass die »Umkehrung« der einseitigen Invaliditätsversicherung

$$\tilde{W}[\overline{A}^{1}_{xy}]$$

— unbeschadet der Existenzmöglichkeit des korrelativen versicherungstechnischen *Wertes* — als *Begriff* unmöglich ist.

Auch in den übrigen Grenzfällen ist es zweckmässig, auf die geometrische Symbolik überzugehen, um über das gegenseitige Verhältnis der beiden fingierten Partner, — die nach unserer Grundhypothese in dem aktiven Individuum vereinigt sind — volle Klarheit zu erhalten.

Der oben gegebene Begriff der »Wertungskurve» ist aber auch geeignet, eine *Reihe feinerer Probleme* der Invalidenversicherung anschaulich wiederzugeben; es sei hier indessen bloss auf einige auffallende Relationen in der Figur »D» hingewiesen.

Die erste Randannäherung der Kurve ξ kann Ausdruck einer schweren Erkrankung sein, die indessen vom noch aktiven Versichterten vollständig überwunden wurde; das Abbiegen des Schlussstückes (derselben Wertungskurve) von der Randlinie y, an welche sie sich nach dem Invaliditätseintritte I bereits stark angenähert hat, kann die geometrische Äusserung dafür sein, dass der Invalide unter dem Einflusse sachgemässer ärztlicher Behandlung eine Verlängerung seines restlichen Lebens erfahren hat, in demselben Masse, als die abgelenkte Lebens-Schlusskurve ihren Todespunkt T^i erst in einem späteren Zeitpunkte erreicht hat.[1]

Die Wertungskurve »ι» weist in ihrem Mittelteile auf

---

[1] Es sei ausdrücklich bemerkt, dass eine derartige Schlussweise nicht zwingend zu sein braucht. Die Länge der Wertungskurve muss nämlich durchaus nicht in einfacher Proportion stehen zu der Länge jenes Lebensabschnittes des Versicherten, den sie vom Standpunkte des Versicherers charakterisiert. Dies folgt schon aus der Bemerkung, dass zwar jedem Lebenspunkte nur ein einziger Kurvenpunkt entsprechen soll, die eindeutige Umkehrung aber nicht gefordert ist. In der vorliegenden Frage ist es wesentlich, *auf welche Weise das zeitliche Moment* in die Bestimmungen zur Konstruktion der Wertungskurven einbezogen worden ist.

Indessen kann man sich sehr wohl vorstellen, dass man derartige Vereinbarungen getroffen hat, dass der objektive Zeitverlauf in der Länge der Individualkurven irgendwie zum Ausdrucke gelangt — wenn auch nicht in der primitiven Form $l = K \cdot t$ — und dass somit obige Schlussweise über die Gestalt der Kurve ξ in Figur D zulässig ist.

prinzipiell erhöhte Invalidengefahr hin, wie sie etwa dadurch hervorgerufen werden kann, dass der Versicherte eine gewisse Zeit hindurch einen gefährdeten Beruf ausübt. Dagegen entsprechen die Wertungskurven ξ' und η' Versicherten, welche während ihrer gesamten Versicherungszeit[1] in gesteigerter Gefahr stehen; während nämlich ξ' einen Versicherten mit *»erhöhter Gefahren-Klasse»* charakterisiert, kann η' als die Wertungskurve eines *»minderwertigen»* aktiven *Lebens* angesehen werden.[2]

In diesem Zusammenhange seien schliesslich noch einige allgemeine Überlegungen bezüglich der Kurventypen ξ, η angestellt.

Jeder objektive Zeitmoment definiert auf der Lebenskurve eines beliebig herausgegriffenen Versicherten eindeutig einen bestimmten Punkt innerhalb des Bereiches (y). Die Gesamtheit der jeweils gleichzeitig Lebenden ist also in unseren geometrischen Hilfsbegriffen eine endliche Punktmenge im Gebiete (y). Betrachten wir nun von derselben bloss die gleichzeitig dem Bereiche (x) angehörenden Punkte — ihre Gesamt-Zahl sei $\mathfrak{A}(t)$ —, so definieren dieselben die Gesamtheit der Aktiven in einem objektiv festgelegten Zeitpunkte. Wir sind somit zu der Gleichstellung berechtigt:

$$\sum_{0}^{\omega}{}_x\, l_x^a = \mathfrak{A}_{(t)}\,.$$

Von jedem Punkte der Menge $\mathfrak{A}_{(t)}$ geht nun aber eine individuell ganz bestimmte Wertungskurve aus, über deren Charakter folgender Satz gezeigt werden soll:

Durch die Zuordnung jedes Punktes aus der Menge $\mathfrak{A}_{(t)}$ zu einer der Typen »ξ» oder »η» ist eine *exakte Zerlegung der Gesamtheit aller gleichzeitigen Aktiven* gegeben. Der Beweis stützt sich auf die Erfahrungstatsache, dass der Tod für jeden Menschen Gewissheit besitzt, dass daher jede Individualkurve früher oder später aus dem Bereiche (y) austritt und in einem Punkte der Grenzkurve y endet. Wegen Definition III

[1] Genauer gesagt: Lebenszeit nach dem Versicherungsabschlusse.

[2] Typus »ξ« ist die Wertungskurve eines Versicherten, der bereits beim Vertragsabschlusse invalid war (E^i).

$$(x) \ll (y)$$

muss also jede beliebig herausgegriffene Wertungskurve eines Aktiven schon vorher oder mindesten gleichzeitig den Doppelbereich (x) verlassen und zu einem Punkte der Grenzkurve x führen. Nun ist aber dieser »Austrittspunkt aus dem Aktivitätsbereiche» der *strengen Alternative* unterworfen: Dass er entweder *auf PQR liegt*, wobei die Endpunkte eingeschlossen sind, — oder dass er auf diesem Kurvenstücke *nicht liegt*. Die Entscheidung dieser Alternative aber liefert tatsächlich einen *vollständigen »Schnitt»* der Gesamtheit Aktiver.

Man erkennt sogleich, dass der durch die Kurventypen ξ und η definierte Schnitt der Aktivengesamtheit in seinem Wesen *identisch* ist mit jener Zerlegung des Standes der Aktiven, welche wir aus unserer Ausgangsgleichung gewinnen können, aus der wir die »Karupsche Differentialgleichung» abgeleitet haben:

$$l_x^a = \sum_0^{\omega-x}{}^{\nu}\, d_{x+\nu} + \sum_0^{\omega-x} I_{x+\nu};$$

weil nämlich ihre Giltigkeit für jede Altersklasse evident ist, erhalten wir durch Summierung über alle vorkommenden Alter

$$\sum_0^{\omega}{}^{x}\, l_x^a = \sum_0^{\omega}{}^{x} \sum_0^{\omega-x}{}^{\nu}\, d_{x+\nu}^a + \sum_0^{\omega}{}^{x} \sum_0^{\omega-x}{}^{\nu}\, I_{x+\nu}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung haben wir bereits geometrisch interpretiert und als äquivalent zu der begrenzten Punktmenge $\mathfrak{A}_{(t)}$ gefunden.

Eine kurze Überlegung zeigt, dass der erste Summand der rechten Seite die Anzahl jener Wertungskurven angibt, welche von einem Punkte der Menge $\mathfrak{A}_{(t)}$ ausgehen und den Typus »η» besitzen; bezeichnen wir die Zahl dieser Kurven mit Z_η, so ergibt sich

$$\sum_2^{\omega}{}^{x} \sum_0^{\omega-x}{}^{\nu}\, d_{x+\nu}^a = Z_\eta .$$

Desgleichen erkennen wir die Äquivalenz

$$\sum_{0}^{\omega} {}_x \sum_{0}^{\omega - x} {}_t \, I_{x+t} = Z_{\xi},$$

wobei Z_{ξ} die Zahl der Wertungskurven des Typus »ξ« angibt, welche von der Punktmenge $\mathfrak{A}_{(t)}$ ausgehen. Hiermit ist aber die Identität der beiden Schnitte bestätigt.

Selbstverständlich kann die Zuerkennung eines bestimmten Typus für eine Individuallinie im allgemeinen[1] bloss a posteriori, nämlich nach ihrem Austritte aus dem Bereiche (x)[1] erfolgen, wie es ja auch unmöglich ist, einen bestimmten Versicherten aus der Gesamtheit l_x^a von vornherein einer der beiden Teilgruppen auf der rechten Seite der Ausgangsgleichung zuzuordnen: Erst die *Art* seines Ausscheidens aus dem Verbande der Aktiven entscheidet darüber.

Anwartschaften von Personengruppen.

Es bietet keine Schwierigkeit, in der geraden Fortsetzung des eingeschlagenen Weges zur Analyse komplizierterer Invaliditätswerte überzugehen, indem man die *bisherigen Überlegungen von verschiedenen Gesichtspunkten aus erweitert.*

Der naheliegendste Schritt ist wohl die Einbeziehung anderer begünstigter Personen, also die Betrachtung »verbundener Leben« im gewöhnlichen Sinne des Wortes.

Sollen dabei die neu-hinzutretenden[2] Personen zunächst lediglich bezüglich des »Lebens«, das heisst ohne Rücksicht auf Invaliditätserscheinungen betrachtet werden, so ergibt sich die Möglichkeit folgender analytischer Behandlung für alle hierher gehörenden Versicherungswerte.

[1] Liegt der Eintrittspunkt ausserhalb des Bereiches (x) — Versicherung eines Invaliden —, dann besteht allerdings kein Zweifel, dass die Kurve den Typus »ξ« haben muss, solange man den Fall einer Reaktivierung ausschliesst.

Wünscht man aber diese Möglichkeit zu berücksichtigen, so kann *jede* Lebenskurve erst dann charakterisiert werden, wenn sie die Grenzkurve y erreicht hat.

[2] Zu dem bisher ausschliesslich als Einzelversicherten betrachteten »Aktiven«.

Prinzip:

Der Aktive stellt wie bisher eine Verbindung zu zweien im weiteren Sinne vor, deren Rang durch jede neu hinzutretende Person um die Einheit erhöht wird.

Die lebenslängliche »Aktivitätsverbindungsrente» $\bar{a}^{a}_{xyz}$ beispielsweise erscheint so in der Gestalt

$$\bar{a}^{a}_{xyz} = \int_0^\infty e^{-\int_0^t \left(\nu_{x+t} + \mu^{a}_{x+t} + \mu_{y+t} + \mu_{z+t} + \delta\right) dt} \, dt$$

und damit im *Aufbau übereinstimmend* mit einer Verbindungsrente von *vier gleichwertigen* Personen aus der *gemischten Versichertenklasse:*

$$\bar{a}_{abcd} = \int_0^\infty e^{-\int_0^t \left(\mu_{a+t, b+t, c+t, d+t} + \delta\right) dt} \, dt;$$

denn tatsächlich gilt ja

$$\mu_{a+t, b+t, c+t \cdots} = \mu_{a+t} + \mu_{b+t} + \mu_{c+t} + \cdots$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung könnte auf ähnliche Art bewiesen werden, wie es bereits im vorhergehenden für eine Verbindung zu zweien geschehen ist (Seite 142), ergibt sich aber auch unmittelbar aus der Definition der Sterbekraft $\mu_x = -\frac{dl_x}{l_x dx}$ und der Gleichung für die »Überlebenden-Zahlen» einer Verbindung

$$l_{a, b, c \cdots} = l_a \cdot l_b \cdot l_c \ldots$$

Die logarithmische Differentiation und Umkehrung aller Vorzeichen ergibt unmittelbar den Wert der *Auflösungsintensität einer höheren Verbindung* in der Form

$$\mu_{a, b, c \cdots} = \mu_a + \mu_b + \mu_c + \cdots$$

Wir dürfen also insbesondere im obigen Beispiele setzen

$$\bar{a}^{a}_{xyz} = \bar{W}[\bar{a}_{abcd}]$$

und finden damit den formellen Ausdruck des aufgestellten Prinzipes in seiner Anwendung auf die Aktivitätsverbindungsrente; bei der *Bezeichnung* derselben wurde von einem allgemein üblichen *Übereinkommen* Gebrauch gemacht, dem zufolge einzelstehende Indizes »*a*« oder »*i*« lediglich den Zustand der *erstgenannten Person des Suffixes* charakterisieren; diese Verinbarung wird in der Folge auch bei Versicherungswerten vorausgesetzt, welche *irgend welche* Anwartschaften einer Gruppe von Versicherten betreffen.

Die gewählte kontinuierliche Schreibweise gestattet einen sehr einfachen Übergang von der »lebenslänglichen« zur »temporären« und »aufgeschobenen« Aktivitätsverbindungsrente.

Führen wir indessen zunächst zur Abkürzung der Rentenformeln [unter Berufung auf das eben getroffene Übereinkommen für die Wahl der Bezeichnung] die Erlebensversicherung ein

$${}_{t}E^{a}_{xyz} = e^{-\int_{0}^{t}(\mu_{x+t}+\mu^{a}_{x+t}+\mu_{y+t}+\mu_{z+t}+\delta)\,dt}$$

welche übrigens ein formelles Analogon zu

$${}_{t}E_{abcd} = e^{-\int_{0}^{t}(\mu_{a+t}+\mu_{b+t}+\mu_{c+t}+\mu_{d+t}+\delta)\,dt}$$

darstellt, so erhalten wir direkt

$${}_{n}\bar{a}^{a}_{xyz} = \int_{0}^{n} {}_{t}E^{a}_{xyz}\,dt = \bar{W}[{}_{n}\bar{a}_{abcd}]$$

$${}_{n}\bar{a}^{a}_{xyz} = \int_{n}^{\omega} {}_{t}E^{a}_{xyz}\,dt = \bar{W}[{}_{n}\bar{a}_{abcd}]$$

mit naheliegender Möglichkeit, die Verbindungs-Gruppe beliebig zu erhöhen. Denn die obigen Formeln gelten prinzipiell auch noch beim Hinzutreten weiterer Personen (e), $(f) \ldots (p)$, falls dieselben bloss bezüglich des Lebens, das heisst ohne Berücksichtignng ihrer eventuellen Invalidisierung betrachtet werden.

Dagegen erreichen wir eine Erweiterung des Problemes, wenn wir nun den Einschluss mehrerer »als Aktive» Versicherter in die Personengruppe annehmen. Gehen wir vom einfachsten Falle aus, der Aktivitätsverbindungsrente zweier »Aktiver».

$$\bar{a}^{aa}_{xy} = \int_0^\infty e^{-\int_0^t \left(\mu^{aa}_{x+t} + \mu^{aa}_{y+t} + \delta\right) dt} \, dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\int_0^t \left(\nu_{x+t} + \mu^{a}_{x+t} + \nu_{y+t} + \mu^{a}_{y+t} + \delta\right) dt} \, dt =$$

$$= \tilde{W}\left[\int_0^\infty {}_tE_{abcd} \, dt\right] = \tilde{W}\left[\bar{a}_{abcd}\right].$$

Daher kann man sagen, dass die Verbindungsrente eines Paares, deren Dauer an den *Aktivitätszustand beider Partner* gebunden ist, Strukturverwandschaft besitzt mit einer gewöhnlichen Verbindungsrente von vier Leben.

Tritt zu dem eben betrachteten Paare Aktiver noch eine Person der gemischten Versichertenklasse, so ergibt sich sogleich

$$\bar{a}^{aa}_{xyz} = \tilde{W}\left[\bar{a}_{abcde}\right].$$

Die Bezeichungsweise ist hier so gedacht, dass beispielsweise $\bar{a}^{aa}_{xyrs \ldots z}$ eine Rente vorstellen würde, welche zahlbar ist, solange Gesamtverbindung $(x \ldots z)$ besteht und gleichzeitig die Personen (x) und (y) aktiv sind.

Verwechslungen mit anderen Versicherungswerten sind ausgeschlossen, falls man übereinkommt, im Suffixe die be-

zeichneten Personen der Gruppe zuerst und in derselben Reihenfolge anzuführen, wie die Indizes der Kombination. Es sollen sich also Suffix- und Index-Reihe punktweise entsprechen.

Nur scheinbar liegt eine Schwierigkeit darin, mit diesem Übereinkommen die übliche Bezeichnung für die Anwartschaft auf Invalidenrente zu vereinigen: Denn es genügt, den Doppelindex »*ai*« als ein einziges Zeichen anzusehen, als das er ja auch eingeführt wurde. Übrigens kann man in komplizierteren Fällen durch Hinzufügung eines Kommas jeden Zweifel beheben. So wäre beispielweise $a_{xyz\ldots}^{a\,i}$ die Rente für das Fortbestehen der Verbindung des Aktiven (x) mit dem Invaliden (y) und der Person (z) aus der gemischten Klasse Versicherter, während a_{xyz}^{ai} die normale »Invalidenverbindungsrente« bezeichnet, welche von der Invalidisierung (I_x) bis zur Auflösung der Verbindung (xyz) läuft.

Die konsequente Anwendung des hier getroffenen Übereinkommens würde zu vielen Vereinfachungen und bedeutender Übersichtlichkeit führen; es wäre damit aber vor allem ein Weg gegeben, auf dem man zu einer *einheitlichen Symbolik jeglicher Art von Gruppenanwartschaften* gelangen könnte.

Kehren wir zu den betrachteten Aktivitätsverbindungsrenten allgemeinerer Art zurück. Wir können das in den angeführten speziellen Fällen zum Ausdrucke kommende Gesetz leicht allgemein formulieren . . .

Voraussetzung: Gegeben sei eine Gruppe von g Versicherten, unter denen sich α *aktive Personen* befinden, welche mit Berücksichtigung eventueller Invaliditätserscheinungen versichert sind — während die übrigen $g - \alpha = \lambda$ Personen nur bezüglich des »Lebens« betrachtet werden sollen.[1] Dann gilt folgendes

Allgemeines Prinzip:

Jeder Versicherungswert der Gruppe (g), welcher Invaliditätserscheinungen von α Aktiven berücksichtigt, kann aufgefasst

[1] Damit ist aber nicht ausgeschlossen, dass auch in der Untergruppe (λ) die Invalidität eine Rolle spielt: Befinden sich nämlich unter den g Versicherten auch Invalide, so kann man deren Lebenserscheinungen durch v_{m+l}^{i} chrakterisieren, *ohne* dass dieselben deshalb unter die oben definierte Gruppe α fallen!

werden als ein Analogon zu einer gewöhnlichen Versicherungskombination für eine höhere Gruppe (G), *deren Rang durch die Gleichung gegeben ist*

$$G = 2\alpha + \lambda$$

oder

$$G = g + \alpha;$$

beim Übergange von einer beliebigen Invaliditätsanwartschaft zu ihrem Korrelate unter den Überlebensversicherungen erfährt daher nach der letzten Gleichung die *Personengruppe eine Rangerhöhung* α, *gleich der Zahl der »als Aktive» Versicherten.*

Wir können dieser ganz allgemein geltenden Relation zwischen Invaliditäts-Werten und »reinen» Überlebensansprüchen eine besonders einfache Form geben, wenn wir den Begriff »Analogiewert» im bisherigen Sinne und mit dem früher verwendeten Symbole allgemein zulassen. Dann lautet das oben ausgesprochene Prinzip der Analogiebildung

$$\Omega^{(ai)}_{(g)} = \tilde{W}[\Omega_{(2\alpha+\lambda)}] = \tilde{W}[\Omega_{(g+\alpha)}].$$

Hiebei ist das Symbol $\Omega^{(ai)}$ zur Bezeichnung einer ganz willkürlichen Versicherungskombination gewählt, welche auf die Invalidität irgendwie[1] Rücksicht nimmt, Ω das Korrelat unter den reinen Lebensversicherungskombinationen[2], während g, α, λ in der Bedeutung der »Voraussetzung» beibehalten sind.

Wir wollen die Richtigkeit des eben entwickelten allgemeinen Analogieprinzipes nun auch für die Invaliditätsanwartschaften im engeren Sinne[3] bestätigen; es wird sich zeigen, dass wir auf diesem Wege auch die Invalidenansprüche

---

[1] Es muss sich nicht notwendiger Weise um eine »Invaliditätsanwartschaft» im engeren Sinne handeln; auch Versicherungswerte, welche sich ausschliesslich auf den Zustand der Aktivität beziehen, soll $\Omega^{(ai)}$ hier umfassen!

[2] Der Begriff »Überlebensversicherungskombination» wäre nun zu eng, nachdem unter $\Omega^{(ai)}$ auch die Aktivitätsanwartschaften eingeschlossen worden sind.

[3] Für die Aktivitätsanwartschaften geschah dies, da sie als Ausgangspunkt genommen wurden.

Übrigens sei hier zur Vermeidung jedes Missverständnisses ausdrücklich angeführt, dass der Abhandlungstitel den Begriff »Invaliditätsanwartschaften» im weitesten Sinne fassen will.

von Personengruppen einer systematischen Analyse unterziehen können, wobei wir gleichzeitig eine einheitliche, klare Darstellung, aber auch eine wesentliche Vertiefung der versicherungstechnischen Probleme dieses reichen Gebietes erzielen.

Die dauernde Anwartschaft auf eine »Invalidenverbindungsrente» wird im Sinne des Vorangehenden

$$a^{ai}_{xyz} = \int_0^\infty \nu_{x+t}\, e^{-\int_0^t (\nu_{x+t}+\mu^{a}_{x+t}+\mu_{y+t}+\mu_{z+t}+\delta)\,dt}\, a^{i}_{x+t.\,y+t.\,z+t}\, dt$$

und besitzt somit analoge Struktur mit der Überlebensversicherung

$$a_{a\,bcd} = \int_0^\infty \mu_{a+t}\, e^{-\int_0^t (\mu_{a+t.\,b+t.\,c+t.\,d+t}+\delta)\,dt}\, a_{b+t.\,c+t.\,d+t}\, dt,$$

das ist die Überlebensrente nach der Person (a) an die noch ungelöste Verbindung aller übrigen Personen (bcd).

Schliesslich ergibt die Summation

$$a^{a}_{xyz} + a^{ai}_{xyz} = {}^{(a)}a_{xyz},$$

das ist die »allgemeine Verbindungsrente», welche bis zum ersten Tode der Gruppe läuft, daher auch »Rente auf das kürzeste Leben» genannt wird. Nach obigem ergibt sich als deren Wert

$${}^{(a)}a_{xyz} = \int_0^\infty \left[1 + \nu_{x+t}\, a^{i}_{x+t.\,y+t,\,z+t}\right] e^{-\int_0^t (\mu^{aa}_{x+t}+\mu_{y+t}+\mu_{z+t}+\delta)\,dt}\, dt.$$

Es ist die Möglichkeit gegeben, auch die Invalidenverbindungsrenten abzukürzen oder aufzuschieben und zwar auf *drei wesentlich verschiedene* Arten, wie man aus folgender kurzen Überlegung sogleich ersieht: Vor allem erhält man zwei Hauptgruppen indem man

1. bloss den *Versicherungs-Anspruch* abkürzt oder aufschiebt;

2. bloss die *Auszahlung(en)* einer Zeitlichen Beschränkung unterwirft.

Die zweite Hauptgruppe zerfällt aber dadurch in zwei getrennte Typen der Auffassung, dass Abkürzung und Aufschub der Invalidenrenten-Auszahlung absoluten[1] oder relativen Charakter besitzen können, entsprechend den beiden Möglichkeiten, den Versicherungsabschluss oder den Invaliditätseintritt als zeitlichen Ausgangspunkt für die Bemessung der vereinbarten Einschränkung zu wählen.

Wir erhalten also endgiltig drei wesentliche Grund-Typen von Auffassungsmöglichkeiten, die sachlich identisch sind den für die einfache Invaliditätsanwartschaft entwickelten Rententypen I, II und III.

Um die verschiedenen Grundtypen der Invalidenverbindung auseinanderzuhalten, kann man *prinzipiell* den *gleichen Weg gehen*, wie er bereits bei den einfachen Invalidenrenten zu systematischer Gruppierung der verschiedenen Auffassungsmöglichkeiten geführt hat.

Man findet sofort, indem man hier zweckmässig in die Formeln die Erlebensversicherung einführt und dadurch bei den höheren Verbindungsrenten eine grosse Raumersparnis erzielt, als sehr klaren Ausdruck der *drei Auffassungsmöglichkeiten* des »*Aufschubes* einer *Invalidenverbindungsrente*»

Typus I:

$${}_{\pi}a^{ai}_{xyz} = \int_{n}^{\infty} \nu_{x+t} \cdot {}_{t}E^{a}_{xyz}\, a^{i}_{xyz}\, dt = \tilde{W}\left[{}^{\mathrm{I}}_{n}a_{a\,bcd}\right].$$

Typus II:

$${}_{n}a^{ai}_{xyz} = \int_{0}^{\infty} \nu_{x+t} \cdot {}_{t}E^{a}_{xyz} \cdot {}_{n-t}\, a^{i}_{xyz}\, dt = \tilde{W}\left[{}^{\mathrm{II}}_{n}a_{a\,bcd}\right].$$

[1] absolut in dem Sinne: »Vom Zeitpunkte des *Invaliditätseintrittes unabhängig*».

Typus III:

$$ {}^{\mathrm{III}}_{\;n}a^{ai}_{xyz} = \int_0^{\infty} v_{x+t}\cdot {}_tE^{a}_{xyz}\cdot {}_na^{i}_{xyz}\,dt = \tilde{W}\left[{}^{\mathrm{III}}_{\;n}a_{a\,bcd}\right]. $$

Ebenso deutlich sind die *drei Grundauffassungen* der »*Abkürzung* einer *Invalidenverbindungsrente*« charakterisiert durch die Gleichungen

Typus I:

$$ {}_na^{ai}_{xyz} = \int_0^{n} v_{x+t}\cdot {}_tE^{a}_{xyz}\cdot a^{i}_{xyz}\,dt = \tilde{W}\left[{}^{\mathrm{I}}_{\;n}a_{a\,bcd}\right] $$

Typus II:

$$ a^{ai}_{xyz\,\overline{n|}} = \int_0^{n(\infty)} v_{x+t}\cdot {}_tE^{a}_{xyz}\cdot {}_{n-t}a^{i}_{xyz}\,dt = \tilde{W}\left[{}^{\mathrm{II}}_{\;n}a_{a\,bcd}\right] $$

Typus III:

$$ {}^{\mathrm{III}}_{\;n}a^{ai}_{xyz} = \int_0^{\infty} v_{x+t}\cdot {}_tE^{a}_{xyz}\cdot {}_na^{i}_{xyz}\,dt = \tilde{W}\left[{}^{\mathrm{III}}_{\;n}a_{a\,bcd}\right]. $$

Man erkennt leicht, dass auch alle übrigen früheren Überlegungen anwendbar bleiben, sofern man nur beachtet, dass nun »Invalidenverbindungsrenten« $a^{i}_{xyz\ldots}$ fällig werden an Stelle des früheren einfachen Invalidenrenten des Einzelversicherten.

Wählt man den Typus

$$ {}^{\mathrm{III}}_{\;n}a^{ai}_{xy} = \int_0^{\infty} v_{x+t}\, e^{-\int_0^t \left(\mu^{aa}_{x+t}+\mu_{y+t}+\delta\right)dt}\; {}_na^{i}_{xy}\,dt $$

zum Ausgangspunkte für die folgende Betrachtung, so kann man den zwanglosen Übergang zu der Versicherung auf ein Invalidenkapital finden, dessen Auszahlung an das Bestehen der Verbindung (xy) bei Eintritt der Invalidität gebunden

ist; man spricht daher zweckmässig von einem »*Invalidenverbindungskapital* A^{ai}_{xy}«.

Um zu diesem Versicherungswerte zu gelangen, genügt nämlich die einfache Bestimmung, dass die Auszahlungen der n jährigen Invalidenverbindungsrente auf einen *einzigen* Zeitpunkt, den der Invalidisierung, reduziert seien. Man erzielt daher den Übergang

$$\text{von } {}^{\text{III}}_{|n}a^{ai}_{xy} \text{ zu } A^{ai}_{xy}$$

indem man in der Ausgangsformel den Barwert der fälligen Rente ${}_{|n}a^{i}_{xy}$ zur *Einheit* werden lässt und gewinnt dadurch für das Invalidenverbindungskapital die Gestalt

$$A^{ai}_{xy} = \int_0^\infty \nu_{x+t}\, e^{-\int_0^t \left(\nu_{x+t}+\mu^{a}_{x+t}+\mu_{y+t}+\delta\right) dt}\, dt$$

in vollständiger Übereinstimmung mit

$$A^{1}_{abc} = \int_0^\infty \mu_{a+t}\, e^{-\int_0^t \left(\mu_{a+t}+\mu_{b+t}+\mu_{c+t}+\delta\right) dt}\, dt.$$

Andererseits ist aber klar, dass man an Stelle der eben supponierten Fälligkeit der vollen Versicherungssumme unmittelbar bei Eintritt der Invalidität nun auch den Barwert eines einseitigen Überlebenskapitales nach einem Invaliden des Alters $x + t$, also $A^{i}_{\overset{1}{x+t},\,y+t}$ in die Ausgangsgleichung einführen kann; dadurch wird dann der *Auszahlungstermin der Einheit auf den Todespunkt des Invaliden hinausverlegt:* Der verwandelte Barwert stellt somit eine einseitige Überlebensversicherung dar, bei welcher die Leistung aber *nur* unter der Bedingung fällig wird, dass der *Tod von* (x) *nach vorhergegangener Invalidisierung* erfolgt.

Im Einklang mit den Bezeichnungen, welche bei den Anwartschaften eines einzelnen Aktiven gewählt wurden,

könnte nun für den transformierten Versicherungswert das Symbol ${}^2\overline{A}^{ai}_{xy}$ verwendet werden.

Wie man aber sogleich erkennt, wird mit dem Hinzutreten einer zweiten versicherten Person (y) der Index 2 entbehrlich, welcher früher zur Unterscheidung von ${}^2A^{ai}_x$ gegenüber dem einfachen Invalidenkapital A^{ai}_x erforderlich war.

Nun liegt ja eine *Überlebens*versicherung im *gewöhnlichen Sinne* vor, weil der Versicherungsfall erst mit dem *Ableben* des Invaliden eintritt; man wird daher für den oben betrachteten umgewandelten Versicherungswert zweckmässig die allgemein übliche Art der Bezeichnung wählen können: $A^{ai}_{\overset{1}{xy}}$ — ohne dabei eine Verwechslung mit dem Invalidenverbindungskapital A^{ai}_{xy} befürchten zu müssen.[1]

Es gilt demnach die Gleichung:

$$A^{ai}_{\overset{1}{xy}} = \int_0^x \nu_{x+t}\, e^{-\int_0^t (\nu_{x+t}+\mu^a_{x+t}+\mu_{y+t}+\delta)\,dt}\, A^i_{\overset{1}{x+t,\,y+t}}\, dt.$$

Stellen wir diesem Versicherungswerte gegenüber

$$\int_0^x \mu_{a+t}\, e^{-\int_0^t (\mu_{a+t}+\mu_{b+t}+\mu_{c+t}+\delta)\,dt}\, A^i_{\overset{1}{b+t,\,c+t}}\, dt,$$

so dürfen wir setzen

$$A^{ai}_{\overset{1}{xy}} = W\,[A^{i}_{\underset{1}{abc}}].$$

Die *Ergänzung* zu dem eben behandelten Versicherungswerte, den man als *»Invalidenüberlebenskapital«* benennen könnte, wäre die Anwartschaft auf das Überlebenskapital nach dem im *aktiven Zustande verstorbenen* Ernährer, in Ana-

[1] Dass $A^{ai}_{\overset{1}{xy}} < A^{ai}_{xy}$ sein muss, ist nach dem Vorhergehenden über die Vorverlegung des Kapitalauszahlung-Termines einleuchtend.

logie zur früheren Symbolik mit $A^{a}{}_{\overset{1}{xy}}$ bezeichnet; denn eine ganz ähnliche Überlegung zeigt, dass auch hier der Index 2 in der unmittelbar sich ergebenden Bezeichnung: ${}^{2}\bar{A}^{a}_{xy}$ entbehrt werden kann, wenn man sich des obligaten Zeichens für Überlebenskapitale im gewöhnlichen Sinne bedient. Somit ergibt sich

$$A^{a}_{\overset{1}{xy}} = \int_0^\infty \mu^{a}_{x+t}\, e^{-\int_0^t \left(\mu_{x+t}+\mu^{a}_{x+t}+\mu_{y+t}+\delta\right) dt}\, dt.$$

Es ist interessant, wiederum den *Doppelweg zu verfolgen*, auf welchem man in diesem Grenzfalle durch rein formale Analogiebildung, *ausgehend von zwei verschiedenen Anwartschaften unter den »eigentlichen» oder »reinen Überlebensversicherungen»* (bei welchen bloss »Lebende» betrachtet werden), *zu einer und derselben Anwartschaft* gelangt, welche Invaliditätserscheinungen berücksichtigt.

Wir fanden bereits

$$A^{ai}_{xy} = \tilde{W}\left[\bar{A}^{1}_{abc}\right].$$

Man sieht nun unmittelbar

$$A^{a}_{\overset{1}{xy}} = \tilde{W}\left[\int_0^\infty \mu_{b+t}\, e^{-\int_0^t \left(\mu_{a+t}+\mu_{b+t}+\mu_{c+t}+\delta\right) dt}\, dt\right]$$

$$= \tilde{W}\left[\bar{A}_{a\overset{1}{b}c}\right]$$

Andererseits zeigten wir eben, dass

$$\bar{A}^{ai}_{\overset{1}{xy}} = \tilde{W}\left[\bar{A}_{a\overset{2}{\underset{1}{b}}c}\right]$$

und es ist nun naheliegend, nach dem formellen Ausdrucke für $\tilde{W}\left[\bar{A}^{2}_{\underset{1}{a}bc}\right]$ zu fragen, *ohne dabei die Existenz des Analogiebegriffes selbst zu postulieren.* Gehen wir aus von

$$A_{\overset{2}{a}\underset{1}{b}c} = \int_0^\infty \mu_{b+t}\, e^{-\int_0^t (\mu_{a+t}+\mu_{b+t}+\mu_{c+t}+\delta)\, dt}\, A_{\overset{1}{a+t},\, c+t}\, dt,$$

so zeigt eine kurze Überlegung, dass der Wert von $\tilde{W}[A_{\overset{1}{a+t},\, c+t}]$ gleich der Einheit werden muss, weil ja mit dem Ausscheiden von (b) in dem Zeitpunkte: t Jahre nach Versicherungsabschluss ein gleichzeitiges Ausscheiden von (a) notwendig verbunden ist:

Im Sinne der Figur »D« (Seite 158) muss jede Kurve γ, welche den Doppelbereich (x) in einem Punkte T^a des gemeinsamen Grenzstückes PQR verlässt, in demselben Momente auch den Bereich (y) verlassen.

Unter der Voraussetzung, dass innerhalb einer Verbindung (a, b, c) die Parteien (a) und (b) jenen Bedingungen unterworfen sind, die durch die beiden Bereiche (x) und (y) der Figur »D« zum Ausdrucke gebracht werden, gilt auf Grund des Vorangehenden

$$\tilde{W}[A_{a\overset{1}{b}c}] = \tilde{W}[A_{\overset{2}{a}\underset{1}{b}c}] = A^{a}_{\underset{xy}{1}}.$$

Auf dieser Gleichwertigkeit als Basis kann man folgende zwei Paare von »*korrelativen Gleichungen*« aufbauen, wobei man den Versicherungswert $A^{aa}_{\underset{xy}{1}}$ bald dem *einen*, bald dem *anderen* Barwerte unter den reinen Überlebensversicherungen *äquivalent* betrachtet.

$$\alpha)\quad \begin{cases} A_{\overset{1}{a}bc} + A_{a\overset{1}{b}c} = A_{abc} \\ A^{ai}_{xy} + A^{a}_{\underset{xy}{1}} = A^{a}_{xy} \end{cases}$$

$$\beta)\quad \begin{cases} A_{\underset{1}{a}\overset{2}{b}c} + A_{\overset{2}{a}\underset{1}{b}c} = A_{abc} \\ A^{ai}_{\underset{xy}{1}} + A^{a}_{\underset{xy}{1}} = {}^{(a)}A^{1}_{xy} \end{cases}$$

Es bestehen somit folgende Strukturverwandtschaften

α) $$\bar{A}^{a}_{xy} = \tilde{W}[\bar{A}_{ab\cdot c}]$$

β) $$^{(a)}\bar{A}^{\;1}_{xy} = \tilde{W}[\bar{A}_{\overline{ab}\cdot c}]$$

Aus der früher betonten Relation,

$$A^{ai}_{\underset{xy}{1}} < \bar{A}^{ai}_{xy}$$

die eine unmittelbare Folge der zeitlichen Vor-Verlegung der Kapitalsauszahlung ist, ergibt sich nach beiderseitiger Addition des Versicherungswertes $A^{a}_{\underset{xy}{1}}$ unter gleichzeitiger Benützung der beiden obigen Gleichungen α) und β)[1] die Beziehung

$$^{(a)}A^{\;1}_{xy} < \bar{A}^{a}_{xy};$$

übrigens erscheint dieselbe besonders klar, wenn man sie in den Analogiewerten schreibt:

$$\tilde{W}[A_{\overline{ab}\,c}] < \tilde{W}[\bar{A}_{ab\,c}].$$

Die Gleichung

$$^{(a)}A^{\;1}_{xy} = \tilde{W}[\bar{A}_{\overline{ab}\,c}]$$

bietet infolge der praktischen Bedeutung des »Überlebenskapitales nach einem Aktiven» besonderes Interesse.

Sie besagt, dass die Kapitalversicherung auf den Überlebensfall nach einem Aktiven den *gleichen inneren Bau* aufweist, wie eine Überlebensversicherung, welche fällig wird

---

[1] Als evidente Folgerungen aus den Gleichungen a und β können auch die folgenden Ungleichungen unmittelbar angeschrieben werden

$$A^{ai}_{xy} < A^{a}$$

$$\bar{A}^{ai}_{\underset{xy}{1}} < {}^{(a)}A^{\;1}_{xy}$$

$$A^{a}_{\underset{xy}{1}} < {}^{(a)}A^{\;1}_{xy} < A^{a}_{xy}.$$

Denn alle Versicherungswerte links sind *Teilbarwerte* der Anwartschaften rechts.

unter der besonderen Voraussetzung, dass die begünstigte Person (c) den *Ablauf des längsten* zweier bezeichneter Leben (a), (b) *überlebt*, die selbst in einem bestimmten einseitigen Abhängigkeitsverhältnisse stehen.

Tritt im allgemeineren Falle anstelle der begünstigten Einzelperson eine begünstigte verbundene Gruppe ($c, d \ldots$), so gilt ebenso

$$ {}^{(a)}A^{1}_{xyz\ldots} = \tilde{W}\left[A_{ab\,cd\ldots}\right]. $$

Formell zählt also das aktive Individuum auch hier gleichsam doppelt; die Schlussgleichung ist die Anwendung des früher aufgestellten allgemeinen Prinzipes der Analogie-Bildungen auf den *Ablebensanspruch*.

Doch sei bei diesem besonderen Falle noch kurz verweilt, der begrifflich interessant ist:

Jeder Überlebensanspruch nach einem Aktiven nimmt die Gestalt einer »*zwei-seitigen Überlebensversicherung innerhalb eines höheren Personenkomplexes*» an, wie mit dem Hinweise auf das Vorangehende gesagt werden kann. Natürlich ist aber hierbei die Belastung des Versicherers in den beiden versicherten Überlebensfällen (im weiteren Sinne) ungleich gross, wie es der zeitlichen Verschiedenheit der Auszahlungen in den beiden Fällen entspricht.

Beispielsweise ergibt sich der Aufbau des *allgemeineren Überlebenskapitales* in ausführlicher Schreibweise

$$ {}^{(a)}A^{1}_{xyz\ldots} = $$

$$ = \int_0^\infty \nu_{x+t}\, e^{-\int_0^t (\nu_{x+t} + \mu^{a}_{x+t} + \mu_{y+t} + \mu_{z+t} + \cdots + \delta)\,dt}\; A^{i\;1}_{x+t,\,y+t,\,z+t\ldots}\, dt + $$

$$ + \int_0^\infty \mu^{a}_{x+t}\, e^{-\int_0^t (\nu_{x+t} + \mu^{a}_{x+t} + \mu_{y+t} + \mu_{z+t} + \cdots + \delta)\,dt}\; 1\,.\,dt $$

und somit schliesslich die Gleichung

$$^{(a)}\bar{A}^{1}_{xyz\ldots} = \int_0^\infty \left[\mu^{a}_{x+t} + \nu_{x+t} A^{i}_{\overset{1}{x+t},\, y+t,\, z+t\ldots} \right] \cdot {}_tE^{a}_{xyz\ldots}\, dt.$$

Es sei gestattet, hier ein Problem anzudeuten, das in der Praxis von Bedeutung ist, gleichseitig aber auch vom rein theoretischen Standpunkte sehr interessant erscheint, weil es die innere Verwandtschaft von Invaliditätswerten mit den Überlebensversicherungen von einem eigenartigen Gesichtswinkel beleuchtet.

Die Euler-Maclaurin'sche Summenformel

$$h \sum_a^b f(x) = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{1}{2} h \left[f(x)\right]_a^b + \frac{1}{12} h^2 \left[f'(x)\right]_a^b + \cdots$$

führt in ihrer Anwendung auf die Funktion $f(x) = D_x$ und das Intervall $h = \frac{1}{m}$, wenn man die halbkonvergente Reihe nach dem dritten Gliede abbricht und $a = x$ setzt, zu der Gleichung

$$\frac{1}{m} \sum_x^\infty D_x = \int_x^\infty D_x dx + \frac{1}{2m} D_x - \frac{1}{12 m^2} (D_x)'$$

und gibt damit eine näherungsweise Ableitung einer bruchjährig zahlbaren Rente aus der kontinuierlich laufenden:

$$a_x^{(m)} = \bar{a}_x + \frac{1}{2m} - \frac{1}{12 m^2} \cdot \frac{D'_x}{D_x}.$$

Nun ist aber der Quotient

$$\frac{D'_x}{D_x} = \frac{d}{dx}\log D_x = \frac{d}{dx}[\log l_x + x \log v] = -[\mu_x + \delta];^{1}$$

wir gelangen daher zur Darstellung der m:tel Rente in der Form

$$a_x^{(m)} = a_x + \frac{1}{2m} + \frac{1}{12m^2}(\mu_x + \delta),$$

ohne dass wir dabei die MOIVRE'sche Hypothese über ein gleichmässiges Absterben innerhalb der Zeiteinheit vorauszusetzen brauchten.[2] Der wesentliche Vorzug dieser als »WOOLHOUSE'sche Näherungsformel» bekannten Gleichung liegt nun darin, dass sie in der vorliegenden Gestalt gleichzeitig die bruchjährige Verbindungsrente einer beliebigen Gruppe von Versicherten gibt.

In der Tat, denken wir uns eine Gruppe von g Personen, so können wir jede Rente, deren Auszahlung an das Bestehen der Gesamtverbindung $(x, y, \ldots z)$ gebunden ist, uns auch definiert denken als die einfache *Leibrente* eines *Lebens höherer Ordnung* (Leben g:ter Ordnung[3]), dessen »Überlebendenzahlen» durch

$$L_{(g)} = L_{xy\ldots z} = l_x l_y \ldots l_z$$

---

[1] Die Ableitung der Definitionsgleichung

$$D_x = e^{-\int_0^x (\mu_x + \delta)\,dt}$$

liefert unmittelbar den obigen Wert

$$D'_x = -[\mu_x + \delta]\,D_x.$$

[2] Hätte man die Annahme

$$l_{x+a} = l_x - a(l_x - l_{x+1})$$

treffen müssen, wie es bei der Ableitung anderer Näherungsformeln der Fall ist, dann wäre das so erhaltene Resultat nicht ohne weiteres auf Verbindungsrenten übertragbar.

[3] *In diesem Sinne kann der Grundgedanke vorliegender Abhandlung so formuliert werden, dass der versicherte Aktive ein »Leben zweiter Ordnung» darstellt, welches durch den Invaliditätseintritt in ein »Leben erster Ordnung» übergeht.*

und dessen »Sterbeintensität» durch

$$\mu_{(g)} = \mu_{xy\ldots z} = \mu_x + \mu_y + \cdots + \mu_z$$

definiert sind.

Von diesem Gesichtspunkte aus ist also die obige WOOLHOUSE'sche Gleichung geeignet, *ohne irgend eine formelle Änderung* auch die bruchjährige Rente $a_{(g)}^{(m)} = a_{xy\ldots z}^{(m)}$ aus der kontinuierlichen Verbindungsrente der Gruppe (g) herzuleiten.

Für den besonderen Fall $g = 2$ gestattet daher WOOLHOUSE's Formel folgende Differenzdarstellung der »unterjährig zahlbaren Überlebensrente»

$$a_{x|y}^{(m)} = a_y^{(m)} - a_{xy}^{(m)} =$$

$$= \bar{a}_y + \frac{1}{2m} + \frac{1}{12m^2}(\mu_y + \delta) -$$

$$-\left[\bar{a}_{xy} + \frac{1}{2m} + \frac{1}{12m^2}(\mu_x + \mu_y + \delta)\right] =$$

$$= \bar{a}_y - \bar{a}_{xy} - \frac{1}{12m^2}\mu_x;$$

um also von der kontinuierlichen Überlebensrente zur m:tel Rente derselben Art überzugehen, ist eine Korrektur des Barwertes erforderlich, die lediglich von der Sterbe-Intensität der »*nichtbegünstigten* Person» abhängt:

$$a_{x\,y}^{(m)} = a_{x\,y} - \frac{1}{12m^2}\mu_x.$$

Betrachten wir nun den Sachverhalt unter den Invaliditätsanwartschaften. Zunächst ist klar dass die bruchjährige Rente an einen Invaliden gegeben ist durch die Relation

$$a_x^{i(m)} = \bar{a}_x^i + \frac{1}{2m} + \frac{1}{12m^2}(\mu_x^i + \delta).$$

Ebenso leuchtet unmittelbar die Richtigkeit der beiden folgenden Gleichungen ein

$$^{(a)}a_x^{(m)} = {}^{(a)}a_x + \frac{1}{2m} + \frac{1}{12m^2}(\mu_x^a + \delta)$$

und

$$a_x^{a(m)} = a_x^a + \frac{1}{2m} + \frac{1}{12m^2}(\mu_x^{aa} + \delta);$$

nun ist aber die Anwartschaft auf eine bruchjährige Invalidenrente

$$a_x^{ai(m)} = {}^{(a)}a_x^{(m)} - a_x^{a(m)}.$$

Bei der Einführung der obigen WOOLHOUS'schen Werte fällt die Hälfte der Glieder aus der Rechnung und es bleibt als Rest

$$a_x^{ai(m)} = {}^{(a)}a_x - a_x^a + \frac{1}{12m^2}(\mu_x^a - \mu_x^{aa}).$$

Da die erste Differenz rechts die Anwartschaft auf kontinuierliche Invalidenrente, der Klammerwert aber die Invalidisierungskraft ν_x vorstellt, folgt die Gleichstellung

$$a_x^{ai(m)} = a_x^{ai} - \frac{1}{12m^2}\nu_x.$$

Diese Gleichung besagt, dass das »Korrekturglied», mittels dessen man den Übergang von der Anwartschaft auf eine kontinuierliche Invalidenrente zu unterjähriger Zahlung bewerkstelligen kann, lediglich abhängt von der Invalidisierungskraft ν_x des versicherten Aktiven.

Bringen wir dieses Ergebnis in Verbindung mit dem oben bezüglich der bruchjährigen Überlebensrenten gewonnenen, so ist nicht nur die formelle Analogie offenkundig, sondern auch rein sachlich eine unleugbare Verwandtschaft der gegenübergestellten Fälle gegeben.

Man kann nämlich sagen, dass in beiden Fällen die erforderliche Korrektur als jenes Produkt erscheint, dessen

einer Faktor die Konstante $\frac{1}{12m^2}$, dessen anderer Faktor *jene Intensität* ist, welche den *Anlass* zum Versicherungsfalle herbeiführt: Denn dies ist tatsächlich bei der einseitigen Überlebensversicherung die »*Sterbekraft der nicht begünstigten Person*» μ_x und bei der Anwartschaft auf Invalidenrente die *Invalidisierungskraft* ν_x.

Auch wenn man der Berechnung bruchjähriger Renten andere Formeln zugrunde legt, lassen sich immer gewisse Korrelationen zwischen $a_{x\,y}^{(m)}$ und a_x^{ai} feststellen. In dem allereinfachsten Falle äussert sich die Verwandschaft dieser beiden Versicherungswerte darin, dass überhaupt keine Korrektur erfordert wird, um von kontinuierlicher zu unterjähriger Zahlung überzugehen.

Dieser primitive Fall liegt vor, wenn man sich bei der Ermittlung des Barwertes für die m:tel Rente der bekannten Näherungsformel von VAN GEER bedient.[1]

$$a_x^{(m)} = \mathrm{a}_x - \frac{m-1}{2m} = \bar{a}_x + \frac{1}{2m}.$$

Da hier das Korrekturglied eine konstante Grösse ist, und auch für die Verbindungsrente unverändert auftritt, fällt es bei der Differenzbildung fort und es gelten in erster, roher[2] Annäherung die Gleichungen

$$a_{x\,y}^{(m)} - \mathrm{a}_{x\,y} = \bar{a}_{x\,y}$$

sowie

$$a_x^{ai\,(m)} - \mathrm{a}_x^{ai} = \bar{a}_x^{ai}.$$

Gerade im Ausfalle des Korrekturgliedes ist also hier der Analogiecharakter gelegen, der indessen in der vollständigeren WOOLHOUS'schen Formel präziser zum Ausdrucke kommt.

---

[1] Die folgende Bemerkung kann auch aus der WOOLHOUS'schen Formel entnommen werden, wenn man darin schon das dritte Glied (der EULER-MACLAURIUS'schen Reihe) vernachlässigt.

[2] Doch ist diese Erstannäherung praktisch oft hinreichend genau.

Letztere gestattet übrigens auch, bei den allgemeinsten Überlebensrentenansprüchen Abänderungen der Zahlungsmodalität sehr einfach rechnerisch durchzuführen.

Es handle sich beispielsweise um eine Überlebensrente, bei welcher sowohl die »begünstigte« als auch »nicht begünstigte Partei« selbst schon eine Personen-Verbindung ist! Benützt man in dem früher angedeuteten Sinne den Begriff eines »Lebens höherer Ordnung«, so fällt diese allgemeine Überlebensrente unter den sachlich nun etwas weiteren Begriff der einfachen und ergibt unmittelbar

$$a^{(m)}_{x \dots s\, y \dots z} = a_{x \dots s\, y \dots z} - \frac{1}{12 m^2} \mu_{x \dots s}.$$

Das Korrekturglied ist also auch hier proportional zu der den Versicherungsfall *veranlassenden Intensität: Zur Ausscheidekraft der »nicht begünstigten Gruppe«* ($x, \dots s$).

Es sei — um ein einfaches Beispiel anzuführen — nach der *bruchjährigen Waisenpension* gefragt, welche den Kinde nach dem *Ableben des Vaters oder der Mutter* ausgezahlt werden soll.[1]

Im Einklang mit den vorangehenden Überlegungen erhalten wir die Gleichung

$$a^{(m)}_{\overline{xy}\, z} = a^{(m)}_{z} - a^{(m)}_{\overline{xy}z} = a_{\overline{xy}z} - \frac{1}{12 m^2} (\mu_x + \mu_y).$$

Eine im Wesen ganz gleichartige Erweiterung des Gesichtskreises macht die früher aufgestellte Formel

$$a^{ai(m)}_{x} = a^{ai}_{x} - \frac{1}{12 m^2} \nu_x$$

ohne irgend eine formelle Änderung prinzipiell anwendbar auf Invaliditätswerte allgemeinerer Art, das heisst auf Invaliditätsanwartschaften von Personengruppen, in denen sich

[1] Hier ist der Einfachheit wegen davon Abstand genommen, dass die Waisenpension zeitlich fix begrenzt ist (Überlebensrente des Typus II), wobei dann der Übergang von der kontinuierlichen zur bruchjährigen Rente ein komplizierteres Korrekturglied erforderlich macht.

(neben Versicherten der gemischten Klasse) auch mehrere »als Aktive» versicherte befinden.

Es sei hier als Gegenstück zum letztgegebenen Beispiele folgender Fall angeführt. Zugunsten eines Kindes ist eine Versicherung auf einen Erziehungsbeitrag abgeschlossen, über dessen Höhe man zwei Vereinbarungen getroffen habe:

Wird das Kind Waise — Eintritt von $T_{(x)}$ *oder* $T_{(y)}$ —, so erhält es die jährliche Waisen-Rente B;[1] wird einer der beiden Versorger invalid,[2] so sei die Höhe des Erziehungsbeitrages b pro Jahr. Gefragt ist nach der Korrektur, welche an dem Versicherungsbarwerte beim Übergange zu unterjähriger Zahlung anzubringen ist.

Wir finden (unter gleichzeitiger Anwendung der auf Seite 168 vorgeschlagenen Symbolik für die Gruppenanwartschaften) als die Summe beider Barwerte

$$B\,\mathrm{a}^{aa(m)}_{xy\,z} + b\,\mathrm{a}^{ai,\,ai(m)}_{xy|z} = B\,\mathrm{a}^{aa}_{xy\,z} - \frac{B}{12m^2}(\mu^a_x + \mu^a_y) +$$

$$+ b\,\mathrm{a}^{ai,\,ai}_{xy\,z} - \frac{b}{12m^2}(\nu_x + \nu_y).$$

Eine kurze Überlegung bestätigt, dass das Wesentliche aller früheren Behauptungen auch hier volle Richtigkeit beibehält: Die beiden anzubringenden Korrekturen sind das Produkt eines konstanten Faktors mit derjenigen »Intensität», welche den Versicherungsfall herbeiführt; das ist hier eben die Invalidisierungskraft des Elternpaares

$$\nu_x + \nu_y = \nu_{xy},$$

beziehungsweise deren reine Sterbe-Intensität

$$\mu^a_x + \mu^a_y = \mu^a_{xy}.$$

[1] Auch hier ist die vereinfachende Annahme getroffen, welche in der Anmerkung der Vorseite angeführt wurde.

[2] Diese doppelte Invalidenversicherung ist beispielsweise für eine Familie gedacht, in welcher *beide* Versorger durch ihre berufliche Betätigung in ausgesprochener Unfallsgefahr stehen.

In diesem Sinne können wir also auch hier das Resultat formell dem Falle einer einfachen Invaliditätsanwartschaft unterordnen

$$a_{xy\,z}^{aa(12)} = a_{xy\,z}^{aa} - \frac{1}{12m^2}\mu_{xy}^{a}$$

und

$$a_{xyz}^{ai,\,ai(m)} = a_{xyz}^{ai,\,ai} - \frac{1}{12m^2}\nu_{xy}\,.$$

Das eben behandelte Beispiel kann man mit Hilfe der geometrischen Begriffe (Figur »*D*») sehr anschaulich machen. Die kombinierte Anwartschaft auf Waisenpension und Erziehungsbeitrag bei Invalidisierung eines der beiden Versorger lässt sich nämlich definieren als die Versicherung, welche fälllg wird[1] mit dem Zeitpunkte, in welchem die erste der beiden Wertungskurven ξ_x und ξ_y den Doppelbereich (x) verlässt, das heisst einen Punkt der Grenzkurve x erreicht; liegt nun dieser Austrittspunkt auf dem Kurvenstücke PQR, so ist der fällige Barwert $a_{xy\,z}^{aa(m)}$, anderenfalls (der erste Austrittspunkt liegt ausserhalb des gemeinsamen Grenzstückes) wird $a_{xyz}^{ai,\,ai(m)}$ fällig.

Es sei gestattet, zum Abschlusse unserer Betrachtungen anhand einiger der Praxis entnommener Probleme zu zeigen, wie es auf der skizzierten Basis tatsächlich gelingt, die Invaliditätswerte systematisch zu analysieren, sie formell und sachlich klarer zu sehen.

Wenn man den im vorhergehenden eingeschlagenen Weg der Analyse fortsetzt, gestaltet sich nämlich die Auffassung und Gegenüberstellung vieler, auch komplizierterer Begriffe der Versicherungspraxis ausserordentlich anschaulich. Als erstes Beispiel mögen hier zwei häufig verwendete Arten von Witwenanwartschaften einander gegenübergestellt werden.

[1] Unter der Voraussetzung natürlich, dass zu derselben Zeit die Lebenskurve ξ_z noch nicht in ihrem Todespunkte geendet hat.

Es seien in geschlossener analytisches Form darzustellen die beiden folgenden Versicherungswerte

Fall α) *Die Anwartschaft auf Witwenpension nach einem x jährigen, verheirateten Aktiven:* ${}^{(a)}\mathrm{a}_{x,y}^{(12)}$.

Fall β) *Die Anwartschaft auf Witwenpension nach einem x jährigen Aktiven ohne Zivilstandesangabe:* ${}^{(a)}\mathrm{a}_{x\,(y)}^{(12)}$.

Zur besseren Annäherung an die in der Praxis vorkommenden Aufgaben ist im folgenden die Annahme fallen gelassen, dass die Renten kontinuierlich seien. Überdies kann an Stelie der eingeführten Witwenrenten $\mathrm{a}_y^{(12)}$ bei Heranziehung einer Heiratstafel[1] der speziellere Witwenanspruch gesetzt werden: *Monatliche Pension bis zur Wiederverehelichung*

$$\mathrm{a}_y'^{(12)} = \frac{N_y^{\varepsilon\,(12)}}{D_y^{\varepsilon}}$$

plus »*Abfertigung im Falle eines neuerlichen Eheschlusses*». Die Höhe der letzteren ist meist als das *n*fache des jährlichen Rentenbetrages bestimmt, den die Witwe bezog.[2]

Ist h die Heiratswahrscheinlichkeit einer y jährigen Versicherten, so wird $U_y^{\varepsilon\eta}$ — der Barwert dafür, dass die Summe 1 als Abfertigung geleistet wird, falls die y jährige Frau aus dem Stande der Witwenschaft »ε» in den neuen Ehestand »η» eintritt —[3] gegeben durch die Gleichung

$$U_y^{\varepsilon\eta} = \frac{r^{\frac{1}{2}}}{D_y^{\varepsilon}} \sum_{\nu=0}^{\omega-y} h_{y+\nu}\, D_{y+\nu}^{\varepsilon}.$$

Somit erscheint der »spezielle Witwenanspruch» im Zeit-

---

[1] D_y^{ε} sind eigentlich die diskontierten Überlebendenzahlen der »Tafel der Ledigen»; doch verwendet man sie für den allgemeineren »Stand des Unverheiratet-Seins» und legt sie also auch der Berechnung von Witwenanwartschaften im engeren Sinne zu Grunde.

[2] Häufig ist diese Relation durch den Faktor $n = 3$ festgelegt.

[3] Man vergleiche die analoge Bedeutung des Doppel-Index »*ai*» für die Bezeichnung aller Anwartschaften eines Aktiven, die mit dem Übergange in den Zustand der Invalidität fällig werden.

punkte des Ablebens des Gatten (nach t Jahren) schliesslich in der Zusammensetzung

$$\mathrm{a}^{i\,(12)}_{y+t} + n \,.\, U^{w\,u}_{y+t},$$

wovon in den folgenden Überlegungen gelegentlich Gebrauch gemacht werden soll.

Fall α.

Der Barwert der Anwartschaft auf Witwenrente nach einem x jährigen aktiven Ehemanne erscheint in Konsequenz der bisherigen analytischen Methode als »zweiseitige» Überlebensversicherung zugunsten einer vorher bestimmten Person einer gegebenen Verbindung zu dreien.

Im folgenden sei die Doppelverbindung des aktiven Gatten durch $(\mu\nu)$ bezeichnet, womit gleichzeitig ihr Charakter angedeutet wird. Der Witwenanspruch ist gemäss obigem eine an das Leben der Frau gebundene Rente, deren Bemessung mit der Auflösung der Verbindung $(\mu\nu)$ erfolgen kann, — deren tatsächliche Auszahlung aber erst mit dem »letzten Tode», also nach $\mu\nu y$ beginnt.

Daraus ergibt sich der folgende Ansatz, der unmittelbar die geschlossene analytische Form der gefragten Witwenanwartschaft liefert

$${}^{(\alpha)}\mathrm{a}^{(12)}_{x\,y} = W\left[\mathrm{a}^{(12)}_{\mu\nu\,y}\right]$$

$${}^{(\alpha)}\mathrm{a}^{(12)}_{x\,y} = \int_0^{\infty} \left[\mu^{a}_{x+t}\,\mathrm{a}^{(12)}_{y+t} + \nu_{x+t}\,\mathrm{a}^{i\,(12)}_{x+t\,y+t}\right] . \, e^{-\int_0^t (\mu^{aa}_{x+t}+\mu_{y+t}+\delta)\,dt}\, dt .$$

Diese Form bietet die Möglichkeit, darauf Rücksicht zu nehmen, dass die Sterbenswahrscheinlichheit der Frau vor und nach dem Tode des Mannes prinzipiell verschieden sein kann; nicht der Sterblichkeitsunterschied Gattin : Witwe kommt hier in Betracht, der wohl auch besteht, doch prak-

tisch belanglos bleibt, sondern vielmehr die Möglichheit einer *entscheidenden Änderung des Gefahrmomentes*, insbesondere durch einen Wechsel im Aufenthaltsgebiete.

Jörgensen erwähnt in seiner Theorie der Lebensversicherung (§ 67) gelegentlich der Besprechung der Gleichung

$$\bar{a}_{xy} = \int_0^\infty \mu_{x+t} \bar{a}_{y+t} e^{-\int_0^t (\mu_{x+t}+\mu_{y+t}+\delta)\, dt} dt$$

das typische Text-Book-Beispiel eines Kolonialbeamten, der mit seiner Frau in Indien lebt; beabsichtigt dieselbe, als Witwe in die Heimat zurüchzukehren, so tritt für μ_{y+t} im Exponenten die Frauensterblichheit in Indien, für $\bar{a}_{y+t}$ hingegen diejenige im Mutterlande in Rechnung.

Es wird also in der ausführlicheren Gleichung

$$\bar{a}_{xy} = \int_0^\infty \left[\mu_{x+t} e^{-\int_0^t (\mu_{x+t}+\overset{\mathrm{I}}{\mu}_{y+t}+\delta)\, dt} \int_0^\infty e^{-\int_0^\tau (\overset{\mathrm{II}}{\mu}_{y+t+\tau}+\delta)\, d\tau} d\tau\right] dt$$

$$\overset{\mathrm{II}}{\mu}_{y+v} < \overset{\mathrm{I}}{\mu}_{y+v}$$

einzuführen sein, falls man den Sterblichkeitswechsel der Frau beim Tode des Gatten berücksichtigen will.

Bei der Diskussion der oben angegebenen Gleichung für die Witwenanwartschaft nach einem verheirateten Aktiven kann man diese Überlegungen noch vertiefen, da ja nun *zwei Überlebensfälle im weiteren Sinne* eintreten können, die wesentlich verschieden sind und unter gewissen Voraussetzungen gerade bezüglich der eben *vorliegenden Frage* nach einem *prinzipiellen Wechsel in der Frauensterblichkeit verschieden beurteilt* werden müssen.

Was zunächst den durch μ^a_{x+t} hervorgerufenen Überlebensfall anbelangt, so ist ohne weiteres klar, dass man auf Grund von Überlegungen derselben Art, wie sie von Jörgensen an der Gleichung für $\bar{a}_{xy}$ angestellt worden sind, in dem erhaltenen Ausdrucke von ${}^{(a)}\mathrm{a}^{(12)}_{xy}$ für μ_{y+t} im Exponenten

die Sterblichkeitskraft der Frau im *Koloniallande*, bei der Berechnung der Witwenrente $a^{(12)}_{y+t}$ oder des speziellen Witwenanspruches $\mathrm{a}^{i(12)}_{y+t} + n\,U''_{y+t}$ hingegen die Sterblichkeit im *Heimatlande* einführen wird.

Die Ermittlung der Belastung, welche durch den Invalidisierungsfall entsteht, führt zu Betrachtungen ganz analoger Art: Es handelt sich hier um die Berechnung der Anwartschaft auf Witwenrente nach einem x jährigen, verheirateten Invaliden, welche sich definieren lässt als

$$\mathrm{a}^{i(12)}_{x\,y} = \int_0^\infty \mu^i_{x+t}\, e^{-\int_0^t (\mu^i_{x+t} + \mu_{y+t} + \delta)\, dt}\, \mathrm{a}^{(12)}_{y+t}\, dt.$$

Will man nun vollständig streng sein, so muss man auf einen prinzipiellen Wechsel der Frauensterblichkeit vor und nach dem Tode des Gatten in der Weise Rücksicht nehmen, dass μ_{y+t} der höheren Sterblichkeit im *Kolonial*-Lande, $\mathrm{a}^{(12)}_{y+t}$ hingegen der niedrigeren Sterblichkeit im *Heimatlande* entspricht.

Vorausgesetzt muss aber dabei ausdrücklich werden: Dass der Invaliditätsfall *nicht schon selbst* die Veranlassung zu dem Sterblichkeitswechsel der Frau gegeben hat!

So ist etwa im obigen Text-Book-Beispiele diese Möglichkeit einer zweiten, feineren Unterscheidung dann, aber auch nur dann gegeben, wenn der Kolonialbeamte *nicht* die Absicht hegt, mit seiner Familie in das Mutterland zurückzukehren, falls er invalid werden sollte.

Ist diese Bedingung erfüllt, dann kann man unter Verwendung zweier verschiedener Frauensterbetafeln eine prinzipielle Änderung der Intensität μ_y auch beim Tode des vorher invalid gewordenen Gatten in der Rechnung zum Ausdrucke bringen. Man wird also dann in die Hauptgleichung der Witwenanwartschaft ${}^{(a)}\mathrm{a}^{(12)}_{x\,y}$ einführen:

$$a^{i(12)}_{x+t\;y+t} = \int_0^\infty \mu^i_{x+t+\tau}\, e^{-\int_0^\tau (\mu^i_{x+t+\tau} + \mu^1_{y+t+\tau} + \delta)\, d\tau}\, \mathrm{a}^{(12)}_{y+t+\tau}\, d\tau$$

wobei[1]

$$\mathrm{a}^{(12)}_{y+t+\tau} = \int_0^\infty e^{-\int_0^\nu \left(\overset{\mathrm{II}}{\mu}_{y+t+\tau+\nu}+\delta\right)d\nu}\, d\nu + \frac{1}{24} + \frac{1}{12^3}\left(\overset{\mathrm{II}}{\mu}_{y+t+\tau} + \delta\right)$$

und prinzipiell

$$\overset{\mathrm{II}}{\mu}_y < \overset{\mathrm{I}}{\mu}_y.$$

Ist obige Bedingung aber nicht erfüllt, dann ist auch im Exponenten der ersten Formel anstelle $\overset{\mathrm{I}}{\mu}_{y+t+\tau}$ nun $\overset{\mathrm{II}}{\mu}_{y+t+\tau}$ einzuführen und daher der gesamte Barwert $\mathrm{a}^{i(12)}_{x+t\, y+t}$ einheitlich mit der niedrigeren Sterblichkeit der Frau zu berechnen. In diesem letzteren Falle ist somit der Überlebensfall im weiteren Sinne in seiner Wirkung auf den Verlauf der Frauensterblichkeit gleichwertig dem Überlebensfall im engeren Sinne.

Fall β.

Der Barwert der Anwartschaft auf Witwenrente nach einem gegenwärtig x jährigen »Aktiven überhaupt« (ohne Rücksicht auf den Zivilstand) besitzt in der hier gewählten analytischen Darstellungsweise die sehr klare Form

$$^{(a)}\mathrm{a}^{(12)}_{x\,(y)} = \tilde{W}\left[\mathrm{a}^{(12)}_{\mu\nu\,(y)}\right]^{2}$$

$$^{(a)}\mathrm{a}^{(12)}_{x\,(y)} = \int_0^\infty \left[\mu^{a}_{x+t}\,\mathrm{a}^{a(12)}_{x+t,(y)} + \nu_{x+t}\,\mathrm{a}^{ai(12)}_{x+t,(y)}\right] e^{-\int_0^t \left(\mu^{aa}_{x+t}+\delta\right)dt}\, dt.$$

---

[1] Der Faktor $\frac{1}{12^3}$ ist die Konstante $\frac{1}{12\,m^2}$ der Woolhouse'schen Näherungsformel bei monatlicher Auszahlung der Witwenrente.

[2] Das Analogie-Symbol gibt gleichzeitig die Definition dieser Anwartschaft vom analytischen Gesichtspunkte: Durchschnittliche Überlebensrente, die fällig wird beim »Aussterben« ≡ »letzten Tode« der Doppel-Verbindung $(\mu\nu)$; darüber, ob bereits zur Zeit des Versicherungsabschlusses eine »dreifache Verbindung« vorlag, ob überhaupt die dritte und als begünstigte bezeichnete Person y in die Verbindung eintritt, darüber sind hier prinzipiell keinerlei Einzelangaben vorhanden.

Die beiden eingeführten Durchschnittswerte sind als solche durch die Einklammerung des Frauenbuchstabens kenntlich gemacht und können leicht definiert werden: Es sei $\frac{L^a_{xy}}{L^a_x}$ die Wahrscheinlichkeit eines x jährigen Aktiven, mit einer y jährigen Frau verheiratet zu sein (entnommen aus statistischen Zivilstandesdaten), dann ergibt die Summation über alle Frauenalter $\frac{\sum_{y_1}^{y_\nu}{}_\lambda L^a_{xy_\lambda}}{L^a_x}$ die »Ehewahrscheinlichkeit« des x jährigen Aktiven überhaupt.

Somit gilt die Definition

$$a^{a(12)}_{x.(y)} = \frac{1}{L^a_x} \sum_{y_1}^{y_\nu}{}_\lambda L^a_{xy_\lambda}\, a^{(12)}_{y_\lambda},$$

beziehungsweise bei Spezialisierung der Witwenanwartschaften

$$a^{a(12)}_{x.(y)} = \frac{1}{L^a_x} \sum_{y_1}^{y_\nu} \Big[L^a_{xy_\lambda} \left\{ a^{s(12)}_{y_\lambda} + n\, U^{(w)}_{y_\lambda} \right\} \Big].$$

Die durchschnittliche Belastung durch Witwenrente nach einem *im Alter $x + t$ aktiv-verstorbenen Versicherten*, über dessen Zivilstandesverhältnis im Beitrittsalter x *keine Voraussetzung* gemacht wurde, ist daher schliesslich gegeben durch die Gleichung

$$a^{a(12)}_{x+t.(y)} = \frac{1}{L^a_{x+t}} \sum_{y_1}^{y_\nu}{}_\lambda L^a_{x+t.y_\lambda}\, a^{(12)}_{y_\lambda}$$

mit naheliegender Möglichkeit, den früher definierten *speziellen Witwenanspruch* an Stelle des allgemeinen einzuführen.

Im »anderen Überlebensfalle« wird ein Barwert fällig der sich erweist als die *durchschnittliche Belastung durch Witwenrente nach einem im Alter $x + t$ invalid gewordenen Manne* ohne irgend welche Voraussetzungen über seinen Zivilstand

beim Versicherungsabschlusse, also der zweite Durchschnittwert $a^{ai(12)}_{x+t,(y)}$ in unserer Formel.

Man definiert analog mit Berufung auf Zivilstandestabellen

$$a^{ai(12)}_{x,(y)} = \frac{1}{L^a_x} \sum_{y_1}^{y_\nu} {}_\lambda L^a_{xy_\lambda} a^{i(12)}_{x\,y_\lambda}$$

und besitzt auch hier die Möglichkeit einer Spezialisierung des Witwenanspruches, etwa durch

$$a^{ai(12)}_{x,(y)} =$$

$$= \frac{1}{L^a_x} \sum_{\lambda=y_1}^{\lambda=y_\nu} L^a_{xy_\lambda} \int_0^\infty \mu^i_{x+t} e^{-\int_0^t (\mu^i_{x+t}+\mu_{y+t}+\delta)\,dt} \left[a_{y_\lambda+t} + n\,U_{y_\lambda+t}\right] dt.$$

Die Vergleichung der Witwenanwartschaften nach einem verheirateten Aktiven ${}^{(a)}a^{(12)}_{x\,y}$ mit derjenigen ohne Rücksicht auf Zivilstand ${}^{(a)}a^{(12)}_{x\,(y)}$ ergibt als auffallendsten Unterschied im Aufban der beiden Versicherungswerte:

$${}^{(a)}a^{(12)}_{x\,y} = \int_0^\infty \left[\mu^a_{x+t}\, a^{(12)}_{y+t} + \nu_{x+t}\, a^{i(12)}_{x+t\,y+t}\right] e^{-\int_0^t (\mu^{aa}_{x+t}+\mu_{y+t}+\delta)\,dt} dt$$

$${}^{(a)}a^{(12)}_{x\,(y)} = \int_0^\infty \left[\mu^a_{x+t}\, a^{a(12)}_{x+t,(y)} + \nu_{x+t}\, a^{ai(12)}_{x+t,(y)}\right] e^{-\int_0^t (\mu^{aa}_{x+t}+\delta)} dt,$$

dass in der zweiten Formel der *Exponent* von μ_{y+t} *unabhängig* ist, was übrigens nach den vorhergehend über die Bildung der Durchschnittswerte $a^{aa(12)}_{x+t,(y)}$ und $a^{ai(12)}_{x+t,(y)}$ gemachten Bemerkungen unmittelbar einleuchtet.

Von einer allseitigen Ausführung des Vergleiches beider Formeln sei hier Abstand genommen, doch möge eine kurze Überlegung gestattet sein, aus welcher sich ergibt, dass bei der Bemessung der Witwenanwartschaft nach einem Aktiven

ohne Standesangabe die Berücksichtigung eines prinzipiellen Sterblichkeitswechsels der Frau vor und nach dem Tode des Gatten wohl *nicht in Betracht kommen kann.*

1) Die Frauensterblichkeit *vor* dem Tode des Mannes kommt in obiger Gleichung für ${}^{(a)}a_{x\,(y)}^{(12)}$ bloss in dem Durchschnittsbarwerte $a_{x+t.\,(y)}^{ai\,(12)}$ zum Ausdrucke und selbst da bloss im *Exponenten* der Formel

$$a_{x+t\,(y)}^{ai\,(12)} = \frac{1}{L_{x+t}^{a}} \sum_{y_1}^{y_r} \left\{ L_{x+t.\,y_\lambda}^{a} \int_0^{x} \mu_{x+t+\tau}^{i}\, e^{-\int_0^{\tau} (\mu_{x+t+\tau}^{i} + \mu_{y+t+\tau} + \delta)\, d\tau}\; a_{y_\lambda+\tau}^{(12)}\, d\tau \right\}.$$

Die Frage nach obiger zeitlicher Unterscheidung der Frauensterblichkeit besteht also hier überhaupt nicht zu Recht, wenn durch den Invalidisierungsfall schon die beabsichtigte Herabsetzung des Gefahrmomentes angeregt wird: Wenn beispielsweise in dem oben erwähnten Text-Book-Falle ein Kolonialbeamter beim Versicherungsabschlusse erklärt, mit seiner Gattin in die Heimat zurückkehren zu wollen, falls er invalid würde.

2) Die Fragestellung würde auch entfallen, wenn etwa im Sinne desselben Beispieles der Aktive beim Versicherungsabschlusse eine im Koloniallande Einheimische schon als Gattin besässe oder eine solche zur Frau später wählen sollte, falls er im Alter x noch ledig.

3) Da es sich um die Ermittlung von ziemlich runden Durchschnittswerten handelt und eine strenge Rechnung die Berücksichtigung der relativen Wahrscheinlichkeit fordern müsste, mit welcher Änderungen des Gefahrmomentes von ganz bestimmter Grösse auftreten sollten [wofür entsprechendes statistisches Material natürlich nicht zur Verfügung steht], *erscheint ein Versuch, einen prinzipiellen »Unterschied im Sterblichkeitsverlaufe der Frau« vor und nach dem Tode des Mannes in der Rechnung zum Ausdrucke zu bringen, in diesem Falle, also bei der Ermittlung von* ${}^{(a)}a_{x\,(y)}^{(12)}$ *nicht gerechtfertigt.*

Es sei noch auf ein Beispiel hingewiesen, das geeignet ist, den Vorzug der formellen Trennung des Invalidisierungs-

prozesses vom reinen Sterbeprozesse des aktiven Individuums zu zeigen — und zwar hier vor allem in dem Sinne, dass dieselbe zu Ausdrücken von weit grösserer Anschaulichkeit führt.

Broggi »Versicherungsmathematik» (Buenos Aires 1911), behandelt am Ende des zweiten Abschnittes (§ 55) das Beispiel einer Pensionsversicherung für eine dreiköpfige Familie mit gegebenen Altern.

Die dort gegebenen Formeln für die einzelnen Gruppen von Anwartschaften — es sind mehrere Fehler unterlaufen, namentlich bei der Waisenpension! — gewinnen viel an Klarheit, wenn man ihnen die hier gewählte analytische Darstellungsweise zu Grunde legt.

Dann erscheinen beispielsweise die Waisenansprüche als »zwei-seitige Überlebensansprüche innerhalb einer Verbindung von vier Personen».

In dem gegebenen besonderen Falle wird überdies eine Modifikation der Erziehungsbeitrags-Barwerte erforderlich durch die von Broggi gestellte Bedingung, dass die Waisenrente nach dem Tode der Mutter eine bestimmte Erhöhung — wir wollen sie durch die Proportion $n:m$ allgemein ansetzen — erfahren solle.

In jedem versicherten Überlebensfalle — im weiteren Sinne, denn auch die Invalidisierung des Vaters wird als solcher betrachtet — tritt daher als fällig werdender Barwert immer dann die Summe *zweier* Teilbarwerte auf, *wenn* dieser Versicherungsfall *noch bei Lebzeiten der Mutter gegeben ist.*

Daraus folgt die natürliche Unterscheidung der beiden Hauptgruppen von Waisenanwartschaften.

A) Mutter früher gestorben.

Im Falle des Ablebens der Mutter vor Eintritt des Versicherungsfalles unterscheidet sich der Ausdruck für die Waisenanwartschaft in seinem formellen Aufbau dem für ${}^{(a)}a_{x|y}$ gefundenen[1] gegenüber

---

[1] Um bei dem Beisplele von Broggi zu bleiben, sind in die früher gefundene Gleichung hier ganzjährige, nachschüssige Renten eingeführt.

$$ {}^{(w)}a_{xy} = \int_0^{\infty} \left[\mu^{a}_{x+t} a_{y+t} + \nu_{x+t} a^{i}_{x+t\, y+t} \right] e^{-\int_0^t (\mu^{aa}_{x+t} + \mu_{y+t} + \delta)\, dt} \, dt $$

prinzipiell nur durch

1) Erscheinen der temporären Waisenrente an Stelle der früheren lebenslänglichen Witwenrente.

2) Auftreten des Summanden μ_{z+t} im Exponenten anstatt μ_{y+t}.

3) Hinzutreten des Faktors $\left(1 - e^{-\int_0^t \mu_{y+t}\, dt}\right)$.

Die Waisenanwartschaft für den Fall früheren Todes der Mutter (bei Broggi die Summe ${}_2A'_3 + {}_3A'_3$) nimmt dann die gestalt an

$$ {}^{(a)}\Omega^{2}_{\underset{1}{xyz}} = \tilde{W}\left[\Omega^{2}_{\mu\nu\, \underset{1}{yz}} \right] = $$ [1]

$$ = \int_0^h \left[\mu^{a}_{x+t}\; {}_{h-t}a_{z+t} + \nu_{x+t}\; {}_{h-t}a^{i}_{x+t\, z+t} \right] e^{-\int_0^t (\mu^{aa}_{x+t} + \mu_{z+t} + \delta)\, dt} \left(1 - {}_tp_y\right) dt. $$

Dabei ist in der Formel zum Ausdrucke gebracht, dass die Waisenrente nach dem invalid gewordenen Vater den »Typus II einer temporären Überlebensrente» darstellt.

Bemerkt sei ferner, dass von dem konstanten Faktor, welcher in Broggi's Beispiele allen Waisenansprüchen gemeinsam ist, abgesehen werden konnte, da die Betrachtung

[1] Zur Symbolik sei bemerkt: Bei Gruppen-Überlebensversicherungen, die eine bestimmte Aufeinanderfolge der Todesfälle als *Bedingung* des Versicherungsfalles einschliessen, sollen im Suffixe die einzelnen Personen in *der* Reihenfolge bezeichnet werden, welche obigen Bedingungen entspricht; dabei soll aber die *Zahlenangabe nur dann über dem Personenzeichen* stehen, wenn der betreffende Todesfall selbst auch gleichzeitig »Versicherungsfall» im Sinne des Vertrages ist.

In obiger Waisenanwartschaft nun ist der vorhergehende Tod der Mutter *ausschliesslich* Versicherungs*bedingung*, ohne selbst aber irgend eine unmittelbare Auszahlung zur Folge zu haben: $T(y)$ ist hier eben *nicht* Versicherungsfall im Vertragssinne. Deshalb hat auch im Symbole die Zahlenangabe *unter* dem Personenzeichen »y» zu erfolgen.

Siehe dagegen später die Bedeutung von ${}^{(a)}\Omega^{1\,2}_{xyz}$.

hier auf die hauptsächlichsten Waisenanwartschaften beschränkt werden soll.

Übrigens kann man die obere Grenze des äusseren Integrales beliebig erhöhen, da alle fälligen Renten höchstens h Jahre laufen und somit die Klammer [ ] für $t > h$ identisch den Wert Null besitzt.

Es gilt demnach auch die folgende Schreibweise:

$$ {}^{(a)}\underset{1}{\Omega^2_{xyz}} = \tilde{W}\left[\underset{1}{\Omega^{\;2}_{\mu\nu\,yz}}\right] $$

$$ {}^{(a)}\underset{1}{\Omega^2_{xyz}} = \int_0^\infty \left[\mu^a_{x+t}\;{}_{h+t}a_{z+t} + \nu_{x+t}\;{}_{h-t}\overset{\mathrm{II}}{a}{}^{i}_{x+t,\,z+t}\right]{}_tE^a_{xz}(1 - {}_tp_y)\,dt. $$

B) Zweite Gruppe der Waisenanwartschaften: Mutter lebt noch, wenn der Versicherungsfall gegeben ist.

Gemäss den Bestimmungen des Beispieles tritt in diesem Falle *mit dem Ableben der Mutter eine Erhöhung des Erziehungsbeitrages* im Verhältnisse $n : m$ ein, weshalb der Tod der Mutter als ein zweiter Versicherungsfall angesehen werden muss unter der Voraussetzung, dass er *nach* dem Tode des Vaters erfolgt!

Man kann bei der formellen Entwicklung der zweiten Gruppe von Waisenanwartschaften wiederum von der Gleichung für ${}^{(a)}a_{x\,y}$ ausgehen, wie es bei der ersten Gruppe geschehen ist; doch scheint es hier natürlicher, den gesuchten Versicherungswert aus dem eben gewonnenen Waisenanspruche für den Fall früheren Todes der Mutter abzuleiten, weil ja insbesondere in den Barwerten der Waisenrenten viel engere Relationen unter den beiden Gruppen selbst bestehen müssen.

Gehen wir also von der ausführlicheren, das heist vorletzten Gleichung für ${}^{(a)}\underset{1}{\Omega^2_{xyz}}$ aus (Seite 196) und suchen den allgemeinen Waisenanspruch der zweiten Gruppe aus derselben zu gewinnen.

Man sieht sogleich: Hier treten jetzt μ_{y+t} und μ_{z+t} gleichzeitig als Summanden im Exponenten der Erlebensversiche-

rung auf, während der letzte Faktor $\left(1 - e^{-\int_0^t \mu_{y+t}dt}\right)$ wegfällt; denn die Familie erlebt nun den Versicherungsfall vollzählig. Deshalb erscheinen auch die fälligen Rentenbarwerte erweitert:

Anstelle der Waisenrente tritt die Verbindungsrente »Mutter-Kind«, es erfolgt also

$$ {}_{h-t}a_{z+t} \rightarrow {}_{h-t}a_{y+t.\,z+t} $$

und ebenso erscheint die Überlebensrente nach dem invaliden Vater zunächst an die Bedingung geknüpft, dass die Verbindung Mutter-Kind noch fortbesteht

$$ {}_{h-t}\overset{\text{II}\;i}{a}_{x+t\;z+t} \rightarrow {}_{h-t}\overset{\text{II}\;i}{a}_{x+t\;y+t.\,z+t}\,. $$

Durch diese beiden Substitutionen werden aber, wie man erkennt, die fälligen Renten*barwerte* wesentlich erniedrigt.

Doch treten nun ausserdem noch jene zwei Waisenanwartschaften als Summanden hinzu, welche die Waisenrente nach dem Tode der Mutter erhalten.

Es sind dies die temporären Überlebensrenten vom Typus II für jenen Zeitraum, in welchem *bloss noch das Kind am Leben* ist.

Die Barwerte derselben ergeben sich daher ganz unmittelbar aus den beiden obigen Substitutionswerten, wenn darin die Verbindung Mutter—Kind gelöst wird; formell also im ersten Falle durch Einschaltung, im zweiten Falle durch Verlegung des Trennungs-Zeichens im Suffixe

$$ {}_{h-t}a_{y+t.\,z+t} \rightarrow {}_{h-t}\overset{\text{II}}{a}_{y+t\;z+t} $$

$$ {}_{h-t}\overset{\text{II}\;i}{a}_{x+t\;y+t.\,z+t} \rightarrow {}_{h-t}\overset{\text{II}}{a}_{x+t.\,y+t\;z+t}\,. $$

Berücksichtigen wir nun schliesslich noch die oben gestellte Forderung, dass die Waisenrente nach dem Ableben der Mutter eine Erhöhung im Verhältnisse $n:m$ erfahren solle; dass also umgekehrt eine schon bei Lebzeiten der Mutter flüssige Waisenrente relativ zu der erstbehandelten

Gruppe ${}^{(a)}\Omega^{2}_{\underset{1}{xyz}}$ — wo wir ja die Rentenhöhe als die Einheit angenommen hatten — nun durch den Faktor $\frac{n}{m} < 1$ *erniedrigt* erscheint. Wir gewinnen so auf kürzestem Wege für die gesamte Waisenanwartschaft die bedeutend übersichtlichere Gestalt

$${}^{(a)}\Omega^{1(2)}_{xyz} = \tilde{W}\left[\Omega_{\underset{\mu\nu\,yz}{1\;(2)}}\right]^{1}$$

$$\begin{aligned}{}^{(a)}\Omega^{1(2)}_{xyz} = \int_0^h \Bigg[\mu^a_{x+t} \left\{ \frac{n}{m}\, {}_{h-t}a_{y+t,z+t} + {}_{h-t}^{\;\mathrm{II}}a_{y+t\,z+t} \right\} + \\ + \nu_{x+t} \left\{ \frac{n}{m}\, {}_{h-t}^{\;\mathrm{II}}a^{i}_{x+t\,y+t.z+t} + {}_{h-t}^{\;\mathrm{II}}a^{i}_{x+t,y+t\,z+t} \right\} \Bigg] . \\ . e^{-\int_0^t \left(\mu^{aa}_{x+t} + \mu_{y+t} + \mu_{z+t} + \delta\right) dt}\, dt.\end{aligned}$$

Die obere Grenze des Hauptintegrales kann man wiederum beliebig erhöhen, da für $t > h$ alle vier Rentenbarwerte im Integranden und damit der Wert der Klammer [ ] identisch verschwinden muss.

Die Verwendung des früher gewählten Symbols für die Erlebensversicherung empfiehlt sich auch hier durch erhebliche Raumersparnis in der Formel.

Die beiden Abänderungen führen schliesslich zu der Gleichung für die allgemeine Waisenanwartschaft

$$\begin{aligned}{}^{(a)}\Omega^{1(2)}_{xyz} = \int_0^\infty \Bigg[\mu^a_{x+t} \left\{ \frac{n}{m}\, {}_{h-t}a_{y+t,z+t} + {}_{h-t}^{\;\mathrm{II}}a_{y+t\,z+t} \right\} + \\ + \nu_{x+t} \left\{ \frac{n}{m}\, {}_{h-t}^{\;\mathrm{II}}a^{i}_{x+t\,y+t.z+t} + {}_{h-t}^{\;\mathrm{II}}a^{i}_{x+t.y+t\,z+t} \right\} \Bigg] {}_tE^{a}_{xyz}\, dt.\end{aligned}$$

[1] Gemäss dem früher über die Symbolik allgemeinerer Überlebensversicherungen getroffenen Übereinkommen muss hier die Zahlenangabe für die Reihenfolge der Todesfälle *beider* Eltern *über* dem Personenzeichen erfolgen, da sie beide Versicherungsfälle sein können; dass dabei der Tod $T(y)$ aber nur ein *bedingter* Versicherungsfall ist, wurde im Symbole durch Einklammerung der Ordnungsziffer zum Ausdrucke gebracht.

Anhang.

Die Überlegungen der vorangehenden Abhandlung erheben keinen Anspruch auf Vollständigkeit nach irgend einer Richtung.

Es sollte damit lediglich an einigen Beispielen der Gedankengang gezeigt werden, welcher zu einer Zusammenfassung der Überlebensversicherungen mit den Werten der Invaliditätsanwartschaften und damit auf einen methodischen Weg zur einheitlichen Analyse der letzteren führt.[1]

Doch möge hier noch auf einen Gesichtspunkt hingewiesen werden, von dem aus diese Skizze vielleicht einiges Interesse besitzt; derselbe ist von L. v. Bortkiewicz in seinem Referate über Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Statistik in der »Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften« eingenommen worden und sei im folgenden wiedergegeben.

Als J. Karup in seinem »Gutachten der Gothaer Lebensversicherungsbank über Invaliden- und Witwenpensionsverhältnisse, verfasst im Auftrage der Reichsverwaltung« den Begriff der »unabhängigen Invaliditätswahrscheinlichkeit« schuf, war das Urteil der Fachkreise über den Wert dieser Begriffsbildung sehr verschiedenartig.

Karup wurde hiezu geführt, als er bei der Konstruktion von Invaliditätstafeln nach einer Verbesserung der mehr oder minder mangelhaften Methoden suchte, nach welchen man bis dahin die Wahrscheinlichkeit p_x^{aa} berechnet hatte.

Er definierte dabei als die »unabhängige Invaliditätswahrscheinlichkeit« die Wahrscheinlichkeit w_x, »welche zum Ausdrucke gelangen würde, wenn die Sterblichkeit in dem angegebenen Zeitraume nicht vorhanden wäre«.

---

[1] *Verfasser der vorliegenden Arbeit wäre dem Leser sehr verbunden, wenn er dessen persönliche Stellungsnahme zu dem gestellten Probleme kennen lernen könnte. Daher gestattet er sich, das bedingte Ersuchen zu stellen: Der interessierte Leser möge kritische Bemerkungen mit dem Vermerk* »A. Görig« *an die Hauptredaktion der Skandinavischen Aktuarzeitschrift richten.*

Es handelt sich hier um ein Verfahren, das vollkommen analog bezüglich der Sterbenswahrscheinlichkeit schon länger bekannt und zur Konstruktion von Invaliditätstafeln öfter verwendet worden war.

Th. Wittstein hatte bereits 1862 gezeigt, auf welche Art man die Wahrscheinlichkeit p_x ermitteln könne, welche lediglich von der Sterblichkeit unter den Aktiven abhängt. Setzt man nämlich alle Invalidisierungsfälle identisch den Austritten, so erhält man jene Sterblichkeit der Aktiven, »welche zum Ausdrucke käme, wenn während des betrachteten Zeitraumes die Invalidität nicht vorhanden wäre».

Um daher die oben definierte Karup'sche »unabhängige» Invaliditätswahrscheinlichkeit zu ermitteln, braucht man bloss reziprok vorzugehen, indem man nun alle in der beobachteten Zeit erfolgten Todesfälle als Austritte behandelt.

Durch Einführung der Grösse w_x gelingt es, die gesuchte Aktivitätswahrscheinlichkeit p_x^{aa} als das Produkt zweier Wahrscheinlichkeiten darzustellen. Man erkennt dies leicht, wenn man die eingangs verwendete Bezeichnungsweise benützt.

Es sei die »Ausscheidekraft der Aktiven»

$$\mu_{x+t}^{aa} = \nu_{x+t} + \mu_{x+t}^{a}.$$

Dann ist

$$-d\left[\log l_{x+t}^{a}\right] = \mu_{x+t}^{aa} dt = \left(\nu_{x+t} + \mu_{x+t}^{a}\right) dt$$

und somit

$$p_x^{aa} = \frac{l_{x+1}^{a}}{l_x^{a}} = e^{-\int_0^1 \left(\nu_{x+t} + \mu_{x+t}^{a}\right) dt}.$$

Man kann also für die Aktivitätswahrscheinlichkeit so die gewünschte Produktdarstellung

$$p_x^{aa} = e^{-\int_0^1 \nu_{x+t} dt} \cdot e^{-\int_0^1 \mu_{x+t}^{a} dt}$$

unter der Voraussetzung erhalten, dass die beiden obigen Faktoren als »Wahrscheinlichkeiten» zu gewinnen sind.

Dies gelingt nun mit Hilfe der KARUP'schen Konstruktion des Begriffes w_x tatsächlich. Denn die Wahrscheinlichkeit, dass der x jährige Aktive im einem künftigen Zeitintervalle dt invalid wird, ist gleich $v_{x+t}dt$; daher ist das Komplement der KARUP'schen Invaliditätswahrscheinlichkeit, welche sich auf den Zeitraum eines vollen Jahres bezieht, gegeben durch die Gleichung

$$1 - w_x = e^{-\int_0^1 v_{x+t}dt} = g_x$$

wobei die Einführung von $g_x = 1 - w_x$ in Analogie zu $p_x = 1 - q_x$ erfolgte, um manche Formeln einfacher und symetrischer zu gestalten.[1]

Zunächst ist also damit gezeigt, dass der erste Faktor von p_x^{aa} als die »Gegenwahrscheinlichkeit zu KARUP's w_x» aufgefasst werden kann.

Andererseits ist leicht zu beweisen, dass der zweite Faktor identisch ist mit der im vorhergehenden definierten »WITTSTEIN'schen reinen Lebenswahrscheinlichkeit Aktiver», welche wir mit p_x bezeichneten.

Denn die Wahrscheinlichktit, dass der x jährige Aktive innerhalb des Zeitintervalles $(t \ldots t + dt)$ als Aktiver stirbt, ist $\mu_{x+t}^a \, . \, dt$, es besitzt daher WITTSTEIN's p_x tatsächlich die Form:

$$p_x = e^{-\int_0^1 \mu_{x+t}^a dt} dt.$$

Wir sind auf Grund des vorhergehenden somit berechtigt, die gesuchte Aktivitätswahrscheinlichkeit p_x^{aa} aufzulösen

[1] g_x ist demnach die Wahrscheinlichkeit, dass ein x jähriger Aktiver nach Ablauf eines Jahres noch *gesund* (nicht invalid) ist, wenn während dieses Zeitraumes die Wirkung der Sterbekraft im engeren Sinne ganz ausgeschaltet wird!

in das Produkt zweier »reiner Wahrscheinlichkeiten»

$$p_x^{aa} = e^{-\int_0^1 \nu_{x+t}\,dt} \cdot e^{-\int_0^1 \mu^a_{x+t}\,dt} = \ddot{g}_x \cdot p_x \,.$$

Die Möglichkeit dieser Produkt-Darstellung war der eigentliche Zweck der Karup'schen Begriffbildung einer »unabhängigen Invaliditätswahrscheinlichkeit».

Dass sie aber auf lebhaften Widerstand in Fachkreisen stiess, liegt zum grossen Teile an der unpassenden Benennung.

Fasst man nämlich den Begriff »unabhängig» in der Weise auf, wie das in der Wahrscheinlichkeitsrechnung allgemein geschieht, so müsste man berechtigt sein, aus der bereits erwiesenen Gleichheit

$$p_x^{aa} = g_x\, p_x$$

auf die Giltigkeit der drei folgenden Gleichungen zu schliessen:

$$p_x^{ai} = w_x\, p_x$$

$$q_x^{aa} = g_x\, q_x$$

$$q_x^{ai} = w_x\, q_x \,.$$

welche aber unrichtig sind!

Dass die Bezeichnung »unabhängige» Invaliditätswahrscheinlichkeit irreführend sei, gab auch Küttner zu, der aber im übrigen die Karup'sche Begriffbildung von einem allgemeinen Standpunkte aus zu rechtfertigen suchte.

Im vorliegenden Falle ist es doch wesentlich, dass gleichzeitig die beiden Faktoren Invalidität und Sterblichkeit ineinander greifen, mithin gegenseitig *nicht* unabhängig sind.

Von ihrer wechselseitigen Beeinflussung kann nur dann abgesehen werden, wenn man sich bei Betrachtung der biologischen Erscheinungen auf ein unendlich kleines Zeitintervall $(t \ldots t + dt)$ beschränkt.

Aus diesem Grunde ist zunächst die Gleichung

$$\mu^{ai}_{x+t}\,dt = \mu^{a}_{x+t}\,dt + \nu_{x+t}\,dt$$

exakt richtig.[1] Lässt man aber diese Zerlegung der Aus-

[1] Aus demselben Grunde ist auch die folgende Ableitung für die Intensitäten ν_x und μ^a_x *streng* richtig.

Gehen wir aus von

$$l_x\,\mu_x\,dx = l^a_x\,\mu^{aa}_x\,dx + l^i_x\,\mu^i_x\,dx - l^a_x\,\nu_x\,dx\left(1 - \frac{\mu^i_x\,dx}{2}\right),$$

wobei der letzte Summand exakt die Zahl jener Personen aus der Ausgangsgruppe l_x angibt, welche im Zeitintervalle dx invalid werden und nach Ablauf desselben noch am Leben sind. Zerlegt man in dieser Gleichung die Lebendengesamtheit in die beiden Untergruppen und vernachlässigt das letzte Glied rechts als unendlich klein von zweiter Ordnung, so dürfen wir auch setzen

$$l^a_x + l^i_x\,\mu_x = l^a_x\,\mu^{aa}_x + l^i_x\,\mu^i_x - l^a_x\,\nu_x$$

und gewinnen daraus die beiden Gleichungen:

$$\nu_x = \mu^{aa}_x - \mu_x - \frac{l^i_x}{l^a_x}\left\{\mu_x - \mu^i_x\right\}$$

und

$$\mu^a_x = \mu_x + \frac{l^i_x}{l^a_x}\left\{\mu_x - \mu^i_x\right\}.$$

Unter Zugrundelegung der vorletzten Gleichung kann man eine Kontrollrechnung für die früher abgeleitete »Korrekturformel« der Anwartschaft auf bruchjährige Invalidenrente ausführen.

Wenden wir nämlich die auf Seite 151 skizzierte indirekte Methode — welche naturgemäss auch für unterjährige Zahlung zum Ziele führt — auf den qualitativ zerlegten Barwert

$${}^{(a)}a^{(m)}_x = a^{a(m)}_x + a^{ai(m)}_x$$

an, so wird unmittelbar

$$a^{ai(m)}_x = a^{(m)}_x - a^{a(m)}_x + \frac{l^i_x}{l^a_x}\left\{a^{(m)}_x - a^{i(m)}_x\right\}$$

und bei Einführung der WOOLHOUSE'schen Näherungswerte

$$a^{ai(m)}_x = a_x - a^a_x + \frac{1}{12\,m^2}\left[\mu_x - \mu^{aa}_x\right] + \frac{l^i_x}{l^a_x}\left\{a_x - a^i_x + \frac{1}{12\,m^2}\left[\mu_x - \mu^i_x\right]\right\}$$

$$= a_x - a^a_x + \frac{l^i_x}{l^a_x}\left\{a_x - a^i_x\right\} + \frac{1}{12\,m^2}\left[\mu_x - \mu^{aa}_x + \frac{l^i_x}{l^a_x}\left\{\mu_x - \mu^i_x\right\}\right].$$

scheidekraft Aktiver zu, so gelangt man, wie eben gezeigt wurde, direkt zu der Grösse g_x, welche das Komplement der reinen Invaliditätswahrscheinlichkeit vorstellt.

Die Einwürfe, welche gegen die Karup'sche Begriffskonstruktion erhoben wurden, richteten sich aber zum Teil auch gegen den Wert des Begriffes $\overline{w}_x$ selbst, »dem sie als einem künstlich gebildeten und überflüssigen das Bürgerrecht versagten».

Dass w_x nur eine rein formale Bedeutung besitzt, widerlegt natürlich nicht die Zulässigkeit oder Zweckmässigkeit dieses Begriffes.

Auch $\overline{p}_x$, die reine Lebenswahrscheinlichkeit Wittstein's, besitzt keine selbständige reelle Bedeutung, wurde aber dennoch zur Konstruktion von Invaliditätstafeln wiederholt mit Vorteil verwendet.

In der vorliegenden Abhandlung scheint nun in einem ganz anderen Zusammenhange eine Art von Rechtfertigung der Karup'schen Begriffbildung zu liegen:

Die Tatsache, dass man mittels der Fiktion einer reinen Invalidisierungs- und Sterbe-Kraft Aktiver die versicherungstechnischen Invaliditätswerte im Verein mit den Überlebensversicherungen innerhalb eines *gemeinsamen mathematischen Rahmens umschliessen* kann, *wobei man zu systematischer Analyse aller Invaliditätsanwartschaften geführt* wird, darf wohl als ein Argument *für* die Konstruktion des Begriffes »reine» Invaliditätswahrscheinlichkeit angesehen werden.

Nun gibt aber die Summe der drei ersten Glieder rechts die Anwartschaft auf kontinuierliche Invalidenrente; der negative Wert der Klammer [ ] aber ist gemäss der oben abgeleiteten Relation exakt gleich der Invalidisierungsintensität ν_x, sodass wir durch

$$a_x^{ai(m)} = \overline{a}_x^{ai} - \frac{1}{12\, m^2} \nu_x$$

die Bestätigung des früheren Resultates erhalten.

Errata-Nachtrag.

S. 129, vierter Absatz soll beginnen: Denn durch . . . anstatt Dann . . .
S. 130, Zeile 9: nichts anderes an Stelle von nicht . . .
S. 132, letzte Zeile: Zeitraum anstatt zeitraum.
S. 138, Mitte: Kapitalversicherung anstatt Kapitalversichering.
S. 177, Anmerkung: erste Ungleichung soll lauten

$$A^{ai}_{xy} < A^{a}_{xy} \text{ anstatt } A^{ai}_{xy} < A^{a}.$$

S. 179, Zeile 4: gleichzeitig anstatt gleichseitig.
S. 187, erste Zeile: analytischer anstatt analytisches.
S. 187, Zeile 10: Stelle für Stelie.
S. 194, drittletzte Zeile: Falle anstatt Falte.
S. 197, sechste Zeile von unten: heisst anstatt heist.

On Investment in Funds.

By P. Givskov.

The purpose of this paper is to determine how large a capital risk a monetary institution is incurring by receiving capital payments under obligation to yield a fixed guaranteed interest until a prescribed date, even if the market rate of interest should fall below the rate guaranteed, and to investigate to what extent the risk is decreased if it is possible to invest the payment first received at a rate of interest exceeding the rate guaranteed.

The subject will be especially dealt with as concerning the investments made by life insurance companies and an attempt will be made to form rules applicable at the investment of capital at a given rate of interest and for a fixed period of time. In accomplishing this we can

1) regulate the interest which is earned in such a way that a maximum and a minimum rate will be provided for and losses by decreasing exchange values avoided

2) establish reserve funds equivalent to a lower rate of interest without being obliged to formally adopt a new basis of the calculation

3) decide when the increased investment connected with decreasing interest necessitates a lower rate of interest as a basis of the premiums.

We shall try to find the solution of the problem in two ways, that is to say, the general treatment (A) is connected with a mathematical and numerical treatment (B) by means of which the conclusions arrived at will be determined with further precision.

A. Assuming that a company is bound to receive arbitrary payments and to pay a certain interest (i) on them during

a certain period, what will, then, the value of the company's loss amount to at the beginning of the period, if the effective interest falls to r.

Let us suppose that the payments are invested in bonds O yielding a nominal interest r and maturing at a certain date coinciding with the day of reimbursement of the payments mentioned.

If a payment I is received n years before the maturity and we wish to obtain the interest (i) on it, we shall have to purchase bonds to a face value of $P = I : K_i$, K_i meaning the market price at which the bonds must be purchased, if they shall yield the effective interest i. If, however, the effective interest were only r, the price of these bonds would be $P . K_r$. In this case we should thus realize a loss amounting to $P . K_r - P . K_i = P (K_r - K_i)$.

If the annual payments are equal, and these, bearing interest at i per cent per anuum, increase to U at the expiration of the period, the amounts of payments and interest to be invested yearly will increase year by year in the same way as the instalments on a bond with a constant annual payment, the instalments on such a bond increasing with the interest on the increasing instalments.

While, as stated before, the company's obligations may be covered by purchasing bonds O with a given expiration, at the market price K, its claims may, in this case, be compared with bonds O^y with a given annual payment, the market price of which is called K^y. To the capital U correspond bonds of the first category with a face value of $U : K_i$, and of the second category with a face value of $U : K_i^y$, the effective interest being i. When the effective interest falls from i to r, the value of the former bonds will increase by $\frac{U}{K_i} (K_r - K_i)$, and the value of the latter by $\frac{U}{K_i^y} (K_r^y - K_i^y)$.

The total loss will, then, amount to $U \left(\frac{K_r}{K_i} - \frac{K_r^y}{K_i^y}\right)$. If the nominal interest on the bonds is equal to i, as it must be, if the bonds shall cover exactly the obligations of the company, we shall have $K_i = K_i^y = 1$, and the loss of the company thus amounts to $U (K_r - K_r^y)$.

The general formula

(1) $$U\left(\frac{K_r}{K_i}-\frac{K_r^y}{K_i^y}\right)$$

gives the loss of the company when the payments with interest are increasing in the same way as instalments on a bond bearing an arbitrary nominal interest and with a market price K^y, nothing being assumed as to the way in which the instalments are decreasing. If we call K_a the market price of a bond (O_a) with given instalments, we shall have the formula

(2) $$U\left(\frac{K_r}{K_i}-\frac{K_r^a}{K_i^a}\right).$$

We may replace different payments both increasing and decreasing by combinations of bonds with given annual payments and given annual instalments. A bond with the market price $K^a + p\,(K^a - K^y)$ will thus correspond to decreasing payments, if $p > 0$, and to increasing payments if $p < 0$. In such case the loss will be

(3) $$U\left(\frac{K_r}{K_i}-\frac{K_r^a+p(K_r^a-K_r^y)}{K_i^a+p(K_i^a-K_i^y)}\right).$$

If some of the payments are received before interest falls, the loss will be reduced. If, for example, a payment R is received at a moment where the effective interest is e $(e > i)$, we may purchase bonds to a face value of $\frac{R}{K_e}$ for it, while we only need $\frac{R}{K_i}$; we thus dispose of superfluous bonds to a face value of $R\left(\frac{1}{K_e}-\frac{1}{K_i}\right)$, the value of which, in case the interest falls to r, is $R\left(\frac{1}{K_e}-\frac{1}{K_i}\right)K_r$. If the payments with in-

terest are increasing evenly from R to U, and the interest immediately falls to r, the total loss will, then, amount to

$$(4) \qquad (U-R)\left(\frac{K_r}{K_i}-\frac{K_r^u}{K_i^u}\right)-R\left(\frac{1}{K_e}-\frac{1}{K_i}\right)K_r.$$

Should we desire to establish a fund to cover such losses, we may determine each year the loss calculated by the above formula, by means of the ever effective interest e and of the payments received R. If $e > i$ the fund may be zero, in such case an eventual subsequent increase of the calculated fund, owing to a fall in the interest, can be covered by the gain realized on the market price of R, and as long as the interest is not inferior to r, we shall thus be secured against a loss on the capital U.

It is not necessary to invest the payments in bonds of the said category, it is sufficient that the market price of the bonds is always below par. If the market price rises above par, these bonds must be replaced by others bearing a lower nominal interest, so that a forced redemption at par can be avoided. In this way we shall always obtain an interest which is higher than the effective interest of the investment.

The indicated formulas (1), (2) and (3) may also be proved in the following way:

If the successive payments are due continuously, a capital 1 at the end of the period may be created by annual payments of $\frac{1}{\bar{a}_n}-\delta$, where $\bar{a}_n$ means the continuous annuity, δ the continuous rate of interest; after t years the amount payed with interest will be $1-\frac{\bar{a}_{n-t}}{\bar{a}_n}$. As the remaining debt on a bond is $\frac{\bar{a}_{n-t}}{a_n}$, the differences in the amounts received (with interest on precedent amount) and in the remaining debt will be the same.

The differential quotient of the amount paid is

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d\left(1-\frac{\bar{a}_{n-t}}{\bar{a}_n}\right)}{dt} = \frac{e^{-\delta(n-t)}}{\bar{a}_n}.$$

The amounts paid are invested in bonds with a given date of maturity and bearing a nominal continuous interest δ_2. If the effective interest is δ_4, their market price will be

$$K = e^{-\delta_4 (n-t)} + \delta_2 \frac{1 - e^{-\delta_4 (n-t)}}{\delta_4}$$

and the discounted loss on the market price

$$(K - 1)\, e^{-\delta_4 t} = \left(\frac{\delta_2}{\delta_4} - 1\right) (e^{-\delta_4 t} - e^{-\delta_4 n})$$

the total loss will, then, be

$$T = \int_0^n (K - 1)\, e^{-\delta_4 t} \frac{dI}{dt} dt = \int_0^n \left(\frac{\delta_2}{\delta_4} - 1\right) (e^{-\delta_4 t} - \bar{e}^{\delta_4 n}) \frac{e^{-\delta_2 (n-t)}}{\bar{a}_n^2} dt =$$

$$= e^{-\delta_4 n} + \delta_2\, \bar{a}_n^4 - \frac{\bar{a}_n^4}{\bar{a}_n^2} = K - K^y$$

a^i a continuous annuity bearing a continuous interest δ_i

$$v_i^n = e^{-\delta_i n}.$$

If such amounts are paid that the payments with interest are increasing evenly ɔ: with $\frac{1}{n}$ yearly, the differential quotient of the amount paid will be $\frac{1}{n} dt$, and the total loss

$$T_1 = \int_0^n \frac{1}{n} \left(\frac{\delta_2}{\delta_4} - 1\right) (e^{-\delta_4 t} - e^{-\delta_4 n})\, dt =$$

$$= e^{-\delta_4 n} + \delta_2\, \bar{a}_n^4 - \left(\frac{\delta_2}{\delta_4} \left(1 - \frac{\bar{a}_n^4}{n}\right) + \frac{\bar{a}_n^4}{n}\right) = K - K^a.$$

This formula may also be written

$$(5) \quad \frac{\delta_2 - \delta_4}{\delta_4} \left(\frac{1 - e^{-\delta_4 n}}{n\, \delta_4} - e^{-\delta_4 n}\right) = \frac{\delta_2 - \delta_4}{n\, \delta_4^2} - \frac{1 + n\, \delta_4}{n\, \delta_4^2} v_4^n (\delta_2 - \delta_4).$$

The same calculations are applicable to a bond which is combined as a sum or difference of these two types O^y and O^a.

Application to a Life Assurance Company.

The formulas explained here may be applied to the calculation of a security fund against a fall in the rate of interest for a life assurance company, if the annual increase of the reserve, the rest n years of the duration of the assurances and the sum U which will fall due at the end of this period can be determined.

The reserve for the most common kind of assurance, the endowment assurance, increases in a similar way as the instalments on a sinking fund with the same duration as the assurance, the difference in reserve $1 - \frac{a_{x+n,n-r}}{a_{x,r}}$ corresponding to the difference in the remaining debt $\frac{a^{n-r}}{a_n}$. In the above formula the payments represent the increases of the reserve; if these are replaced by the instalments on a sinking fund yielding the same interest as used for the basis, these instalments will be greater than the increase of the reserve at the beginning, because loans at a low interest are most rapidly amortised, and, by using the formula, we shall therefore get a higher limit for the fund. If, however, we shall determine the fund for a stock of sums assured, we must suppose that the new business has stopped, and, owing to the natural discontinuances, the increase of the reserve for a stock without new business will be quite different. If the increate in the policy value is calculated on the New Hafnia Basis and with the frequencies of discontinuance of Old Hafnia, it will be seen that the increase is decreasing in the same way as the remaining debt on a sinking fund at the market price $K^a + p(K^a - K^y)$, where p is equal to 1 for duration $n = 25$ and age at exit $w = 56$, as well as for $n = 30$ and $w = 61$, and $p = 2$ for $n = 30$ and $w = 66$.

If the fund is calculated according to the formula (page 3), which corresponds to this empiric increase of the reserve, namely, when $U = \alpha F$,

$$S = \alpha F \left(\frac{K_r}{K_i} - \frac{K_r^a + p\,(K_r^a - K_r^y)}{K_i^a + p\,(K_i^a - K_i^y)} \right),$$

which by putting the nominal interest $= r$, at which $K_r = 1$, is simplified to

$$S = \alpha F \left(\frac{1}{K_i} - \frac{1}{K_i^a + p\,(K_i^a - K_i^y)} \right),$$

we shall get the values given in the table below under A (as for the calculation se note 1)

	A			B	C
	$w = 56$	$w = 61$	$w = 66$		
$n = 25$	0,0163			0,0185	0,0163
$n = 30$		0,0160	0,0160	0,0183	0,0155

It will be seen that the values under A vary very inconsiderably and that the *fund will amount to c. 1,6 percent of the assured sum by a fall in the interest of* $\frac{1}{2}$ *percent.*

[*Note 1.* If the nominal interest is K and the effective interest i, the formulas for the market prices are

$$K_i = (1 + i)^{-n} + r\,a_{\overline{n}}^i \text{ idrt } a_{\overline{n}}^i = \frac{1}{i}\,(1 - (1 + i)^{-n})$$

$$K_i^y = \frac{a_{\overline{n}}^i}{a_{\overline{n}}^r},\ K_i^a = \frac{r}{i}\left(1 - \frac{a_{\overline{n}}^i}{n}\right) + \frac{a_{\overline{n}}^i}{n}.$$

Putting $r = 0{,}03$ $\quad i = 0{,}035 \quad n = 25$

» $\quad$ » $\quad$ » $\quad n = 30$

we have $K = 0{,}9176 \quad K^y = 0{,}9465 \quad K^a = 0{,}9513$

» $\quad$ » $\quad K = 0{,}9080 \quad K^y = 0{,}9383 \quad K^a = 0{,}9460.$

In the three cases treated here αF has the three values: 0,3712 F, 0,2998 F and 0,2584 F. Then we shall have for the three funds in A

$$S = F \,.\, 0{,}3712 \left(\frac{1}{0{,}9176} - \frac{1}{0{,}9513 + (0{,}9513 - 0{,}9465)}\right) = F \,.\, 0{,}0163$$

$$S = F \,.\, 0{,}2998 \left(\frac{1}{0{,}9080} - \frac{1}{0{,}9460 + (0{,}9460 - 0{,}9383)}\right) = F \,.\, 0{,}0160$$

$$S = F \,.\, 0{,}2584 \left(\frac{1}{0{,}9080} - \frac{1}{0{,}9460 + 2(0{,}9460 - 0{,}9383)}\right) = F \,.\, 0{,}0160 .$$

Assuming an even increase of the reserve, we shall have,

$$(8) \qquad S = \alpha\, F \left(\frac{K_r}{K_i} - \frac{K_r^a}{K_i^a}\right),$$

which if $K_r = 1$ will be

$$(9) \qquad S = \alpha\, F \left(\frac{1}{K_i} - \frac{1}{K_i^a}\right),$$

if $\alpha = 1{,}035^{-n}$ we shall get the values mentioned under B in the table on page 8 if $\alpha = 1{,}035^{-n}$ than mentioned under C. It will be seen that we may employ the simple formula for $\alpha = 1{,}035^{-n}$ or $1{,}03^{-n}$.

It will be seen by the formula on page 4 that by a fall in the interest of the basis from i to r, and when the reserve is $= R$, the security fund will amount to

$$(10) \qquad (F \,.\, 1{,}03^{-n} - R)\left(\frac{K_r}{K_i} - \frac{K_r^a}{K_i}\right) - R\left(\frac{1}{K_e} - \frac{1}{K_i}\right) K_r .$$

If the nominal interest is r, we shall have

$$(11) \qquad (F \,.\, 1{,}03^{-n} - R)\left(\frac{1}{K_i} - \frac{1}{K_i^a}\right) - R\left(\frac{1}{K_e} - \frac{1}{K_i}\right).$$

If the nominal interest is i, we shall have

$$(12) \qquad (F \,.\, 1{,}03^{-n} - R)\,(K_r - K_r^a) - R\left(\frac{1}{K_e} - 1\right) K_r .$$

F represents the sum assured, R the reserve, K_r is the market price of a bond yielding an effective interest r and with the duration n. K_r^a represents a sinking fund, which is amortized by equal annual instalments. n is determined by putting the value of the sum assured equal to $F(1 + i - - 0{,}05)^{-n}$ (see note 3).

If we choose the interest of the basis 1 percent under the actual effective interest and if the reserve has increased to about 8 percent of the sum assured (consequently after 3 years) before the interest falls, this can, as will be seen from the following example, sink 1 ½ percent to ½ percent below the interest of the basis, and although the company will obtain the interest of the basis for these assurances.

From formula (13) we may, namely, deduce the value of R, which makes the fund equal to zero,

$$R = F\,1{,}03^{-n} \frac{\dfrac{1}{K_i} - \dfrac{1}{K_i^a}}{\dfrac{1}{K_e} - \dfrac{1}{K_i^a}},$$

if $n = 25$, $r = 0{,}03$, $i = 0{,}035$, $e = 0{,}045$, we shall have, K_r being $= 0{,}9176$, $K^a = 0{,}9513$ and $K_e = 0{,}7776$, $R = 0{,}078\ F$.

If the actual effective interest is 5 percent, and we assume the interest of the basis to be 4 %, while the minimum interest is 3 percent, we shall have, when employing the formula (12)

$$R = F\,1{,}03^{-n} \frac{K_3 - K_3^a}{\dfrac{K_3}{K_5} - K_3^a};$$

when $n = 30$, K_3 is equal to $1{,}1966$, $K_3^a = 1{,}1156$, $K_5 = 0{,}8463$, we shall then get $R = 0{,}1113\ F$;

when $n = 25$, K_3 is equal to $1{,}1740$, $K_3^a = 1{,}1012$, $K_5 = 0{,}8590$, we shall get $R = 0{,}1130\,F$.

In both cases this reserve will be accumulated after a duration of about 5 years. If no fall in the interest has taken

place in this period, we shall thus be covered against a future fall of 2 % in the interest.

It is thus certain that there will be no danger by a fall of the interest, when the rate of interest is chosen $^1/_2$ to 1 percent below the market interest, because the reserve to be invested at the high interest may be accummulated in a few years, less than 10 years, to a degree which is sufficient to guarantee against a fall of about 2 percent.]

[*Note 2.* If the sum of the quotient of mortality and the frequency of discontinuance is equal to a, the capital supposed to be paid after n years, when the sum assured is F, may be put equal to $(1-w)^n F$. If w is calculated on the basis of the mortality of New Hafnia and of the frequencies of discontinuance of Old Hafnia, we shall have the following table for w:

Age et exit	Duration 5	10	15	20	25	30
56	3,6 %	3,4	3,2	3,2	4,0	
61	4,6 %	4,0	3,6	3,5	3,4	4,1
66	5,6 %	5,0	4,5	4,2	4,0	4,1

It will thus be seen that we shall get a higher limit for the fund, if w is put equal to 0,03; in that way the remaining stock of F if $n=25$ resp. 30 will be 0,4677 F resp. 0,4000 F, while by age at exit 56 and $n=25$ it is 0,3716 F, for $n=30$ and age at exit 61 0,3000 F and for $n=30$ and age at exit 66 0,2584 F, by this process the fund will thus be 25-50 percent too high, but if, at the same time, we calculate the fund supposing that the reserve is increasing evenly, we shall get a corresponding reduction so that the total deviation will be considerably smaller.]

[*Note 3.* If we do not know n, we can get a useful determination of it by putting the value of the sum assured F equal to $F(1+i-g)^n$, where i means the interest of the basis and g, which is varying with the age at exit and the duration, may be replaced by an average value equal to 0,005; by this we shall for low ages at exit and short durations only get a value of n which is slightly too high, while for high ages at exit and long durations we shall get too small values of n.

The deviation is increasing with the mortality, the ages at exit and the duration. If assumed that the average age at exit does not exceed 65 years, and the average duration not 30 years, n will, by the above formula, not be inferior to 25 years for the must common Danish tables. (For Old Hafnia and New Hafnia we shall get $n = 28$, for the »Forsikrertavlen» of the State Institute of Assurance one shall get $n = 26$). If the security fund is calculated by the above formula (9), it will be 0,01575 resp. 0,01527 for $n = 25$ resp. $n = 30$. An increase from 0 to 0,01527 corresponds with a fall in the interest from 3 ½ percent to 2,989 percent, which is practically the same.]

B. In order more closely to examine the result, arrived at on page 7, it may be assumed that there is a constant rate of mortality; in this way we can find a general formula for the security fund, by means of which we can calculate the fund for the different values of the mortality, the interest, the frequency of discontinuance and the duration.

If the probability of death is $q_x = 1 - e^{-\delta}$, the rate of interest of the calculation basis $i = e^{\delta_2} - 1$, the frequency of discontinuance $1 - e^{\delta_3}$ and the minimum rate of interest $r = e^{\delta_4} - 1$, we shall find that the reserve for an assurance, of duration m years, will t years hence be

$$1 - \frac{\bar{a}_{n-t}}{\bar{a}_{n+m}} = \frac{e^{-(\delta_1+\delta_2)n}\left(e^{(\delta_1+\delta_2)t} - e^{-(\delta_1+\delta_2)m}\right)}{1 - e^{-(\delta_1+\delta_2)(n+m)}}.$$

If we keep account of the discontinuances by death and by lapses we shall have, when multiplying by $e^{-(\delta_1+\delta_3)t}$,

$$R = \frac{e^{-(\delta_1+\delta_2)n}}{1 - e^{-(\delta_1+\delta_2)(n+m)}}\left(e^{(\delta_1+\delta_2-\delta_1-\delta_3)t} - e^{-(\delta_1+\delta_2)m-(\delta_1+\delta_3)t}\right).$$

The value of the loss on the market price of a unit of investment after t years will be

$$V = \left(\frac{\delta_2}{\delta_4} - 1\right)\left(e^{-\delta_4 t} - e^{-\delta_4 n}\right).$$

The total loss on the market price amounts then to

$$\int_0^n V \frac{dR}{dt}\,dt = \frac{e^{-(\delta_1+\delta_2)n}\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}-1\right)}{1-e^{-(\delta_1+\delta_2)(n+m)}} \int_0^n (\delta_2-\delta_3)\,e^{(\delta_2-\delta_3)t} +$$

$$+ e^{-(\delta_1+\delta_2)m}(\delta_1+\delta_3)\,e^{-(\delta_1+\delta_3)t}\left(e^{-\delta_4 t}-e^{-\delta_4 n}\right)dt$$

$$= \left(\frac{\delta_2-\delta_3}{\delta_3+\delta_4-\delta_2} + \frac{\delta_1+\delta_3}{\delta_1+\delta_3+\delta_4}\,e^{-(\delta_1+\delta_2)m} - \right.$$

(13) $$- \frac{\delta_2}{\delta_3+\delta_4-\delta_2}\,e^{-(\delta_3+\delta_4-\delta_2)n} +$$

$$+ \frac{\delta_4}{\delta_1+\delta_3+\delta_4}\,e^{-(\delta_1+\delta_2)m}\,e^{-(\delta_1+\delta_3+\delta_4)n} +$$

$$\left. + \left(1-e^{-(\delta_1+\delta_2)m}\right)e^{-\delta_4 n}\right)\frac{e^{-(\delta_1+\delta_2)n}\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}-1\right)}{1-e^{-(\delta_1+\delta_2)(n+m)}}.$$

If $m = 0$, we shall have:

$$\frac{\delta_2-\delta_1}{\delta_1}\cdot\frac{e^{-(\delta_1+\delta_2)n}}{1-e^{-(\delta_1+\delta_2)n}}\left(\frac{\delta_2-\delta_3}{\delta_3+\delta_4-\delta_2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\delta_1+\delta_3}{\delta_1+\delta_3+\delta_4} - \frac{\delta_2}{\delta_3+\delta_4-\delta_2}\,e^{-(\delta_3+\delta_4-\delta_2)n} + \frac{\delta_4}{\delta_1+\delta_3+\delta_4}\,e^{-(\delta_1+\delta_3+\delta_4)n}\right).$$

Simple figures are chosen for

$$\delta_1 = \begin{cases} 0{,}005 \\ 0{,}01 \\ 0{,}015 \\ 0{,}20 \end{cases}, \quad \delta_2 = 0{,}035, \quad \delta_3 = 0{,}02, \quad \delta_4 = 0{,}03.$$

For comparison the value is calculated after formula 8, which is modified to

$$a\left(\frac{\delta_2-\delta_4}{n\,\delta_4^2} - \frac{1+n\,\delta_4}{n\,\delta_4^2}(\delta_2-\delta_4)\,e^{-\delta_4 n}\right) \text{ cfr. (5).}$$

By this process we get the following values:

Table containing the values of the fund according to formula 14, when assumed that the interest falls from 0,035 to 0,03.

Frequency of discontinuance = 0,02

Probability of death = 0,05 Duration		0,010 A	0,015 B	0,020	$100\frac{A-B}{A}$
30	0,02039	0,01792	0,01574	0,01380	12,1
25	02111	01899	01705	01530	10,3
20	02101	01930	01772	01626	8,2
15	01956	01838	01725	01617	6,2
10	01613	01546	01512	01422	2,2
5	01008	00984	00984	00948	0

Frequency of discont = 0,015 0,010 C	$100\frac{A-C}{A}$	The reserve is increasing evenly by $\frac{1}{n\,.\,1{,}03^n}$	by $\frac{1}{n\,1\,035^n}$
0,01972	9,1	0,01739	0,01500
02053	7,5	01848	01629
02050	5.8	01880	01704
01928	4,7	01786	01660
01613	4,1	01527	01453
00984	0	00949	00926

It will be seen that the fund increases, when the frequency of discontinuance, the mortality and the interest are increasing, but that the variations are inconsiderable (se note 4).

It will further be seen that the fund does not increase with n, but has its highest limit between $n = 20$ and $n = 25$.

If therefore we choose as *average value 0,0175* we shall have *a good approximation* except for the very short durations which are of no importance to this investigation.

Finally we see that the formula indicated on page 8, which assumes an even increase of the reserve, will give a good approximation if we put $\alpha = 1{,}03^{-1}$.

[*Note 4.* Under $100\frac{A-B}{A}$, resp. $100\frac{A-C}{A}$ the procentual increase of the fund for an increase of 0,005 $i\,\delta$ resp. δ_3 has been given. When children's endowment assurances are excepted, the average mortality for assurances with duration 30 years is not much under 1 percent and the frequency of

discontinuance not so low as 1,5 percent. On the other hand, the average mortality for assurances with duration 30 years does not exceed 1,5 per cent, while, as it will be seen from the table, assurances with duration under 15 years permit average mortality right up to 2 per cent before the limit of 10 per cent is surpassed.]

Let us take an assurance m years old with a remaining duration $n - m$ years and a reserve ϱ_m per unit of sum, we shall then, by means of the formula (13), get the following values of the fund S_m, when $\delta_1 = 0{,}01$, $\delta_2 = 0{,}035$, $\delta_3 = 0{,}02$ and $\delta_4 = 0{,}03$:

$n = 30$

$m =$	0	5	10	15	20	25
$S_m =$	0,01797	0,01531	0,01209	0,00848	0,00473	0,00149
$\varrho_m =$		0,0884	0,1986	0,3375	0,5109	0,7280
$(S_0 - S_m) : \varrho_m =$		0,0300	0,0296	0,0281	0,0259	0,0226
$S_m : (1 - \varrho_m)^2 =$	0,0180	0,0184	0,0188	0,0193	0,0198	0,0201

$n = 25$

$m =$	0	5	10	15	20
$S_m =$	0,01899	0,01489	0,01035	0,00576	0,00177
$\varrho_m =$		0,1212	0,2732	0,4635	0,7016
$(S_0 - S_m) : \varrho_m =$		0,0338	0,0316	0,0286	0,0246
$S_m : (1 - \varrho_m)^2 =$	0,0190	0,0193	0,0196	0,0200	0,0199

$n = 20$

$m =$	0	5	10	15
$S_m =$	0,01928	0,01329	0,00729	0,00226
$\varrho_m =$		0,1730	0,3895	0,6705
$(S_0 - S_m) : \varrho_m =$		0,0346	0,0307	0,0254
$S_m : (1 - \varrho_m)^2 =$	0,0193	0,0194	0,0196	0,0208

The figures in the last line but one being about $1{,}5\ \delta_0$, *the fund may be written* $S_m = S_0(1 - 1{,}5\,\varrho_m)$. From the figures in the last line it will be seen that *the fund may also be written* $S_m = S_0(1 - \varrho_m)^2$. *In both cases* δ_0 *is about* 0,02 *by a fall in the interest of ca.* ½ *per cent.*

[*Note 5.* If $e^{-(\delta_1+\delta_2)}$ during the first n years is equal to v_1, during the next n_2 years equal to v_2 and during the next

n_3 years equal to v_3, and if the security fund by a duration n and these 3 factors of discount is equal to $S_1^{(n)}$, $S_2^{(n)}$ and $S_3^{(n)}$, we shall have:

$$S = \frac{v_1^{n_1} v_2^{n_2} v_3^{n_3}}{1 - v_1^{n_1} v_2^{n_2} v_3^{n_3}} \left(\frac{1 - v_1^{n_1}}{v_1^{n_1}} S_1^{(n_1)} - \frac{1 - v_2^{n_1}}{v_2^{n_1}} S_2^{(n_1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1 - v_2^{n_1+n_2}}{v_2^{n_1+n_2}} S_2^{(n_1+n_2)} - \frac{1 - v_3^{n_1+n_2}}{v_3^{n_1+n_2}} S_3^{(n_1+n_2)} + \frac{1 - v_3^{n_1+n_2+n_3}}{v_3^{n_1+n_2+n_6}} S_3^{(n_1+n_2+n_3)} \right).$$

If $n_1 = n_2 = n_3 = 10$ and $v_1 = e^{-(\delta_2+0,005)}$, $v_2 = e^{-(\delta_2+0,01)}$, $v_3 = e^{-(\delta_2+0,015)}$ we shall have: $S = 0,01765$.

If $n_1 = n_2 = n_3 = 10$ and $v_1 = e^{-(\delta_2+0,005)}$, $v_2 = e^{-(\delta_2+0,01)}$, $v_3 = e^{-(\delta_2+0,02)}$ we shall have: $S = 0,01726$.

Thus the deviation in the table for $\delta_1 = 0,01$, in the table page 13 is inconsiderable.]

According to the results found on page 7, 13 and 14 the security fund can be determined at $0,035\,(F - 1,5\,R)$ or $0,035\,\frac{(F-R)^2}{F}$ corresponding to a decrease in interest of 1 %. This quantity (3,5 per Cent of the insurance sum minus 1,5 times the value of the insurance or rather 3,5 per Cent of the risk multiplied by the quotient between the risk and the amount of the insurance, since the risk is equivalent to the amount of the insurance minus the value of the insurance) expresses the loss by a decrease of the interest of 1 % and may be used as the measure (module) for the monetary investment in funds.

It is possible to make different rules for these investments. The most natural is to procure such bonds as expire simultaneously with the insurances. In general one thereby obtains obligations having a shorter duration than usual bonds. It will therefore be sufficient to invest a part of the capital in ordinary bonds of long duration in such a manner that the total exchange profit in case of decreasing interest will be the same as if all the capital had been invested in bonds with the accurate shorter duration. We then obtain the following rule:

I. Such a part of the reserve is invested in funds that a decrease of 1 % in interest will result in an exchange profit equal to the module.

In this case the same result will be obtained as if the bonds expired at the same time as the insurance.

If the market rate of interest is exceptionally high and the company is developing it may be suitable to make sure of the high interest for a longer period than necessary with regard to the actual insurances by purchasing bonds of longer duration than is allowed for by rule I. It may therefore be more practical to replace it with another which allows of greater freedom in buying investments and yet provides a guarantee against a loss in exchange which will only be efficient in case of the business of a concern becoming reduced. Such a rule may be investments as follows:

II. The difference between the book value of the scrip and its real value must not be greater than a times that of the module. a can be equal to the difference between the effective rate of interest and the rate of interest which serves as the basis for the company's calculations.

When the insurances expire, the module becomes reduced to zero and the investments will therefore be noted at their real value. In other cases they cannot be noted at a higher rate of exchange than that which gives the basis rate of interest.

Should rule II show that the booked value of the investments is either too high or too low the difference must be balanced by future investments in loans of long or short duration or by making reinvestments or by the realisation of loans.

Should a company wish to guard itself against a decrease in the rate of interest to a fixed minimum rate, then besides rule II the following rule must be adopted:

II a. A guarantee fund should be established equal to the module multiplied by the difference between the basis rate of interest and the minimum rate.

This minimum rate can be put in relation to the State Bank rate, savings bank rate or the lowest rate allowed by the Insurance Inspection Board as a basis for the calculations.

The fund in question can be reduced by the difference between the investments, calculated on the rate of the basis

and its booked value just as the expression $R\left(\frac{1}{K_e}-1\right)K_r$ (se page 3) can be substituted by $\frac{R}{K_e}-R$ which is less.

Rules II and II a provide for a decrease in the rate of exchange and in the interest only by making monetary investments consequently without any real restrictions on the company. If a company has adopted rule II a and in consequence of a decrease in interest is unable to follow this rule when investing capital, and therefore finds it necessary to adopt a lower rate of interest in calculating premiums, the company can nevertheless obtain the basis rate for the entire insurance term for the insurance stock for which the rule has been observed; but naturally on the condition that the market rate of interest does not sink below the minimum rate.

In establishing rules similar to rules II and II a it is possible to regulate income yielded by interest. In case the company desires to obtain a constant normal rate of interest higher than the basis rate during the entire insurance time rule II a will then have the following appearance:

III a. A fund is established equal to the module multiplied by the difference between the normal rate of interest and the minimum rate.

III. In rule (II) *a* can be put equal to the difference between the effective rate and the normal rate. In this case the investments may be booked at such a rate that they yield a normal rate. Consequently it is possible to quote new investments at a higher rate than that at which they are purchased if the effective rate is higher than the normal rate, but they ought to be booked below the purchase rate if the effective rate is lower. Should the company wish to avoid the latter, then the margin for the fluctuations of the exchange rate provided for by rule III must be extended by the difference between the purchase price and the value of the investments corresponding to the normal rate of interest if the later value is lower. In this way the investments will be booked at the purchase rate but not lower than that they yield at the most the normal interest. It is clear that in continually using in this way a capitalised super rate as

income there will be no exchange profit in case of a possible decrease in the rate of interest by which to reduce the guarantee fund. The latter must be booked at its full value.

If a company has no wish to secure itself against a loss in the interest by establishing such rules, but only seeks a security against a loss on the market price by arranging that the papers shall be booked at the market price at the purchase without any margin for a deviation from the real value, a company may, even if it is retrograding, continue the investment of all its capitals in papers with a very long duration, even in papers which cannot be amortized entirely or partially and which are yielding a very low nominal interest. When the papers must be realized, those which will give the smallest losses on the market price must, moreover, be sold first, and at last it can then be necessary to realize papers at a time, where the interest is higher than at the purchase.

After the present period with a high interest there will probably come a period during which the interest is low, and in this period papers yielding a low nominal interest must be purchased at a high price. The realization of these papers may very well take place in the next period with a high interest and will then involve considerable losses, whose covering cannot be secured by means of the surplus on the loadings of the premiums, namely if there are expenses of new business which have not been amortized. In order to obtain a complete security there must, in this case, also a certain relation exist between the real and the booked value. A rule which will only be effective if the company has too many or too slowly expiring bonds, is rule II which may have the following form:

The difference between the real and the effective value of funds or similar papers must not exceed the module multiplied by the difference between the effective interest and the interest of the basis. (It may here be assumed that the effective interest is equal to the discount of the National Bank, eventually with a constant deduction. It is, namely, not necessary that the determination is exact, the essential point being that the module shall be equal to zero for an old stock.) If the difference in the value at the market

price is greater than permitted by this, the deficiency shall be regulated by means of future investments of capital.

[*Not 6.* The exchange profit or fluctuation mentioned in rules I, II and III can approximately be derived from the market price of all investments noted on the exchange, but it is of importance that companies keep accurate accounts of all loans, that is to say that one is able at any time to decide the average duration and market value. This may be done the same way as a policy valuation, but much simpler by determining once and for all for each loan a constant for the exchange value and another to decide the balance of the debt. If the nominal rate of interest is i, the annual yield y and the remainder of the time until the expiration of the bond n, then the balance of the debt will be

$$G = y\,\frac{1-(1+i)^{n}}{i},$$

while the exchange value for the interest $i - 0{,}01$ will be

$$K = y\,\frac{1-(0{,}99+i)^{-n}}{i-0{,}01}.$$

If the expiration year of the bond is O and the financial year is A we get

$$n = O - A,\; G = \frac{1}{i}\,(y - y\,(1+i)^{-O}\,(1+i)^{A}$$

and

$$K = \frac{1}{i-0{,}01}\,(y - y\,(0{,}99-i)^{-O}\,(0{,}99+i)^{A}).$$

If $T_1 = y(1+i)^{-O}$ and $T_2 = y\,(0{,}99+i)^{-O}$ then the total balance of the debt will be

$$\Sigma G = \frac{\Sigma y - (1+i)^{A}\,\Sigma T_1}{i}$$

and the total exchange value

$$\Sigma K = \frac{\Sigma y - (0{,}99+i)^{A}\,\Sigma T_2}{i-0{,}01}.$$

The actual value mentioned in II can when the effective rate of interest is i be fixed at $\Sigma G + (e - i)(\Sigma G - \Sigma K)$. A more accurate determination may be arrived at by interpolating to e in a table in which to the arguments i or $(i - 0{,}01)$ correspond the functional values

$$\frac{\log \Sigma T_1 - \log \Sigma y}{i} \text{ or } \log \frac{\Sigma T_2 - \log \Sigma y}{i - 0{,}01}$$

and thereby obtain

$$\frac{\Sigma T e - \log \Sigma y}{e}$$

and the corresponding market value. This determination is exact when the loans with allowance for the duration are distributed according to the typical curve of errors.]

On a formula for the transformation of mortality tables.

By Thv. Richardt.

(Continued from page 71.)

35. *Calculation of annuities on 2, 3, 4 etc. joint lives for quinquennial ages.* As shown in article 31 the formulae (54) (55 a) and (62) or (65) give very good approximations, except for old ages, where a direct calculation may be necessary.

A direct calculation (according to O^{M}) shows that a slight modification of the above mentioned formulae may be convenient. So we find that $h(x)(1+i)$ of these formulae may be replaced by a new number which is independent of the rate of interest. Denoting the new number by $h(x)$ we find (for $n = 5$)

$$h(x) = 2{,}44\, g(x).$$

The former $h(x)$ was about $2{,}2\, g(x)$ for $n = 5$.

Further we write the above mentioned formulae in the following form, where ω denotes the »new» age:

$$(68)\begin{cases} \log d(i, x : x\omega) = \log d(i, 1 : \omega) + \varphi(x; 1 : \omega) \\ \log d(i, xy : xy\omega) = \log d(i, y : y\omega) + \varphi(x; y : y\omega) \\ \log d(i, xyz : xyz\omega) = \log d(i, yz : yz\omega) + \varphi(x; yz : yz\omega) \end{cases}$$

etc., and

$$(69)\begin{cases} \log s(i, xy) = \log s(i, x) + \log s(i, y) - \log s(i) + \psi(xy) \\ \log s(i, xyz) = \log s(i, xz) + \log s(i, yz) - \log s(i, z) + \psi(xy; z) \\ \log s(i, xyzu) = \log s(i, xzu) + \log s(i, yzu) - \\ \qquad - \log s(i, zu) + \psi(xy; zu) \end{cases}$$

etc.

We then have with good approximation

$$(70)\quad \begin{aligned} \varphi(x; 1:\omega) &= \varphi(x; y: y\omega) = \varphi(x; yz: yz\omega) = \cdots = g(1:\omega)\, h(x) \\ \psi(xy) &= \psi(xy; z) = \psi(xy; zu) = \cdots = g(x)\, h(y) = g(y)\, h(x), \end{aligned}$$

except for old ages. As to the rate of interest the effect generally is insignificant; however, for old ages it may be desirable to take it into account.

36. We give below specimen values according to O^M.

Table 41 gives $a^i_{x\overline{5}|}$ and $\log s(i, x)$ for $n = 5$ at different rates of interest.

Table 42 gives $\log d(i, 1:x)$ at 3 % and 6 %; further $g(1:x)$, $g(x)$ and $h(x)$, where

$$(71)\quad \begin{aligned} (j-i)\, g(1:x) &= \log d(j, 1:x) - \log d(i, 1:x) \\ (j-i)\, g(x) &= \log s(j, x) - \log s(i, x) - \log s(j) + \log s(i) \\ h(x) &= 2{,}44\, g(x); \end{aligned}$$

here we have put $j = 0{,}06$, $i = 0{,}03$. The formula for $g(x)$ is easily found from (57) and (61).

Tables 43 and 44 give $\varphi(x; 1:y)$, $\psi(xy)$ and $\varphi(x; y:yz)$ for some ages at 3 % and 6 %.

Table 45 gives φ and ψ at 3 % and 6 % for 2, 3, 4 and 5 lives of equal ages.

Table 43, 44 and 45 give the true values of φ and ψ; comparing these values with the values calculated by the formulae (70) we see that the direct calculations may be confined to a few ages.

Table 41.

OM	Values of $\overset{i}{a}_{x\overline{5}\vert}$				Values of $\log s(i, x)$ for $n = 5$				OM
x	$i = 0{,}03$	$i = 0{,}04$	$i = 0{,}05$	$i = 0{,}06$	$i = 0{,}03$	$i = 0{,}04$	$i = 0{,}05$	$i = 0{,}06$	x
95	2,07170	2,05377	2,03639	2,01953	0,27318	0,26379	0,25453	0,24540	95
90	2,58064	2,55094	2,52223	2,49445	0,49279	0,48233	0,47202	0,46184	90
85	3,09250	3,04994	3,00885	2,96916	0,64952	0,63834	0,62731	0,61643	85
80	3,53731	3,48299	3,43060	3,38006	0,75572	0,74408	0,73259	0,72126	80
75	3,88605	3,82222	3,76071	3.70140	0,82588	0,81395	0,80218	0,79057	75
70	4,14145	4,07054	4,00222	3,93638	0,87171	0,85960	0,84765	0,83586	70
65	4,32010	4,24418	4,17105	4,10058	0,90145	0,88923	0,87716	0,86526	65
60	4,44111	4,36176	4,28534	4,21173	0,92063	0,90833	0,89620	0,88422	60
55	4,52109	4,43947	4,36088	4,28517	0,93291	0,92057	0,90839	0,89637	55
50	4,57321	4,49010	4,41009	4,33301	0,94076	0,92839	0,91618	0,90413	50
45	4,60731	4,52323	4,44228	4,36431	0,94582	0,93343	0,92121	0,90914	45
40	4,63029	4,54555	4,46398	4,38540	0,94920	0,93680	0,92456	0,91247	40
35	4,64708	4,56186	4,47983	4,40081	0,95164	0,93923	0,92698	0,91489	35
30	4,66059	4,57499	4,49259	4,41322	0,95359	0,94118	0,92892	0,91682	30
25	4,67144	4,58553	4,50283	4,42318	0,95516	0,94274	0,93048	0,91837	25
20	4,67906	4,59294	4,51003	4,43018	0,95626	0,94384	0,93157	0,91946	20
15	4,68360	4,59735	4,51431	4,43434	0,95692	0,94449	0,93223	0,92012	15
10	4,68594	4,59961	4,51652	4,43648	0,95726	0,94483	0,93257	0,92045	10

Table 42.

OM	$\log d(i, 1 : x)$		$10^4 g(1 : x)$	$h(x)$	$10^4 g(x)$
x	$i = 0.03$	$i = 0.06$			
95	0,53919	0,53645	−913	0,737	3022
90	0,63198	0,63022	−588	0,480	1968
85	0,75093	0,74991	−340	0,305	1252
80	0,88988	0,88938	−166	0,194	797
75	1,04205	1,04190	− 50	0,125	513
70	1,20152	1,20160	+ 24	0,0814	334
65	1,36290	1,36310	69	0,0537	220
60	1,52078	1,52106	92	0,0361	148
55	1,66941	1,66971	98	0,0251	103
50	1,80366	1,80394	94	0,0181	74
45	1,92114	1,92139	85	0,0135	55,5
40	2,02312	2,02335	77	0,0106	43,4
35	2,11645	2,11667	75	0,0085	34,8
30	2,20956	2,20980	80	0,0068	28,0
25	2,30213	2,30237	79	0,0055	22,5
20	2,38146	2,38165	61	0,0045	18,5
15	2,43665	2,43676	36	0,0039	16,1
10	2,46806	2,46811	16	0,0036	14,8

Table 43.

OM	$x-y$	$10^4 \varphi(x; 1 : y)$				$10^4 \psi(x\,y)$			
		$x=95$	$x=90$	$x=85$	$x=80$	$x=95$	$x=90$	$x=85$	$x=80$
$i = 0.03$	0	−648	−277	−103	−32	1928	879	370	153
	5	−422	−161	− 50	−10	1309	573	238	99
	10	−246	− 79	− 15	+ 5	861	371	154	64
	15	−120	− 24	+ 8	13	561	241	101	43
	20	− 36	+ 12	21	18	366	158	67	29
	25	+ 19	33	28	19	240	104	45	20
	30	51	44	30	18	160	71	31	14
	35	68	47	29	16	108	49	23	11
	40	73	45	26	15	75	35	17	8
	45	70	41	23	15	54	27	13	7
	50	63	37	23	16	41	21	11	5
	55	57	36	24	15	32	17	9	4
	60	56	38	24	12	26	13	7	4
	65	59	38	19	7	21	11	6	3
	70	58	29	11	3	17	9	5	3
$i = 0.06$	0	−647	−278	−104	−32	1910	877	371	154
	5	−422	−162	− 51	−10	1301	573	239	99
	10	−246	− 79	− 15	+ 5	857	371	154	64

Table 44.

Values of $10^4 \varphi(x; y : y z)$.

OM	$x - z$	$x - y = 0$			$x - y = 5$			$x - y = 10$		$x - y = 5$		$x - y = 20$
		$x = 95$ $y = 95$	$x = 90$ $y = 90$	$x = 85$ $y = 85$	$x = 95$ $y = 90$	$x = 90$ $y = 85$	$x = 85$ $y = 80$	$x = 95$ $y = 85$	$x = 90$ $y = 80$	$x = 95$ $y = 80$	$x = 90$ $y = 75$	$x = 95$ $y = 75$
$i = 0{,}03$	0	−487	−258	−104	—	—	—	—	—	—	—	—
	5	−323	−151	− 51	−373	−158	−51	—	—	—	—	—
	10	−189	− 74	− 15	−218	− 78	−15	−233	−79	—	—	—
	15	− 92	− 22	+ 8	−107	− 23	+ 8	−114	−23	−117	−24	—
	20	− 27	+ 12	22	− 31	+ 12	22	− 33	+12	− 35	+12	−35
	25	+ 16	33	29	+ 18	34	29	+ 19	34	+ 19	34	+19
	30	42	43	31	48	45	31	50	45	51	45	51
	35	56	46	30	63	48	30	67	48	68	48	68
	40	59	44	27	67	45	27	71	46	72	46	73
	45	56	40	24	64	41	24	68	41	69	41	70
	50	50	36	24	58	37	24	61	38	62	37	63
$i = 0{,}06$	0	−477	−254	−104	—	—	—	—	—	—	—	—
	5	−316	−149	− 51	−367	−157	−51	—	—	—	—	—
	10	−185	− 73	− 15	−215	− 77	−15	−231	−79	—	—	—

Table 45.

Values of φ and ψ for $x = y = z = u = v$.

ΩM	x	$10^4\,\varphi(x;1:y)$	$10^4\,\varphi(x;y:yz)$	$10^4\,\varphi(x;yz:yzu)$	$10^4\,\varphi(x;yzu:yzuv)$	$10^4\,\psi(xy)$	$10^4\,\psi(xy;z)$	$10^4\,\psi(xy;zu)$
$i = 0{,}03$	95	−648	−487	−264	−132	1928	1253	641
	90	−277	−258	−195	−130	879	748	532
	85	−103	−104	−95	−80	370	360	317
	80	−32	−33	−33	−31	153	156	152
	75	−6	−6	−6	−6	64	65	66
$i = 0{,}06$	95	−647	−477	−256	−128	1910	1221	621
	90	−278	−254	−190	−127	877	735	518
	85	−104	−104	−94	−78	371	357	312
	80	−32	−33	−33	−31	154	156	150
	75	−6	−6	−6	−6	64	66	66

Litteratur.

Über 2 Arbeiten von R. v. Mises: *Die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend.*

Die Arbeiten auf dem Gebiete der Wahrscheinlichkeitsrechnung in den letzten 20 Jahren haben sich in zwei einander entgegengesetzten Richtungen bewegt. Während die Hauptzahl der Arbeiten sich vorzüglich mit den praktischen Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung befasst und ihre Anwendungsmethoden vertieft, versuchen die übrigen die Theorie neu zu begründen. Zu den letzteren zählen vor allem einige Arbeiten von v. Mises, die in der mathem. Zeitschrift, Bd. V, erschienen sind, und in denen Mises sich die Aufgabe stellt, die Wahrscheinlichkeitslehre auf einem neuen Axiomen-System aufzubauen. Sehr richtig bemerkt er in seiner Einleitung, dass man auf dem Standpunkt des Laplace bislang stehen geblieben sei, und dass man abgesehen von einigen wenigen Ansätzen, vor allem russischer Mathematiker versäumt hat, für die Wahrscheinlichkeitsrechnung aus den neuen Forschungsergebnissen der Mengenlehre und Funktionentheorie Nutzen zu ziehen. Bei der Aufstellung eines Axiomensystems ist es selbstverständlich Grundbedingung, dass man von logisch einwandfreien sowie mathematisch eindeutigen Begriffen ausgehe. Nun sind aber die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung keine konstruirten sondern abstrahierte Begriffe. Sie sind zudem stark von der Philosophie geprägt, und gerade die philosophische Auffassung des Wahrscheinlichen, des Gleichmöglichen, der unendlichen Wiederholung u. s. f. haben der Entwicklung der Theorie ihr Gepräge verliehen; es ist darum notwendig, abgesehen von der funktionstheoretischen Fundamentierung auch das Begriffliche, neu klar zu stellen. Als Ausgangspunkt seines Axiomensystems dient ihm der Begriff des Kollektivs, da ja die Existenz der Kollektivs oder Sammelgegenstandes sozusagen die Voraussetzung einer Wahrscheinlichkeitslehre ist. Wir definieren ein Kollektiv als eine unendliche Folge gedachter Dinge oder Elemente $e_1, e_2, e_3 \ldots$, wobei jedem Element als Merkmal ein bestimmtes Wertsystem der k reellen Veränderlichen $x_1\ x_2 - x_k$ zugeordnet wird, wenn ausserdem diese Zuordnung den 2 Axiomen der Existenz der Grenzwerte und der Regellosigkeit der Zuordnung genügt. Die Axiome formuliert Mises folgendermassen:

I. Sei A eine beliebige Punktmenge des Merkmalraumes und N_A die Anzahl derjenigen unter den ersten N Elementen der Folge, deren Merkmal ein Punkt von A ist, dann existiere für jedes A der Grenzwert

$$\lim_{N=\infty} \frac{N_A}{N} = W_A.$$

II. Seien A und B zwei Punktmengen des Merkmalraumes ohne gemeinsame Punkte und die nach (1) gebildeten Grenzwerte W_A und W_B nicht beide null. Aus der Folge aller Elemente (e) von K streichen wir zunächst alle jene, die kein zu A oder zu B gehöriges Merkmal aufweisen, und versehen die übrigen mit den Indizes 1, 2, 3, . . . Aus der so entstandenen unendlichen Folge werde eine unendliche Teilfolge (e') dadurch ausgewählt, dass über die Indizes der auszuwählenden Elemente ohne Benützung ihrer Merkmalunterschiede verfügt wird, dann sollen innerhalb der Teilfolge (e') die nach (1) gebildeten Grenzwerte W'_A und W'_B existieren und der Bedingung

$$W'_A : W'_B = W_A : W_B$$

genügen.»

Haben wir das Kollektiv und den Grenzwert W_A so definiert, so können wir dazu übergehen diesen Grenzwert Wahrscheinlichkeit zu nennen, und haben somit nicht den Fehler begangen diesen neuen Begriff durch den Begriff des Gleichmöglichen, d. h. des Gleichwahrscheinlichen also durch sich selbst zu definieren. Untersuchen wir diesen Grenzwert W_A so erkennen wir an ihm alle Attribute des bekannten Wahrscheinlichkeitsbegriffes. Jedem Element ist also eine bestimmte Merkmalmenge zugeordnet, eine solche Merkmalmenge ist niemals leer, kann den ganzen Merkmalraum umfassen oder sich auf zwei Punkte reduzieren. Die Gesamtheit aller Grenzwerte W für den ganzen Merkmalraum bildet die Verteilung.

Das ist in Kürze das ganze Rüstzeug, mit dem wir uns nun an die Stellung und Lösung der Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung begeben. Zwei Hauptaufgaben bieten sich dar, die wir in Mises Darstellung als eine aufbauende und eine beschreibende charakterisieren können. Die erste besteht darin, aus gegebenen Kollektivs durch gewisse zulässige Operationen neue zu bilden, die zweite die Verteilungen der verschiedenen Kollektivs zu untersuchen. Jene Operation sollen hier nur genannt werden, ohne dass ich in Einzelheiten eingehen kann. Die einfachste ist die der »Auswahl«, indem wir Teilfolgen aus dem gegebenen Kollektiv auswählen ohne Benutzung der Merkmalunterschiede der auszuwählenden Elemente. Es ist klar, dass die Verteilung dabei unverändert bleibt. Durch »Mischung« erhält man ein neues Kollektiv, in welchem die Elemente mit denen des ursprünglichen durch eine eindeutige, aber nicht eindeutig umkehrbare Transformation $x' = f(x)$ verbunden sind. Hierher gehört z. B. das

Bertrand'sche Problem. Die dritte Operation ist die der »Teilung» und Aussonderung, wobei die Merkmale zwar unverändert bleiben, aber einer bestimmten Teilmenge der ganzen Merkmalmenge angehören müssen. Es erledigt sich unter dieser Kategorie das, was man allgemein als Wahrscheinlichkeit der Ursachen bezeichnet. Die letzte der einfachen Operationen ist die der »Verbindung»; das neue Kollektiv entsteht aus zwei gegebenen durch paarweise Verbindung der Elemente. Auf die zusammengesetzten Operationen, die alle Wiederholungen und Kombinationen der einfachen Operationen umfassen, und durch welche das Petersburger Problem sowie Marbe's Problem der reinen Gruppen geklärt werden, kann ich hier nicht näher eingehen. Ich will hier nur noch kurz auf die Verteilungsfunktionen zurückkommen. Den durch Axiom I. definierte Grenzwert W_A, die sogenannte Wahrscheinlichkeit, kennen wir als eine beschränkte, nicht negative Mengenfunktion von additivem Charakter; sie ist demnach in Carathéodory'schen Sinne eine im allgemeinen nicht reguläre Massfunktion, für die jede Punktmenge Messbarkeit besitzt. Mises geht der rechnerischen Einfachheit halber von der Mengenfunktion zur entsprechenden Punktfunktion $W(\bar{x})$ über, wo $\bar{x}$ der Vektor mit den k Merkmalkomponenten ist. $W(x)$ ist halbstetig nach oben und wir charakterisiert durch die 3 Gleichungen:

$$0 \leq W(x) < 1; \; W(-\infty, \ldots -, \infty) = 0; \; W(\infty, \ldots, \infty) = 1.$$

$W(x)$ ist im Stieltje'schen Sinne integrabel, es existiert also $\int f(x) d\, W(x)$ wenn $f(x)$ stetig ist. Ich erwähne nur die drei Integrale, die von besonderem Interesse sind:

1) die Komponenten des Mittelwertes $a_\varkappa = \int x_\varkappa \, w(x) \, d\, X$, wo $w(\bar{x}) = W'(x)$;

2) der Streuung $s_{\varkappa\lambda} = \int (x_\varkappa - a_\varkappa)(x_\lambda - a_\lambda) w(x) d\, X$, wo $\varkappa, \lambda = = 1, 2, \ldots k$;

3) des Durchschnitts oder der mathematischen Hoffnung einer Funktion $f(x) = \int f(x) w(x) d\, X$.

Die erschöpfende funktionentheoretische Untersuchung der Verteilungsfunktionen hat von Mises im ersten Teile seiner Arbeiten gebracht. Das Fundament derselben ist ein einfacher, aber neuer Satz der Analysis:

»Sei $f_1, f_2, f_3 \ldots$ eine unbeschränkte Folge von Funktionen einer reellen Variablen x, die an bestimmten, im Endlichen gelegenen Stellen $a = x_1, x_2, x_3 \ldots$ ein reelles endliches Maximum und eine reelle nicht verschwindende zweite Abteilung besitzen, so gilt, gleichmässig in jedem endlichen Intervall von u:

$$\lim_{n=\infty}\left[f_1\left(a_1+\frac{u}{r_n}\right)\cdot f_2\left(a_2+\frac{u}{r_n}\right)\ldots f_n\left(a_n+\frac{u}{r_n}\right)\right]=\text{konst. } e^{-u^2}$$

wo r eine mit n wachsende positive Grösse (die negative halbe Summe der genannten zweiten Abteilungen von $f_1 \ldots f_n$) bedeutet. Genügen überdies die f noch gewissen Bedingungen im Unendlichen, so gilt auch

$$\lim_{n=\infty}\int_a^b f_1\left(a_1+\frac{u}{r_n}\right)\cdot f_2\left(a_3+\frac{u}{r_n}\right)\ldots f_n\left(a_n+\frac{u}{r_n}\right)du=\text{konst.}\int_a^b e^{-u^2}du$$

für beliebige endliche oder unendliche a und b.»

Diesen Satz wendet v. Mises an zur Untersuchung der Funktional- und Integralprodukte von Verteilungsfunktionen. Unter gewissen nicht immer ganz einfach gestalteten Voraussetzungen wird hier funktionentheoretisch einwandfrei das Gauss'sche Gesetz bewiesen. Es wird sich sicher die Darstellung in manchen Punkten vereinfachen lassen; sie ist nicht immer ganz leicht fasslich. Die Arbeiten verdienen aber die unbedingte Aufmerksamkeit der Wahrscheinlichkeitstheoretiker. Sie sind zweifelsohne das Bedeutendste was in den letzten Jahren auf diesem Gebiet veröffentlicht worden ist, und werden Anregung sein für erneut einsetzende Forschung auf dem Gebiet der Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *P. Strelitz.*

C. V. L. Charlier: *Vorlesungen über die Grundzüge der mathematischen Statistik.* Verlag Scientia, Lund 1920, 125 s.

I dagarna har utkommit, på förlaget *Scientia* i Lund, en framställning på tyska språket av den matematiska statistikens elementer författad av professorn i astronomi vid Lunds universitet C. V. L. Charlier. Arbetet utgör, med undantag för femtonde och sista kapitlet »Abgekürzte Methoden zur Berechnung der Characteristiken», vilket är nytt, samt en del hjälptabeller, i huvudsak en översättning av samma författares bekanta bok »Grunddragen av den matematiska statistiken» (Extrahäfte till Statsvetenskaplig tidskrift, Lund 1910). Rörande dess innehåll må därför endast några korta rader vara tillräckliga.

Bokens syfte är att giva en elementär framställning av den matematiska statistikens huvuddelar, nämligen å ena sidan teorien för de statistiska talen och den statistiska seriens dispersion och stabilitet, vilken av förf. sammanfattas under benämningen homograd statistik, samt å andra sidan teorien för frekvensfördelning och korrelation av kvantitativa storheter, vilken av förf. sammanfattas under benämningen heterograd statistik. Däremot beröres icke de under den matematiska statistiken i vidare mening hörande teorierna och metoderna för interpolation och utjämning samt för dödlighetstabeller och försäkringstekniska tillämpningar.

Det är allmänt bekant, huruledes Charlier, genom sina (mestadels i Lunds observatoriums »Meddelanden» publicerade) originalavhandlingar på den matematiska statistikens område, åt denna vetenskap givit ett metodiskt underlag av den allmänna och bärkraftiga beskaffenhet, att därpå en hel lärobyggnad upprest sig. Det Charlier'ska systemet inom matematiska statistiken är också vida känt i utlandet och har särskilt i Amerika vunnit skickliga förespråkare, och också tillämpats inom försäkringsvetenskapen.

Den nu utkomna tyska läroboken, liksom den förut utkomna svenska, är naturligtvis alltigenom orienterad efter dess författares egna originalarbeten. Något utförligare referat av dessa originalarbeten är den dock icke. Begränsad som den är till enbart en beskrivning av själva räknemetoderna och i detta hänseende begränsad endast till enklare fall, ger den icke någon redogörelse för de teoretiska förutsättningar, från vilka metoderna framdeducerats, och alltså heller icke för själva deduktionen. Blott de färdiga räkneformlerna angivas med talrika numeriska exempel på deras praktiska tillämpning samt utförliga räkneschemata och hjälptabeller.

Det är nu tio år sedan den svenska upplagan av denna bok trycktes. Att densamma haft en mission att fylla framgår redan därav, att den sedan ett par år är utgången ur bokhandeln, och det är därför synnerligen glädjande, att nu en ny upplaga sett dagen och därtill på ett av de stora kulturspråken. Man har all anledning tro att boken därigenom skall vinna den vidgade läsekrets den så väl förtjänar. I den bok, som nu anmäles, komma hans lärareegenskaper väl tillsynes; framställningen är klar, koncis och av den art, att den väcker håg för vidare studier. Den bär också vittne om den egendomligheten i Charliers karaktär att hos lärjungen eller läsaren förutsätta viljan till arbete och också ställa krav på arbete. Ehuru elementärt hållen är hans bok ingalunda någon lätt lektyr. Därtill är framställningen alltför koncentrerad, och särskilt en läsare utan vidare matematisk skolning torde få underkasta sig besväret att själv ordentligt genomräkna exemplen, om han vill ha rätt behållning av boken. En annan egendomlighet med Charliers framställningssätt är, att han förutsätter, att läsaren läser boken till slutet. Man återfinner nämligen i bokens slut vissa kompletterande upplysningar, som äro av väsentlig betydelse för en rätt förståelse och tydning av de satser, som tidigare givits en av didaktiska skäl mera knapphändig formulering. Att denna framställningsmetod har stora förtjänster ligger i öppen dag, men att den också har sina vådor, därom vittnar fallet K. G. Hagström. I sin för något år sedan ventilerade avhandling har d:r Hagström mot Charlier riktat en häftig kritik, som i det väsentliga bygger på ett citat hämtat någonstans mitt i den bok, av vilken den nu recenserade är en översättning. De anklagelser, som Hagström med stöd härav riktar mot Charlier, nämligen att denne ej skulle vara medveten om den begränsade giltigheten av vissa satser ur korrelationsläran, äro synnerligen orättvisa, och skulle näppeligen ha kunnat framslungas av en person, som läst den citerade boken till slutet. Än mindre av en

person med någorlunda kännedom om Charliers originalbidrag till korrelationslärans teori. Den passus, som d:r Hagström hängt upp sig på, står också oförändrad kvar i den nya upplagan; förmodligen det enda svar, som från Charliers sida någonsin kommer att avgivas.

Som förut nämnts, skiljer sig den nya upplagan från den gamla huvudsakligen blott därigenom, att ett kapitel om förkortade metoder vid beräkning av karakteristikorna blivit tillfogat. De problem, som i detta kapitel behandlas, hänföra sig alla till det fall, att de klasser, i vilka de statistiska varianterna blivit indelade, äro så få, att en beräkning av medium, dispersion och eventuellt korrelationskoefficient icke är möjlig med de aritmetiska metoder, som i bokens föregående del behandlats. Nu är en lösning av dessa problem strängt taget ej möjlig med mindre man på förhand känner fördelningsfunktionens form. Charlier utgår för sin del stillatigande från den förutsättningen, att denna form är den s. k. normala. De därigenom vunna resultaten ge emellertid, även då denna förutsättning ej är uppfylld, approximativa värden, som mer eller mindre närma sig de verkliga.

Boken har tryckts på Lütke och Wullfs boktryckeri i Hamburg, varigenom det blivit möjligt att nedbringa priset till det, i förhållande till bokens utstyrsel, mycket låga beloppet av 10 kr. Bäst erhålles boken genom direkt hänvändelse till Lunds observatorium.

S. D. Wicksell.

Opgaver i aktuarmatematik ved den norske aktuareksamen 2det semester 1920.[1]

I.

De mekaniske utjevningsmetoder og deres anvendelse ved dødelighetstabeller. Der kræves særskilt redegjort for Karups metode.

II.

Poisson's teorem.

III.

Ved et annuitetslaan paa 10,000,000 kroner er kursen fastsat til 91,5 pct. og den aarlige rentefot til $5^1/_2$ pct. Av laanebeløpet skal den ene halvpart betales 1ste mars, den anden 1ste september i det aar da laanet avsluttes. Renter og avdrag betales halvaarsvis 1ste mars og 1ste september. Laanet er avdragsfrit i 5 aar — regnet fra tidspunktet for utbetalingen av laanebeløpets første halvpart — og amortiseres derefter i 35 aar.

Laantageren betaler $^1/_4$ pct. provision til laangiverne og betaler desuten for den formelle ordning av laanet og administrationen av laaneoperationen 1 promille av laanebeløpet.

Rentekuponger og uttrukne obligationer er betalbare ved laangiverne mot en kommission til disse av $^1/_4$ pct. for kuponger og $^1/_8$ pct. for obligationer.

Der utstedes 2 serier av obligationer, serie A paa 5,000 kroner og serie B paa 1,000 kroner.

Beregne den effektive rente og opstil en amortisationsplan for laanet, idet der forutsættes, at laangiverne helst ønsker at faa obligationer av serie A.

---

[1] Til besvarelsen av hver opgave kan benyttes en tid av indtil 10 timer.

IV.

Anvendelsen av kontinuerlige livrenter ved beregningen av præmier og præmiereserver i livsforsikring.

Vis at den kontinuerlige livsvarige livrente for en person i alder x tilnærmet kan beregnes av formelen:

$$\bar{a}_x = a_x \div 1/2 \div 1/12(\mu_x + \delta),$$

hvor a_x betegner den tilsvarende forskudsvise, helaarlige livrente, μ_x dødelighetsstyrken i alder x og δ den kontinuerlige rentefot svarende til den aarlige rentefot, som er fastsat som beregningsgrundlag.

Beregn paa grundlag av H^M tabellen og en rentefot av 4 pct. p. a. den aarlige nettopræmie i forsikringstiden for en forsikring paa 1.000 kroner for en person, som indtræder i alder 30 aar, naar forsikringssummen skal utbetales ved det 50de aar eller ved tidligere død, og det forutsættes, at utbetaling finder sted umiddelbart efter ethvert indtræffende dødsfald.